Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν ισούται πάντοτε 180°

Στάμη Τσικοπούλου

Αγαπητέ Ευκλείδη Α,

Χθες ο μαθηματικός μας είπε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι πάντα 180° αλλά μπορεί να γίνει μέχρι 540°. Δεν μας το εξήγησε όμως, γιατί όπως μας είπε, αυτό θα το μάθουμε στο πανεπιστήμιο. Επειδή δεν μπορώ να περιμένω μέχρι τότε και δεν ξέρω και αν θέλω να γίνω μαθηματικός, μπορείς να με βοηθήσεις, με απλά παραδείγματα, να το καταλάβω;

Ευχαριστώ, Μαρία

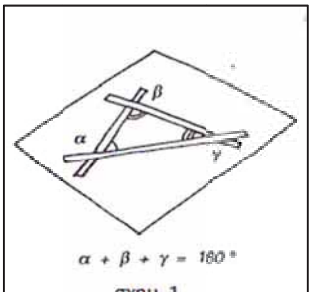
Μαρία, έχει δίκιο ο μαθηματικός σου, ότι για την απόδειξη της πρότασης αυτής δεν αρκούν τα μαθηματικά που μαθαίνουμε στο σχολείο. Θα προσπαθήσουμε όμως στη συνέχεια, με ορισμένες απλές κατασκευές, να την καταλάβεις και εσύ και οι φίλοι μας που μας διαβάζουν.

Πριν αρχίσετε φίλοι μας να διαβάζετε το άρθρο, προμηθευτείτε ορισμένα απλά υλικά : χαρτί, μολύβι, μοιρογνωμόνιο, ψαλίδι και μια λεπτή αυτοκόλλητη χάρτινη ταινία, σαν αυτές που χρησιμοποιούμε για να τυλίξουμε ένα δέμα, και ας αρχίσουμε.

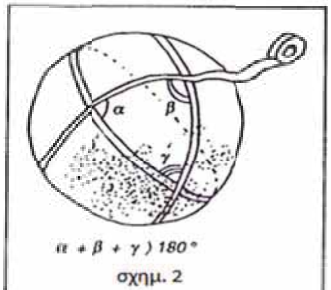
Κατασκευή 1η Με τρεις λουρίδες από την χαρτοταινία, σχηματίστε πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια από φορμάικα, γυαλί ή πλαστικό, π.χ σ'ένα τραπέζι, ένα τρίγωνο (σχημ.1). Όπως μάθατε στο σχολείο, **το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180°**. Μπορείτε άλλωστε να το επιβεβαιώσετε, για μια ακόμα φορά, μετρώντας τις γωνίες του με το μοιρογνωμόνιο σας.

Κατασκευή 2η Με τη βοήθεια της χαρτοταινίας σχηματίστε πάνω σε μια σφαίρα π.χ σε μια κενή γυάλα για τα χρυσόψαρα ή σ' ένα στρογγυλό μπαλόνι, ένα τρίγωνο (σχημ.2) φροντίζοντας να μην σας διπλώνει η χαρτοταινία. Μετρήστε τις γωνίες του τριγώνου μ' ένα εύκαμπτο μοιρογνωμόνιο, που μπορείτε να φτιάξετε αντιγράφοντας σ' ένα διαφανές χαρτί το μοιρογνωμόνιο σας ή φωτοτυπώντας το και θα διαπιστώστε ότι **το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180°**.

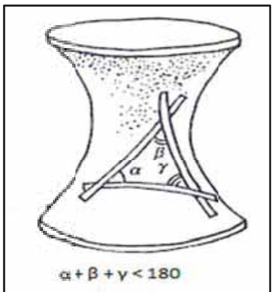
Κατασκευή 3η Σχηματίστε πάνω σε ένα πλαστικό σκαμνί σαν αυτό του σχημ.3, ένα ακόμα τρίγωνο με τη βοήθεια της χαρτοταινίας. Μετρήστε τις γωνίες του με το χάρτινο μοιρογνωμόνιο σας και θα διαπιστώστε ότι **το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι μικρότερο από 180°**.



σχημ. 1



σχημ. 2



σχημ. 3

Από τις κατασκευές αυτές διαπιστώνουμε ότι :

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου πάνω σε μια **επίπεδη επιφάνεια** (σ΄ένα επίπεδο όπως συνηθίζουμε να λέμε) **είναι ίσο με 180°**.

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου πάνω στην **επιφάνεια της σφαίρας**, ενός σφαιρικού τριγώνου όπως λέγεται, **είναι μεγαλύτερο από 180°**.

γ) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου πάνω στην **υπερβολοειδή επιφάνεια,** όπως λέγεται η επιφάνεια του σκαμπό που χρησιμοποιήσατε πιο πάνω, **είναι μικρότερο από 180°**.

Αιτία για όλα τα παραπάνω είναι μια ιδιότητα που έχουν οι επιφάνειες η **καμπυλότητα**. Διαφορετικές επιφάνειες έχουν διαφορετική καμπυλότητα.

Για να το καταλάβετε δοκιμάστε το εξής **:** Στίψτε μισό πορτοκάλι και πατήστε με την παλάμη σας τη φλούδα του. Θα γίνει μεν επίπεδη αλλά θα σκιστεί (!) γιατί η σφαίρα και το επίπεδο έχουν διαφορετική καμπυλότητα. Αν μ' ένα μολύβι σχηματίσετε πάνω σ' ένα φύλλο χαρτιού το περίγραμμα της πατημένης πορτοκαλόφλουδας, όταν θελήσετε να την ανασυνθέσετε θα πρέπει να αφαιρέσετε τμήματα από την επιφάνεια του χαρτιού.

Την έννοια της καμπυλότητας την εισήγαγε ο **Gauss** το 1827, προκειμένου να κατατάξει τις επιφάνειες. Η κατάταξη αυτή παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.

σφαιρική επιφάνεια
θετική καμπυλότητα

επίπεδη επιφάνεια
μηδενική καμπυλότητα

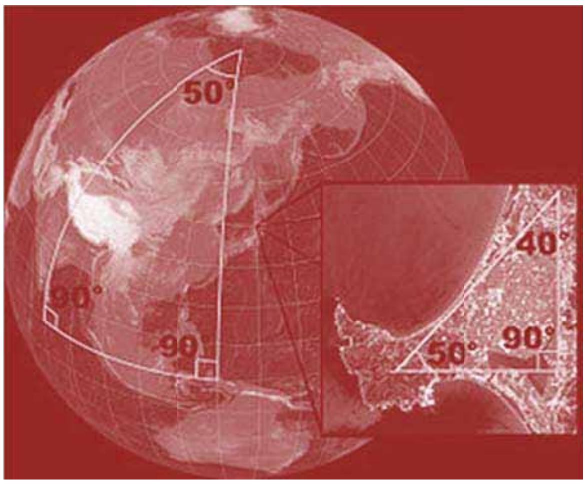
υπερβολική επιφάνεια
αρνητική **καμπυλότητα**

Όταν η επιφάνεια πάνω στην οποία είναι σχεδιασμένο ένα τρίγωνο έχει **θετική καμπυλότητα** τότε το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο από 180^o, όταν έχει **μηδενική καμπυλότητα** είναι ίσο με 180^o, ενώ όταν έχει **αρνητική καμπυλότητα** τότε το άθροισμα είναι μικρότερο από 180^o.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι :

- **Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου εξαρτάται από το είδος της επιφάνειας πάνω στην οποία είναι αυτό σχεδιασμένο**.
- **Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180^o μόνο αν το τρίγωνο είναι σχεδιασμένο στο επίπεδο**.

Σφαιρικά τρίγωνα (τρίγωνα πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας)



Στην διπλανή φωτογραφία, ένα τρίγωνο είναι σχεδιασμένο πάνω στην επιφάνεια της Γης. Στο *σφαιρικό* αυτό τρίγωνο που είναι ισοσκελές, οι δυο πλευρές του είναι τμήματα δύο **μεσημβρινών** της γης (*μεσημβρινοί λέγονται οι κύκλοι της σφαίρας που διέρχονται από τους πόλους*) και σχηματίζουν μεταξύ τους στον Βόρειο Πόλο, γωνία 50^o. Η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι τμήμα του κύκλου του **ισημερινού** της γης. Καθεμιά από τις δύο γωνίες της βάσης αυτού του τριγώνου είναι 90^o. Το τρίγωνο έχει **δύο ορθές γωνίες** και το άθροισμα των γωνιών του είναι :

$$50^o + 90^o + 90^0 = 230^o > 180^o$$

Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία 50^0 σχεδιαστεί πάνω σε μια μικρή επιφάνεια της γης (που για μικρές αποστάσεις θεωρούμε ότι είναι επίπεδη), η άλλη οξεία γωνία του θα είναι 40^o (όπως σ΄αυτό στη μικρή φωτογραφία κάτω δεξιά), γιατί το επίπεδο έχει μηδενική καμπυλότητα και το άθροισμα των γωνιών του είναι 180^0 ($50^o+90^o+40^0=180^o$).

Αν η γωνία των μεσημβρινών του παραπάνω σφαιρικού τριγώνου είναι και αυτή ορθή, τότε το τρίγωνο, όπως αυτό της διπλανής φωτογραφίας, έχει **τρεις ορθές γωνίες** και το άθροισμα τους είναι : $90^0 + 90^0 + 90^0 = 270^o$.

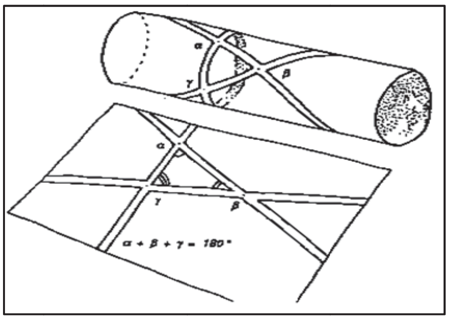
... και κάτι ακόμα : Η γωνία των μεσημβρινών στο Β πόλο, που στο διπλανό σφαιρικό τρίγωνο είναι 90^0, μπορεί να μεγαλώσει και να γίνει μέχρι 360^o, αν οι δύο μεσημβρινοί κινηθούν προς το πίσω μέρος της σφαίρας σε μια προσπάθεια να ενωθούν. Τότε το σφαιρικό τρίγωνο θα έχει δύο ορθές γωνίες στη βάση του και άθροισμα γωνιών κάτι λιγότερο από 540^0.

Με τα προβλήματα επίλυσης των σφαιρικών τριγώνων και τη μέτρηση των αποστάσεων πάνω στην γήινη ή την ουράνια σφαίρα που συναντάμαι στη πράξη, ειδικά στην **Αστρονομία**, στην **Χαρτογραφία** (την κατασκευή χαρτών), στην **Ωκεανοπλοΐα** (τη ναυσιπλοΐα στους ωκεανούς) στην **Πολική Ναυτιλία** (τη ναυσιπλοΐα σε πολικές περιοχές), ασχολείται η **σφαιρική γεωμετρία** (ένας ιδιαίτερος κλάδος της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας που πραγματεύεται ειδικά την κυρτή επιφάνεια της σφαίρας) και ένας συναφής κλάδος με αυτήν, η **σφαιρική τριγωνομετρία**. Δύο κλάδοι των μαθηματικών που δεν διδάσκονται στο σχολείο.

Αν ένα τρίγωνο είναι σχεδιασμένο πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου, π.χ στο χαρτί που είναι κολημμένο σ΄ένα ένα κουτί κονσέρβας, τότε πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών του;

Για να απαντήσουμε θα καταφύγουμε και πάλι σε μια κατασκευή.

<ins>**Κατασκευή 4^η**</ins> Σ' ένα χάρτινο ρολό, δηλαδή σ' έναν **κύλινδρο**, σχηματίζουμε με την χαρτοταινία μας πάνω στην επιφάνειά του, ένα τρίγωνο. Οι πλευρές του τριγώνου αυτού μοιάζουν με έλικες (σχημ.4). Αν μετρήσουμε όμως τις γωνίες του θα διαπιστώσουμε κάτι απρόσμενο, ότι δηλαδή το άθροισμά τους είναι 180^o. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου δεν είναι μια καμπύλη επιφάνεια. Αν την «ξετυλίξουμε» άλλωστε είναι ένα επίπεδο.

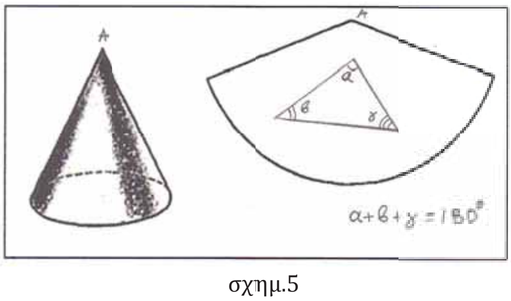


σχημ. 4

Αν ένα τρίγωνο είναι σχεδιασμένο πάνω στην επιφάνεια ενός κώνου, τότε πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών του;

Στην περίπτωση αυτή θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η κορυφή του κώνου βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του τριγώνου.

<ins>**Κατασκευή 5^η**</ins> Πάνω σ' ένα φύλλο χαρτιού που έχει σχήμα κυκλικού τομέα (σχημ.5) σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο. Το τρίγωνο επειδή είναι σχεδιασμένο σε επίπεδη επιφάνεια έχει άθροισμα γωνιών 180^o. Στη συνέχεια ενώνουμε τις δύο άκρες του χαρτιού οπότε σχηματίζεται ένα κώνος που η κορυφή του Α δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου.

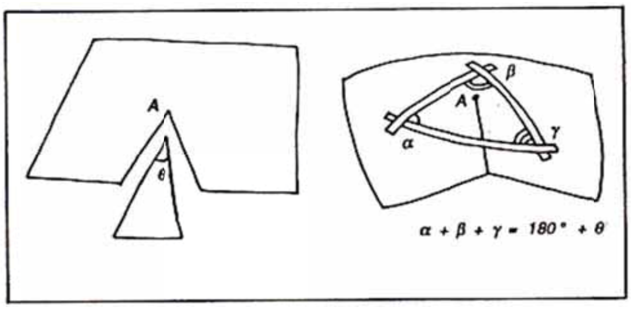


σχημ.5

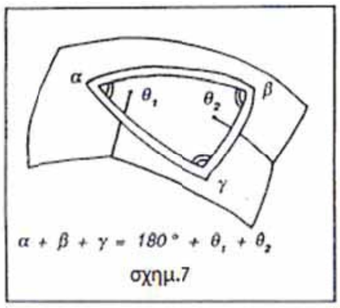
Εφόσον ο κώνος σχηματίσθηκε από ένα επίπεδο, το τρίγωνο που είναι σχεδιασμένο στην παράπλευρη επιφάνειά του έχει άθροισμα γωνιών 180^o.

<ins>**Κατασκευή 6η**</ins> Από ένα φύλλο χαρτιού, που έχει σχήμα ορθογωνίου, αφαιρούμε με το ψαλίδι μια ορθή γωνία θ (σχημ. 6). Αν ενώσουμε τις δύο άκρες του χαρτιού που σχηματίστηκαν με το κόψιμο, τότε σχηματίζεται τοπικά μια κωνική επιφάνεια με κορυφή στο σημείο Α. Πάνω στην επιφάνεια αυτή σχηματίζουμε με την βοήθεια της μετροταινίας ένα τρίγωνο ώστε η κορυφή Α του κώνου να βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου, φροντίζοντας πάντα να μην μας διπλώσει η χαρτοταινία. Η επιφάνεια του κώνου έχει θετική καμπυλότητα. Άρα το άθροισμα των γωνιών

του τριγώνου μας είναι 180^o + θ, δηλαδή είναι μεγαλύτερο από 180^o.



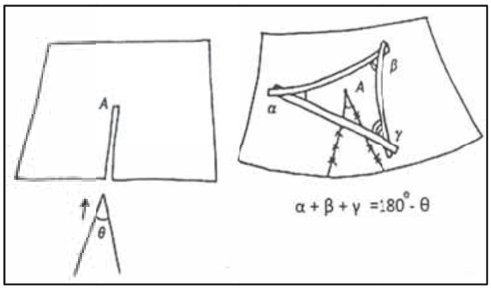
σχημ.6



σχημ.7

Αν τώρα αφαιρέσουμε από δύο διαδοχικές πλευρές του χαρτιού μας δύο γωνίες τις θ_1 και θ_2 όπως στο (σχημ.7) τότε σχηματίζουμε τοπικά δύο κωνικές κορυφές. Αν με την μετροταινία σχηματίσουμε πάνω σ΄αυτή την επιφάνει ένα τρίγωνο ώστε και οι δύο κορυφές να βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου, τότε επειδή η επιφάνεια έχει θετική καμπυλότητα, το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου θα είναι 180^o + θ_1 + θ_2 >0.

Κατασκευή 7η Αν σ' ένα ορθογώνιο κομμάτι χαρτιού κάνουμε σε μια πλευρά του μια τομή και προσθέσουμε μια γωνία θ όπως στο (σχημ.8) τότε σχηματίζεται μια υπερβολική, μια *σαμαροειδής* επιφάνεια (μια επιφάνεια σαν το σαμάρι του αλόγου). Η επιφάνεια αυτή έχει αρνητική καμπυλότητα. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου που είναι σχεδιασμένο πάνω της, θα είναι 180^o- θ, δηλαδή θα είναι μικρότερο από 180^o.

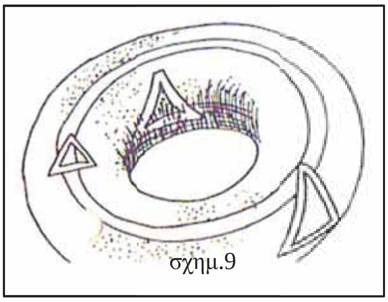


σχημ.8

Μια επιφάνεια, στον τρισδιάστατο χώρο που ζούμε, μπορεί να έχει τμήματα με θετική καμπυλότητα, άλλα με αρνητική ή και με μηδενική καμπυλότητα, οπότε τα τρίγωνα που σχηματίζουμε πάνω της δεν έχουν όλα άθροισμα γωνιών 180^o.

Για να το καταλάβουμε θα καταφύγουμε και πάλι σε μια κατασκευή.

Κατασκευή 8^η Σχεδιάσουμε πάνω στην επιφάνεια μιας καλά φουσκωμένης σαμπρέλας (σ΄έναν *τόρο* όπως τον λέμε στα μαθηματικά) μικρά τρίγωνα (σχημ.9). Όλα αυτά τα τρίγωνα δεν έχουν άθροισμα γωνιών ίσο με 180^o αφού υπάρχουν περιοχές στην επιφάνεια της σαμπρέλας με μηδενική, θετική και αρνητική καμπυλότητα. Όσα από αυτά τα τρίγωνα, βρίσκονται στην πάνω και την κάτω επιφάνεια της έχουν άθροισμα γωνιών ίσο με 180^o, όσα βρίσκονται στην εξωτερική επιφάνεια της, μεγαλύτερο από 180^o και όσα βρίσκονται στην εσωτερική επιφάνεια της μικρότερο από 180^o.



σχημ.9

Ελπίζουμε Μαρία αλλά και εσείς φίλοι μας που μας διαβάζετε να καταλάβατε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν ισούται πάντοτε με 180^o και ότι αυτό εξαρτάται από την **επιφάνεια** πάνω στην οποία το τρίγωνο είναι σχεδιασμένο. Η γεωμετρία που μαθαίνουμε στο σχολείο είναι η **Ευκλείδεια γεωμετρία**. Ιδιαίτερο βάρος δίνουμε σ' ένα κλάδο της, στη **γεωμετρία του επιπέδου**, την **επιπεδομετρία** όπως ονομάζεται. Η επιπεδομετρία εξετάζει τα σχήματα και τις ιδιότητες των σχημάτων που βρίσκονται πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια. Επειδή λοιπόν τα σχήματα που εξετάζουμε στο σχολείο, βρίσκονται όλα πάνω σ'ένα επίπεδο, γι αυτό μαθαίνουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o χωρίς να εξετάζουμε τι συμβαίνει, όταν το τρίγωνο βρίσκεται πάνω σε άλλες επιφάνειες.

Όσο για τις άλλες γεωμετρίες, την **σφαιρική** και την **υπερβολική,** και τις ιδιότητες που έχουν τα σχήματα που βρίσκονται πάνω σε αυτές, θα τις μάθετε στο Πανεπιστήμιο.