Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επαναληπτικά Θέματα

Λαζαρίδης Χρήστος

Οι λύσεις δίνονται περιληπτικά, ώστε να αφήνουν περιθώρια αυτενέργειας των μαθητών ενόψει των εξετάσεων

1) **Έστω μία πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(0)=1$ και τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=6$.**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3-3x+1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

γ) Αν ρ είναι η αρνητική ρίζα του β ερωτήματος να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=\rho$ ισούται με $\frac{3\rho(\rho-1)}{4}$.

δ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{|\ln x|}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+1}{\eta\mu^2(x-1)}$.

Λύση: α) Έστω ότι ο βαθμός της f είναι μεγαλύτερος του 3, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3+1}=\pm\infty$, άτοπο, άρα ο βαθμός της f είναι μικρότερος ή ίσος του 3. Θεωρούμε $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Λαμβάνοντας υπ όψιν τις υποθέσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο.

β) Βρίσκουμε τα επί μέρους σύνολα τιμών. Έχουμε, $f((-\infty,-1))=(-\infty,3), f([-1,1])=[-1,3], f((1,+\infty))=(-1,+\infty)$.

γ) Το εμβαδόν είναι, $E=\int_\rho^0|f(x)|dx=\int_\rho^0(x^3-3x+1)dx=...$

Λαμβάνουμε υπ όψιν $f(\rho)=0$.

δ) Το πρώτο όριο ισούται με $-\infty$ ενώ το δεύτερο με χρήση De L'Hospital δίνει 3.

2) **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε: $f(1)=1$ και $f(x)+xf'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:**

α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x+1)-1}{x}>-1$.

β) $f(x)<\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(x)>\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

γ) Υπάρχει $\xi\in(\frac{1}{3},2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)>-1$.

δ) $E(\lambda)>\ln\lambda$, όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ όπου $\lambda>1$.

Λύση: α) Το $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x+1)-1}{x}$ αν θέσουμε $u=x+1$ γίνεται $\lim\limits_{u\to1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}$ το οποίο ισούται με $f'(1)$.*
Στη συνέχεια αν στην σχέση της υπόθεσης $f(x)+xf'(x)>0$ θέσουμε $x=1$, τότε προκύπτει το ζητούμενο.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=xf(x), x\in(0,+\infty)$ η οποία αποδεικνύουμε $\lim\limits_{u\to1}\lambda(u)=f'(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\lambda(x+1)=f'(1)$, ότι είναι γνησίως αύξουσα. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $0<x<1$ οπότε $\alpha(x)<\alpha(1)\Rightarrow f(x)<\frac{1}{x}$ και $x>1$ όπου εργαζόμαστε ανάλογα.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[\frac{1}{3},2]$ και διαπιστώνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\frac{1}{3},2)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(2)-f(\frac{1}{3})}{\frac{5}{3}}$.

Αλλά από το β ερώτημα $f(2)>\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{3})<3$.

δ) $E(\lambda)=\int_1^\lambda|f(x)|dx$. Επειδή, $1<x<\lambda$ παίρνουμε $f(x)>\frac{1}{x}$ οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε το ζητούμενο.

3) **Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση με $f(1)=1$ και $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(100h+1)-1}{h}=200$.**

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της

[*] Ουσιαστικά υπονοούμε ότι: $\frac{f(x+1)-1}{x}=\frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}=\lambda(x+1)$, όπου $\lambda(u)=\frac{f(u)-f(1)}{u-1}$, οπότε $\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1$, $\lim\limits_{u\to1}\lambda(u)=f'(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\lambda(x+1)=f'(1)$ (θεώρημα ορίου σύνθεσης συναρτήσεων)

C_f στο σημείο της $(1,f(1))$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\int_2^{10}(\int_1^2 f(x)dx)dt \geq 16$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $2f(\xi)f'(\xi)=f^2(2)-1$.

δ) Αν επιπλέον μία παράγουσα F της f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\eta\mu t dt = 0$.

Λύση: α) Το όριο της υπόθεσης αν θέσουμε $x=100h+1$ δίνει $f'(1)=2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=2x-1$.

β) Επειδή η f είναι κυρτή έχουμε $f(x)\geq 2x-1$. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε, $\int_1^2 f(x)dx \geq 2$. Ολοκληρώνοντας εκ νέου, προκύπτει το ζητούμενο.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=f^2(x)$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[1,2]$.

δ) Η F είναι περιττή και επομένως η $F'=f$ θα είναι άρτια. Η συνάρτηση $f(t)\eta\mu t$ θα είναι περιττή συνεπώς το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα ισούται με 0.

4) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο η οποία είναι τέτοια ώστε $f(1)=1, f'(1)=0, f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

γ) Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την ανίσωση $f'(2f(x)-1)\leq 0$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $g(x)=x$.

Λύση: α) $0=\lim_{x\to 0}(f(x)\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x})=f(0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=f(x)-x$ για την οποία εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle στο $[0,1]$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_0,1]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi\in(x_0,1)$ $f''(\xi)=-\frac{1}{1-x_0}<0$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η f'' διατηρεί πρόσημο.

γ) Η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1)=0$.
Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ισοδύναμη με την $2f(x)-1\geq 1$. Η τελευταία ισοδυναμεί με τη . $f(x)\geq f(1)$ η οποία έχει τη λύση $x=1$ αφού $f(1)$ μέγιστο της f.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\beta(x)=f(x)-x$. Ισχύει, $\beta(0)=\beta(1)=0$. Οι δύο προφανείς ρίζες της β είναι μοναδικές διότι αν υποθέσουμε ότι η β έχει και τρίτη ρίζα με την βοήθεια Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

5) Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1)=-1$ και τέτοια ώστε $x^2f'(x)=2-xf(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι,
$f(x)=\frac{2\ln x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

β) Να μελετήσετε τη f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3f(x+1)<2f(x)+f(x+3)$, για κάθε $x>e^2$.

δ) Αν επιπλέον F είναι μία αρχική της f, στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(\frac{e}{x})=F(x)+c, x\in(0,+\infty)$, όπου $f(x)\geq f(1)$

ii) $e\int_1^e\frac{F(x)}{x^2}dx=\int_1^e F(x)dx+ce(e-1)$.

Λύση: α) Η σχέση της υπόθεσης γράφεται, $(xf(x))'=(2\ln x)'$.

β) Κοίλη στο $(0,e^2]$ και κυρτή στο $[e^2,+\infty)$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα $[x,x+1],[x+1,x+3]$ και χρησιμοποιούμε το ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

δ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=F(\frac{e}{x})-F(x)$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή.

ii) Θεωρούμε $I=\int_1^e\frac{F(x)}{x^2}dx$. Θέτουμε $u=\frac{e}{x}$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x+2$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $(-1,-1)$.

γ) $2|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\leq|x-y|\leq\frac{|f(x)-f(y)|}{2}$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

δ) $5F(x^2+3)<2F(x^2+6)+3F(x^2+1)$, όπου F είναι μία αρχική της f.

Λύση: α) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Στη συνέχεια, $f(A)=\mathbb{R}$.

β) Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ η οποία είναι ισοδύναμη με $f(f(x))-x=0$ έχει μοναδική ρίζα το -1. (Με παραγώγιση και αντικατάσταση). Άλλος τρόπος είναι να λύσουμε την $f(x)=x$ δεδομένου ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις, $x=y, x<y, x>y$ και αποδεικνύουμε τη σχέση $|x-y|\le\frac{|f(x)-f(y)|}{2}$, στη συνέχεια θέτουμε $x=f^{-1}(x), y=f^{-1}(y)$ οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα $[x^2+1, x^2+3], [x^2+3, x^2+6]$ και λαμβάνουμε υπόψη ότι F' είναι γνησίως αύξουσα.

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με f'' γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-x^3+9x-1}{x-3}=-18$ και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(3)=1, f'(3)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f''(3)=0$ και ότι το $K(3,f(3))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα έστω ρ η οποία ανήκει στο $(1,3)$ και $\int_\rho^3 f'(x)f'(f(x)+2)dx=1-f(2)$.

Λύση: α) Θέτουμε $\alpha(x)=\frac{f(x)-x^3+9x-1}{x-3}$, λύνουμε ως προς $f(x)$ και χρησιμοποιούμε ότι $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)$. Στη συνέχεια, $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{x-3}$ και αντικαθιστούμε $f(x)$.

β) $f'(x)>0 \Rightarrow f'(x)-f'(3)>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}>0, & x\in(3,+\infty) \\ \frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}, & x\in(-\infty,3) \end{cases}.$$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}\ge 0$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}\le 0$ επομένως $f''(3)=0$.

γ) Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano στο $[1,3]$. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται από τη μονοτονία της f. Το ολοκλήρωμα ισούται

$$[f(f(x)+2)]_\rho^3=\ldots=1-f(2).$$

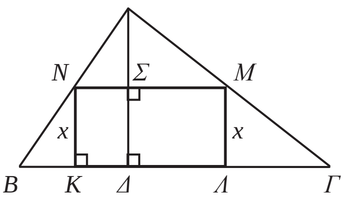
Τάξη: Γ΄

Προτεινόμενα θέματα για τα Μαθηματικά προσανατολισμού θετικών σπουδών

Από τον Σωτήρη Σκοτίδα- 2[ο] ΓΕΛ Καρδίτσα

*Η κατασκευή εύστοχων θεμάτων για τις πανελλαδικές εξετάσεις στα Μαθηματικά είναι δύσκολο εγχείρημα. Προφανώς τέτοιου είδους θέματα πρέπει να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες: **α)** προσήλωση στο πνεύμα του σχολικού βιβλίου για λόγους ισονομίας αλλά και ενίσχυσης του ρόλου του σχολείου **β)** ισχυρή διακριτότητα στο επίπεδο δυσκολίας των ερωτημάτων **γ)** εξέταση του βαθμού εμπέδωσης της θεωρίας **δ)** εξέταση της βαθύτερης κατανόησης των εννοιών **ε)** έλεγχος της ταχύτητας διεκπεραίωσης δραστηριοτήτων που σχετίζονται με βασικές προτάσεις της ύλης. **ζ)** καλή γνώση των βασικών δεξιοτήτων σε άλγεβρα και γεωμετρία από προηγούμενες τάξεις. **η)** απαίτηση συνθετικής ικανότητας του μαθητή. Στηριζόμενοι σε αυτό το μοντέλο, προτείνουμε τα παρακάτω θέματα. Ο αναγνώστης καλό θα ήταν να θεωρεί δεδομένη την ΜΗ ύπαρξη τέλειων θεμάτων. Οποιαδήποτε σχόλια είναι ευπρόσδεκτα. Να σημειώσουμε ότι σε μια χώρα που η Μαθηματική Εκπαίδευση αφήνει πολλά περιθώρια βελτίωσης, δεν είναι δίκαιο να κρίνεται η μαθηματική πορεία ενός μαθητή μέσα σε 3 ώρες. Τέλος, να τονιστεί ότι η κατασκευή των εξεταστικών δοκιμίων θα πρέπει να έχει ως βάση τις οδηγίες διδασκαλίας του ΙΕΠ που πρέπει να ακολουθεί ο εκπαιδευτικός στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς.*

ΘΕΜΑ 1[ο]: Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $ΒΓ=10cm$ και ύψους $ΑΔ=5cm$.



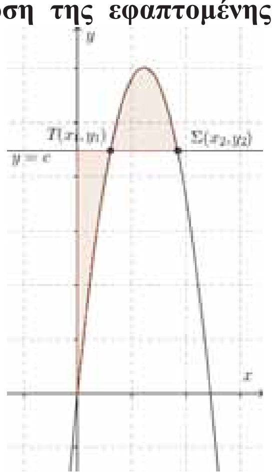
Α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε και η περίμετρο Ρ του ορθογωνίου δίνονται από τις συναρτήσεις: $E(x)=-2x^2+10x$, $P(x)=2(10-x)$, $x\in(0,5)$

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) της γραφικής παράστασης της Ε(x) η οποία είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της Ρ(x)

Γ) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 5^-}\left[\frac{e^{\frac{1}{(x-5)^2}}}{\ln(E(x))}\right]$$

Δ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης Ε(x) και μια



ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x η οποία τέμνει την καμπύλη σε δύο διαφορετικά σημεία. Να βρείτε την εξίσωση αυτής της ευθείας $y=c$ ώστε τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά να είναι ίσα.

Ε) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από το σημείο $A(x_0,E(x_0))$ με $x_0=0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=E(x)$, $x\geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\geq 0$ και $x'(t)\neq 0$ για κάθε $t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$;

Προτεινόμενη Λύση

Α) Έχουμε x<ΑΔ=5, οπότε ΑΣ=5–x, με $x\in(0,5)$. Έστω y η άλλη διάσταση του ορθογωνίου. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΝΜ, ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{MN}{B\Gamma}=\frac{A\Sigma}{A\Delta}\Rightarrow\frac{y}{10}=\frac{5-x}{5}\Rightarrow y=10-2x\Rightarrow$$

$E(x)=x(10-2x)=-2x^2+10x$, και

$P(x)=2x+2y=2x+2(10-2x)=-2x+20$.

Β) Η γραφική παράσταση της P(x) είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα χωρίς τα άκρα του, ενώ κείται επί ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης –2. Αλλά $E'(x)=-4x+10$. Αν $(\alpha,f(\alpha))$ το σημείο επαφής θα ισχύει: $E'(\alpha)=-2\Rightarrow -4\alpha+10=-2\Rightarrow\alpha=3$ $\Rightarrow E(\alpha)=E(3)=-2\cdot 3^2+10\cdot 3=12$.

Ώστε (ε): $y-12=-2(x-3)\Leftrightarrow(\varepsilon):y=-2x+18$.

Γ) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 5^-}E(x)=0$ με E(x)>0 και $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln y=-\infty$ Έτσι $\lim\limits_{x\to 5^-}\ln(E(x))=-\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to 5^-}(x-5)^2=0$ με $(x-5)^2>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{1}{(x-5)^2}=+\infty$ και $\lim\limits_{w\to+\infty}e^w=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to 5^-}e^{\frac{1}{(x-5)^2}}=+\infty$.

Έτσι παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{+\infty}{-\infty}$. Εξετάζουμε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L' Hospital. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις του αριθμητή και του παρονομαστή είναι παραγωγίσιμες κοντά στο 5, ως σύνθεση γνωστών παραγωγίσιμων συναρτήσεων (εκθετικής, λογαριθμικής και πολυωνυμικής), ενώ η παράγωγος του παρονομαστή δεν μηδενίζεται κοντά στο 5.

Εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{\left[e^{\frac{1}{(x-5)^2}}\right]'}{[\ln(E(x))]'}$. Έχουμε:

$$\frac{\left[e^{\frac{1}{(x-5)^2}}\right]'}{[\ln(E(x))]'}=\ldots=\frac{2x}{5-2x}\cdot\frac{1}{(x-5)^2}e^{\frac{1}{(x-5)^2}}=$$

$$=\frac{2x}{5-2x}\cdot\varphi\left(\frac{1}{(x-5)^2}\right),\text{ όπου }\varphi(y)=ye^y$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{2x}{5-2x}=-2$ και $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{1}{(x-5)^2}=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(y)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to 5^-}\varphi\left(\frac{1}{(x-5)^2}\right)=+\infty$$

Ώστε το ζητούμενο όριο είναι $-\infty$.

Δ) Ας είναι $T(x_1,c)$ και $\Sigma(x_2,c)$ με $x_1<x_2$ τα κοινά σημεία της ευθείας και της C_E. Έχουμε:

$$\int_0^{x_1}(c-E(x))dx=\int_{x_1}^{x_2}(E(x)-c)dx\Rightarrow$$

$$\int_0^{x_1}(c-E(x))dx+\int_{x_1}^{x_2}(c-E(x))dx=0\Rightarrow$$

$$cx_2=-\frac{2}{3}x_2^{\,3}+5x_2^{\,2}\Rightarrow c=-\frac{2}{3}x_2^{\,2}+5x_2\Rightarrow$$

$$-2x_2^{\,2}+10x=-\frac{2}{3}x_2^{\,2}+5x_2\Rightarrow x_2=\frac{15}{4}$$

Άρα: $c=E\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{75}{8}$ οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η: $y=\frac{75}{8}$

Ε) Πρέπει και αρκεί $x'(t_0)=y'(t_0)$ (1). Αλλά

$y(t)=E(x(t))$

$y'(t)=E'(x(t))\cdot x'(t)=(-4x(t)+10)\cdot x'(t)$

Άρα $(1)\Leftrightarrow x'(t_0)=x'(t_0)[-4x(t_0)+10]\Leftrightarrow x(t_0)=\frac{9}{4}$

οπότε $y(t_0)=-2\cdot\frac{81}{16}+10\cdot\frac{9}{4}=\frac{99}{8}$.

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\ln x}$, $x\geq 1$.

Α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και βρεθεί το σύνολο τιμών της f(x)

Β) Να αποδειχθεί ότι η f(x) έχει αντίστροφη, η οποία και να βρεθεί.

Γ) Να μελετηθεί η f(x) ως προς την κυρτότητα και να αποδειχθεί ότι $f(x)\geq 2x-e$ για κάθε $x\geq 1$.

Δ) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to e^+}\frac{f(x)-e}{(x-e)^2\cdot\ln(x-e)}$

Ε) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^e\frac{2\cdot\ln x-x\cdot\ln f(x)}{x\cdot\ln f(x)+x\cdot e^x}dx.$$

Προτεινόμενη Λύση

Α) $f'(x)=\left(e^{\ln^2(x)}\right)'=2\ln x(\ln x)'f(x)=\frac{2\ln x}{x}f(x)>0$ για κάθε $x>1$ και καθώς f συνεχής στο $[1,+\infty)$ θα είναι f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα $f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$.

Β) Η f ως γνησίως μονότονη θα είναι «1–1». Άρα θα έχει αντίστροφη. Ψάχνουμε τα y για τα οποία έχει λύση ως προς $x\in[1,+\infty)$ η εξίσωση y = f(x). Από Α) ερώτημα, έχουμε $y\ge1$, οπότε

$f(x)=y\Leftrightarrow e^{\ln^2(x)}=y\Leftrightarrow \ln^2(x)=\ln y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x=\sqrt{\ln y}\Leftrightarrow x=e^{\sqrt{\ln y}}$ αφού

$y\ \ge1\Rightarrow \ln y\ge \ln1=0\Rightarrow\sqrt{\ln y}\ge0\Rightarrow e^{\sqrt{\ln y}}\ge e^0=1$.

Ώστε $f^{-1}(x)=e^{\sqrt{\ln x}}$, $x\in[1,+\infty)$.

Γ) $f''(x)=2\left[\left(\frac{\ln x}{x}\right)'f(x)+\frac{\ln x}{x}f'(x)\right]=$

$2\left[\frac{1-\ln x}{x^2}f(x)+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2f(x)\right]=$

$2f(x)\frac{2\ln^2x-\ln x+1}{x^2}>0$, διότι $2t^2-t+1>0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$, άρα f κυρτή στο [1, +∞).

Αλλά η εφαπτομένη ευθεία τη C_f στο (e, f(e)) έχει εξίσωση: $y-f(e)=f'(e)(x-e)$, δηλαδή $y=2x-e$. Άρα: $f(x)\ge 2x-e$ για κάθε $x\ge1$.

Δ) Έχουμε: $h(x)=\frac{f(x)-e}{x-e}\cdot\frac{1}{(x-e)\ln(x-e)}=$

$=\frac{f(x)-e}{x-e}\cdot\frac{\frac{1}{x-e}}{\ln(x-e)}=\frac{f(x)-e}{x-e}\cdot\varphi\left(\frac{1}{x-e}\right)$, όπου

$\varphi(y)=\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}$ Αλλά $\lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-e}{x-e}=\lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=2$

Εξάλλου $\lim_{x\to e^+}\left(\frac{1}{x-e}\right)=+\infty$ και $\lim_{x\to0^+}\varphi(y)=-\infty$

(Κανόνας L' Hospital, μορφή $\frac{+\infty}{-\infty}$)$\Rightarrow$

$\lim_{x\to e^+}\varphi\left(\frac{1}{x-e}\right)=-\infty$. Άρα $\lim_{x\to e^+}h(x)=-\infty$

Ε) Παρατηρούμε ότι

$I=\int_1^e\frac{2\ln x+xe^x-(x\ln^2x+xe^x)}{x\ln^2x+xe^x}dx=$

$\int_1^e\frac{2\cdot\frac{1}{x}\ln x+e^x}{\ln^2x+e^x}dx-\int_1^e 1dx=\int_1^e\frac{\left(\ln^2x+e^x\right)'}{\ln^2x+e^x}dx-(e-1)=$

$\int_1^e F'(x)dx-e+1$, όπου $F(x)=\ln\left(\ln^2x+e^x\right)$

Άρα $I=F(e)-F(1)-e+1=\ln\left(1+e^e\right)-e$

ΘΕΜΑ 3ο: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=x-\text{εφ}x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Α) Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g(x) τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες και τα διαστήματα κυρτότητας, της γραφικής της παράστασης C_g.

Β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο με τετμημένη $\frac{\pi}{4}$ και να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει $\text{εφ}x\ge 2x+1-\frac{\pi}{2}$.

Γ) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(x)=-x$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ εκ των οποίων οι δύο είναι αντίθετες.

Δ) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των g και g^{-1}.

Ε) Αν ρ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=-x$, να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_g και την ευθεία: $x+y=0$.

Προτεινόμενη Λύση

Α) Έχουμε: $g'(x)=1-\frac{1}{\text{συν}^2x}=-\frac{\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=-\text{εφ}^2x<0$,

για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και καθώς η g(x) είναι συνεχής στο 0, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=A$, οπότε:

$g(A)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x),\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$.

Ακόμα $g''(x)=-2\text{εφ}x\frac{1}{\text{συν}^2x}$, για κάθε $x\in A$, οπότε

- $g''(x)>0\Leftrightarrow \text{εφ}x<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

- $g''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
- $g''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ και κοίλη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, έχει δε η C_g μοναδικό σημείο καμπής το $(0,g(0))$.

Πιθανές ασύμπτωτες είναι μόνο οι $\varepsilon_1: x=-\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon_2: x=\frac{\pi}{2}$. Πράγματι οι ε_1, ε_2 είναι ασύμπτωτες της C_g αφού $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)=-\infty$.

Β) Έχουμε: $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-1$ και $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ οπότε

$$(\varepsilon): y-\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=-1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=-x-1+\frac{\pi}{2}$$

Από **Α)** ερώτημα η g(x) είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $g(x)\le -x-1+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x-\varepsilon\varphi x\le -x-1+\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi x\ge 2x+1-\frac{\pi}{2}$$

Γ) Αρκεί λοιπόν το ζητούμενο να ισχύει για τη συνάρτηση $h(x)=2x-\varepsilon\varphi x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε: $h'(x)=2-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=2-\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)$ $=1-\varepsilon\varphi^2 x$. Οπότε:

- $h'(x)>0\Leftrightarrow 1-\varepsilon\varphi^2 x>0\Leftrightarrow -1<\varepsilon\varphi x<1\Leftrightarrow$ $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ και $h'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

Άρα η συνάρτηση h ως συνεχής στο Α θα είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1=\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ και $\Delta_3=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Έχουμε λοιπόν:

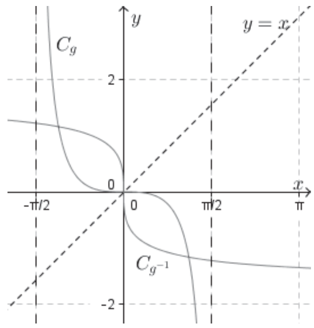
$$h(\Delta_1)=\left[h\left(-\frac{\pi}{4}\right),\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}h(x)\right)=\left[\frac{2-\pi}{2},+\infty\right)$$

$$h(\Delta_2)=\left[h\left(-\frac{\pi}{4}\right),h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[\frac{2-\pi}{2},\frac{\pi-2}{2}\right]$$

$$h(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x),h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left(-\infty,\frac{\pi-2}{2}\right]$$

Επειδή σε καθένα από τα διαστήματα $h(\Delta_1)$, $h(\Delta_2)$, $h(\Delta_3)$ ανήκει το μηδέν η h(x) θα έχει ρίζα σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα και λόγω της γνήσιας μονοτονίας της οι ρίζες αυτές θα είναι μοναδικές. Παρατηρούμε ότι h(0) = 0 ενώ η h είναι περιττή, οπότε h(–ρ) = – h(ρ) = 0, όπου ρ η μοναδική ρίζα της h(x) στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ) Η συνάρτηση g ως γνησίως φθίνουσα στο Α θα είναι και «1–1». Άρα υπάρχει η g^{-1}. Βρήκαμε στο Γ) ότι τα κοινά σημεία των $y=g(x)$ και $y=-x$ είναι τα (–ρ,ρ), (0,0), (ρ,–ρ), και λόγω της συμμετρίας των $C_{g^{-1}}, C_g$ ως προς την y=x τα (ρ, –ρ), (0, 0), (–ρ, ρ) θα ανήκουν στην $C_{g^{-1}}$



Κάνοντας χρήση και των ευρημάτων του Α) ερωτήματος, μπορούμε να δώσουμε το σχήμα

Ε) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_{-\rho}^{\rho}|g(x)+x|dx$ Η συνάρτηση g είναι προφανώς περιττή στο Α, οπότε το χωρίο που ορίζουν οι $y=g(x)$, $y=-x$, x=0, x=ρ είναι προφανώς συμμετρικό ως προς το (0,0) του χωρίου που ορίζουν οι $y=g(x)$, $y=-x$, x=0, x=–ρ οπότε έχουν ίσα εμβαδά. Άρα $E=2\int_0^{\rho}|g(x)+x|dx=2\int_0^{\rho}|h(x)|dx$.

Από το **Γ)** ερώτημα προκύπτει h(x) ≥0, για κάθε x ∈ [0, ρ], αφού $0\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0=h(0)\le h(x)$ και $\frac{\pi}{4}\le x\le\rho\Rightarrow h(x)\ge h(\rho)=0$.

Άρα $E=2\int_0^{\rho}h(x)dx=$

$$=2\int_0^{\rho}(2x-\varepsilon\varphi x)dx=2\rho^2+2\int_0^{\rho}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx=$$

$$=2\rho^2+2\int_0^{\rho}\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]'dx=2\rho^2+2\ln(\sigma\upsilon\nu\rho).$$

(σ.σ. $\ln(\sigma\upsilon\nu\rho)<0$, αφού $\frac{\pi}{4}<\rho<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1>\frac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}>\sigma\upsilon\nu\rho>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$)