Υπεύθυνοι τάξης: Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα Γ΄Λυκείου

Σπύρος Γλένης, Μαθηματικός - Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών

Τα θέματα που ακολουθούν αναφέρονται στις αντίστροφες συναρτήσεις στο Θεώρημα Bolzano και στην αυστηρή αντιμετώπιση του θεωρήματος εύρεσης του ορίου σύνθεσης συναρτήσεων. Εξετάζονται δε και κάποιες ιδιότητες συνάρτησης μέσω της γραφικής της παράστασης.

Άσκηση 1η

α) Να βρείτε όλες τις γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\sqrt{1+f^2(x)}=\frac{1}{\text{συν}x}$ (1) για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

β) Υπάρχει f συνάρτηση «1–1» αλλά όχι γνησίως μονότονη που να ικανοποιεί την ιδιότητα (1);

γ) Υπάρχει συνάρτηση f όχι «1–1» που να ικανοποιεί την ιδιότητα (1);

Λύση

α) $\sqrt{1+f^2(x)}=\frac{1}{\text{συν}x}\Leftrightarrow 1+f^2(x)=\frac{1}{\text{συν}^2x}\Leftrightarrow$

$f^2(x)=\frac{1}{\text{συν}^2x}-1\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1-\text{συν}^2x}{\text{συν}^2x}\Leftrightarrow$

$f^2(x)=\frac{\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}\Leftrightarrow f^2(x)=\text{εφ}^2x\Leftrightarrow|f(x)|=|\text{εφ}x|$.

Για το πρόσημο της f στο $\Delta=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ θα επιλύσουμε αρχικά την $f(x)=0$. Είναι:

$f(x)=0\Leftrightarrow|f(x)|=0\Leftrightarrow|\text{εφ}x|=0\Leftrightarrow\text{εφ}x=0\Leftrightarrow$

$x=0$. Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και f γνησίως φθίνουσα ισχύει $f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$. Οπότε $|f(x)|=|\text{εφ}x|\Leftrightarrow -f(x)=\text{εφ}x\Leftrightarrow f(x)=-\text{εφ}x$.

Ομοίως για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ έχουμε $f(x)\geq f(0)\Rightarrow$

$f(x)\geq 0$. Οπότε $|f(x)|=|\text{εφ}x|\Leftrightarrow f(x)=-\text{εφ}x$.

Αποδείξαμε ότι $f(x)=-\text{εφ}x$ για κάθε $x\in\Delta$.

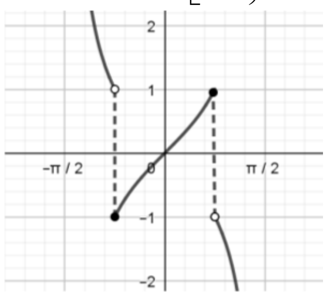
Σχόλιο: Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x)=|\text{εφ}x|$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι οι

$$f(x)=\begin{cases}\text{εφ}x, & x\in A\\ -\text{εφ}x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-A\end{cases}$$

με $A\subseteq\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Δηλαδή υπάρχουν τόσες συναρτήσεις όσα και τα υποσύνολα Α του διαστήματος (–π/2, π/2).

β) Αρκεί να βρούμε συνδυασμό των καμπύλων $y=\text{εφ}x$ και $y=-\text{εφ}x$ ώστε να μην υπάρχουν σημεία με την ίδια τετμημένη. Μια τέτοια συνάρτηση βλέπουμε στην εικόνα όπου έχουμε επιλέξει ως σύνολο Α το διάστημα $A=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

γ) Μια προφανής περίπτωση συνάρτησης που δεν είναι 1–1 είναι η $f(x)=|\text{εφ}x|$ που προκύπτει από το σχόλιο, αν θεωρήσουμε $A=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.



- Μερικά ενδιαφέροντα ερωτήματα που αφορούν τις συναρτήσεις με την ιδιότητα (1): Αν η f είναι περιττή τότε θα είναι 1–1; Το αντίστροφο ισχύει; Αν η f δεν είναι 1–1 είναι υποχρεωτικά άρτια;

Άσκηση 2η

Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης y = f(x) .Να υπολογίσετε εφόσον υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)\text{ημ}(\pi x)]$ β) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-1}{(x+2)f(x)}$

γ) $\lim\limits_{x\to -1}(f\circ f)(|x|)$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{f(x+2)}$

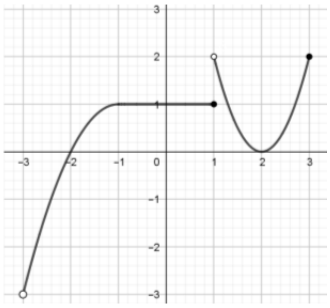
Λύση

α) Εδώ εμφανίζεται για πρώτη φορά το θεώρημα του ορίου σύνθεσης συναρτήσεων σε απλή μορφή και γι’ αυτό θα δώσουμε αναλυτικά την απάντηση.

Έχουμε $\text{ημ}(\pi x)=h(g(x))$ με

$g(x)=\pi x=u$ και $h(u)=\text{ημ}u$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\pi=u_0,\ u\neq\pi=u_0$ κοντά στο 1 και $\lim\limits_{u\to\pi} h(u)=\lim\limits_{u\to\pi} ημu=0$.



Άρα $\lim\limits_{x\to 1} ημ(\pi x)=\lim\limits_{x\to 1} h(g(x))=0$

Εξάλλου , $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ επομένως:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f(x)ημ(\pi x)\right]=1\cdot 0=0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)ημ(\pi x)\right]=2\cdot 0=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)ημ(\pi x)\right]=0$.

β) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-1\right)=3$, $\lim\limits_{x\to -2}\left[(x+2)f(x)\right]=0$.

Για $x<-2$ ισχύει $(x+2)f(x)>0$ και για $x>-2$ επίσης ισχύει $(x+2)f(x)>0$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)f(x)}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-1}{(x+2)f(x)}=+\infty$.

γ) Για $x\in(-2,-1)$ έχουμε $1<|x|<2$ οπότε $f(|x|)=f(u)$ με $u=|x|$. Αλλά $\lim\limits_{x\to -1^-} u=1^+$, $u\neq 1=u_0$ στο (-2,-1) και $\lim\limits_{u\to 1^+} f(u)=2$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -1^-} f\left(f(|x|)\right)=0$. Για $x\in(-1,0)$ ισχύει $0<|x|<1$ Άρα $f(|x|)=1$ και $f(f(|x|)=f(1)=1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -1^+}(f\circ f)(|x|)=\lim\limits_{x\to -1^+} 1=1$.

Σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα «όριο σύνθετης συνάρτησης» διότι $y=f(|x|)=1=y_0$ για $x\in(-1,0)$. Άρα δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

δ) Η $g(x)=\dfrac{1-f(x)}{f(x+2)}$, $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ είναι σταθερή με $g(x)=0$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-f(x)}{f(x+2)}=0$.

Φαινομενικά το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-f(x)}{f(x+2)}$ είναι μορφή $\dfrac{0}{0}$, ωστόσο υπάρχει μια σημαντικότατη ποιοτική διαφορά μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή: ο παρονομαστής τείνει στο μηδέν ενώ ο αριθμητής είναι μηδέν οπότε και το πηλίκο είναι ταυτοτικά μηδέν κοντά στο $x_o=0$.

Άσκηση 3η

Αν οι πραγματικές συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ και $f(\Delta)\subseteq g(\Delta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_o\in\Delta$ ώστε $f(x_o)=g(x_o)$.

Λύση: Αν η συνάρτηση g είναι σταθερή τότε $g(\Delta)=\{c\}$. Επειδή $f(\Delta)\neq\varnothing$ και τα μόνα υποσύνολα του $\{c\}$ είναι το $\varnothing$ και το $\{c\}$ υποχρεωτικά $f(\Delta)=\{c\}$ οπότε οι f, g είναι ίσες και ισχύει $f(x_o)=g(x_o)=c$ για κάθε $x_o\in\Delta$.

Αν η g δεν είναι σταθερή, από το θεώρημα μέγιστης κι ελάχιστης τιμής υπάρχουν $\gamma,\delta\in\Delta$ ώστε $g(\gamma)\leq g(x)\leq g(\delta)$ για κάθε $x\in\Delta$. Επομένως $f(\Delta)\subseteq\left[g(\gamma),g(\delta)\right]=g(\Delta)$. Αυτό ισοδυναμεί με την $g(\gamma)\leq f(x)\leq g(\delta)$ για κάθε $x\in\Delta$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma<\delta$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ με $h(\gamma)=f(\gamma)-g(\gamma)\geq 0$ και $h(\delta)=f(\delta)-g(\delta)\leq 0$. Άρα $h(\gamma)h(\delta)\leq 0$.

Αν $h(\gamma)h(\delta)<0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_o\in(\gamma,\delta)$ ώστε $h(x_o)=0$.

Αν $h(\gamma)h(\delta)=0$ τότε $h(\gamma)=0$ ή $h(\delta)=0$ άρα για $x_o=\gamma$ ή $x_o=\delta$ ισχύει $h(x_o)=0$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_o\in[\gamma,\delta]\subseteq\Delta$ ώστε $h(x_o)=0$ δηλαδή $f(x_o)=g(x_o)$. Είναι σχετικά εύκολο να εξετάσουμε αν το συμπέρασμα ισχύει για Δ = (α, β].

Άσκηση 4η

Για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$f^3(x)+2xf^2(x)+x^2f(x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $x+f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1}.

β) Να επιλύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$

Αν x_0 είναι μια λύση στο (β) ερώτημα:

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και να βρείτε την εφαπτομένη της στο σημείο αυτό.

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{f(x)-x}$

Λύση

α) $f^3(x)+2xf^2(x)+x^2f(x)=1\Leftrightarrow f(x)\left(x+f(x)\right)^2=1$

Προφανώς $x+f(x)\neq 0$ οπότε η συνεχής στο

διάστημα $\Delta=\mathbb{R}$ συνάρτηση $g(x)=x+f(x)$ διατηρεί πρόσημο. Από την (1) για $x=0$ έχουμε $f^3(0)=1 \Rightarrow f(0)=1$ οπότε $g(0)=1>0$. Άρα $g(x)>0$ δηλαδή $x+f(x)>0$ στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x_1,x_2 \in IR$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{\left(x_1+f(x_1)\right)^2}=\frac{1}{\left(x_2+f(x_2)\right)^2}$$

$$\Rightarrow x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

Η f είναι «1–1» άρα έχει αντίστροφη.

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{1}{\left(x+f(x)\right)^2} \Leftrightarrow y=\frac{1}{(x+y)^2}$$

Ισχύει $y>0$, $x+y>0$ και ισοδύναμα έχουμε:

$$\sqrt{y}=\frac{1}{x+y} \Leftrightarrow x+y=\frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{y}}-y$$

δηλαδή η εξίσωση $f(x)=y$ έχει πραγματική λύση για κάθε $y>0$. Άρα $f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-x, x>0$.

β) Επειδή $f(x)>0$, η $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει λύσεις μόνον για $f^{-1}(x)>0$ και

$$f^{-1}(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}-x>0 \Leftrightarrow 0<x<1.$$

Επειδή η f^{-1} είναι «1–1» ισχύει

$$f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(f(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}-f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}-\frac{1}{\sqrt{x}}+x=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}-x=x$$

$$1=2x\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}^3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

γ) Στην επίλυση του (β) είδαμε ότι η λύση $x_o=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ικανοποιεί την ισότητα $f^{-1}(x_o)=x_o$ άρα και την $f(x_o)=x_o$. Για $x \neq x_o$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)-x_o}{f^{-1}\left(f(x)\right)-x_o}=\frac{u-x_o}{f^{-1}(u)-x_o}=$$

$$=\frac{1}{\frac{f^{-1}(u)-x_o}{u-x_o}}=\frac{1}{\frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(x_o)}{u-x_o}}=h(u)$$

Όπου $u=f(x)$ με: $\lim\limits_{x\to x_o} u=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)=x_o$ και $u \neq x_0$ κοντά στο x_0 (γιατί ;)

Τότε $\lim\limits_{x\to x_o} h(u)=\frac{1}{\lim\limits_{u\to x_o}\frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(x_o)}{u-x_o}}=\frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(x_o)}$ διότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με $\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-1$, οπότε $\left(f^{-1}\right)'(x_o)=\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=-2$. Άρα $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=-\frac{1}{2}$,

δηλαδή $f'(x_0)=-\frac{1}{2}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη λοιπόν είναι η $(\varepsilon): y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$, δηλαδή η $(\varepsilon): y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$

δ) Για $x \neq x_o$ έχουμε: $\frac{f^{-1}(x)-x}{f(x)-x}=\frac{\frac{f^{-1}(x)-x}{x-x_o}}{\frac{f(x)-x}{x-x_o}}=$

$$\frac{\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_o)+x_o-x}{x-x_o}}{\frac{f(x)-f(x_o)+x_o-x}{x-x_o}}=\frac{\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_o)}{x-x_o}-1}{\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}-1}$$

Τότε: $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f^{-1}(x)-x}{f(x)-x}=\frac{\left(f^{-1}\right)'(x_o)-1}{f'(x_o)-1}=\frac{-2-1}{-0{,}5-1}=2.$

Η λύση στο (δ) με κανόνα De L' Hospital προϋποθέτει παράγωγο σε διάστημα κι όχι μόνο σε ένα σημείο x_o. Αρκετά ενδιαφέρον ερώτημα είναι κι η μελέτη των ασύμπτωτων της f.

Άσκηση 5η

Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης $y=f(x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f(x) καθώς και τα διαστήματα όπου είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η σύνθεση $f \circ f$ και να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες.

γ) Να επιλύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x)=1$.

δ) Να μελετήσετε τη συνέχεια της $f \circ f$.

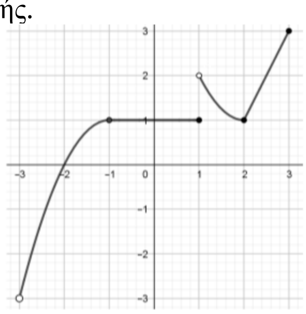
ε) Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f \circ f$.

στ) Να μελετήσετε το πρόσημο της $f \circ f$

Δίνεται ότι $f\left(-1-\sqrt{3}\right)=-2$, $f\left(-1-\sqrt{2}\right)=-1$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού είναι το $\Delta=(-3,3]$ και το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta)=(-3,3]$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-3,1]$ και $(1,3]$. Στο $x_o=1$ η f δεν είναι συνεχής.



β) Η σύνθεση $f \circ f$ ορίζεται όταν

$$\begin{cases} x \in (-3,3] \\ f(x) \in (-3,3] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3,3]$$

Για $x=0$: $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = 1$

Για $y=0$: $(f \circ f)(x)=0 \Leftrightarrow f(f(x))=0 \Leftrightarrow f(x)=-2 \Leftrightarrow$ $x=-1-\sqrt{3}$. Επομένως η γραφική παράσταση της $f \circ f$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-1-\sqrt{3},0)$ και $B(0,1)$.

γ) $f(f(x))=1 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le 1$ ή $f(x)=2$ $\Leftrightarrow -1-\sqrt{2} \le x \le 1$ ή $x=2,5$.

δ) Για $x_o \in (-3,1) \cup (1,3]$ έχουμε $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) = u_o$ με $u_o \in (-3,3]$. Αν $u_o \ne 1$ $\lim_{x \to x_o} f(f(x)) = \lim_{u \to u_o} f(u) = f(u_o) = f(f(x_o))$ άρα η $f \circ f$ είναι συνεχής. Από το (γ) έχουμε ότι $u_o \ne 1$ για $x_o \in (-3,-1) \cup (1,2) \cup (2,3]$.

Αν $x \in (-1,1)$ τότε $(f \circ f)(x)=1$ είναι συνεχής ως σταθερή. Αν $x_o=-1$

$$\lim_{x \to -1} f(f(x)) = \lim_{u \to 1} f(u) = 1 = f(f(-1))$$

Αν $x_o=1$, τότε $\lim_{x \to 1^+} f(f(x)) = \lim_{u \to 2} f(u) = 1 = f(f(1))$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(f(x)) = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1 = f(f(1))$$

οπότε $\lim_{x \to 1} f(f(x)) = f(f(1))$.

Αν $x_o=2$, τότε $\lim_{x \to 2} f(f(x)) = \lim_{u \to 1^+} f(u) = 2$ και $f(f(2))=f(1)=1$ οπότε $\lim_{x \to 2} f(f(x)) \ne f(f(2))$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $(-3,2) \cup (2,3]$.

ε) Αν $-3 < x_1 < x_2 \le -1-\sqrt{2}$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \le -1 \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

άρα η $f \circ f$ γνησίως αύξουσα στο $(-3,-1-\sqrt{2}]$.

Αν $-1-\sqrt{2} \le x_1 < x_2 \le 1$ ισχύει

$$-1 \le f(x_1) \le f(x_2) \le 1 \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = 1$$

επομένως η $f \circ f$ είναι σταθερή στο $[-1-\sqrt{2},1]$.

Αν $1 < x_1 < x_2 < 2$ ισχύει

$$2 > f(x_1) > f(x_2) > 1 \Rightarrow 1 < f(f(x_1)) < f(f(x_2)).$$

Επίσης αν $1 = x_1 < x_2 < 2$

$$1 = f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

άρα $f \circ f$ γνησίως αύξουσα στο $[1,2)$.

Αν $2 < x_1 < x_2 \le \frac{5}{2}$ ισχύει

$$1 < f(x_1) < f(x_2) \le 2 \Rightarrow f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \ge 1$$

άρα $f \circ f$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(2,\frac{5}{2}\right]$.

Αν $\frac{5}{2} \le x_1 < x_2 \le 3$ ισχύει

$$2 \le f(x_1) < f(x_2) \le 3 \Rightarrow 1 \le f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

άρα $f \circ f$ γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2},3\right]$.

στ) Επειδή η f έχει ακριβώς μια ρίζα, διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $\Delta_1 = (-3,-1-\sqrt{3})$, $\Delta_2 = (-1-\sqrt{3},2)$ και $\Delta_3 = (2,3]$.

Έχουμε $\lim_{x \to -3^+} f(f(x)) = \lim_{u \to -3^+} f(u) = -3$. Τότε $f(x)<0$ κοντά στο $x_o=-3$ άρα $f(x)<0$ στο $\Delta_1 = (-3,-1-\sqrt{3})$. $0 \in \Delta_2$ και $f(f(0))=1$ άρα $f(x)>0$ στο Δ_2. Επίσης $f(f(2))=1>0$. $3 \in \Delta_3$ και $f(f(3))=3$ άρα $f(x)>0$ στο Δ_3. Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε $f(x)<0$ για $x \in (-3,-1-\sqrt{3})$ και $f(x)>0$ για $x \in (-1-\sqrt{3},3]$.

Β΄ Τρόπος: Η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-3,-1-\sqrt{2}]$ κι έχουμε

$$x < -1-\sqrt{3} \Leftrightarrow (f \circ f)(x) < (f \circ f)(-1-\sqrt{3})$$

Τότε $(f \circ f)(x) < 0$. Η $f \circ f$ είναι σταθερή στο διάστημα $[-1-\sqrt{2},1]$ με $(f \circ f)(x) = 1 > 0$. Η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,2)$, άρα $(f \circ f)(x) \ge (f \circ f)(1) = 1 > 0$. Η $f \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(2,\frac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2},3\right]$ άρα $(f \circ f)(x) \ge (f \circ f)\left(\frac{5}{2}\right) = 1 > 0$, $x \in (2,3]$. Επίσης $(f \circ f)(2)=1>0$. Συνοψίζοντας $f(x)<0$ για $x \in (-3,-1-\sqrt{3})$ και $f(x)>0$ για $x \in (-1-\sqrt{3},3]$.