Διαφορετικές οπτικές ενός βασικού θέματος

Από τον **Γιώργο Σ. Τασσόπουλο**

Το θέμα που θα πραγματευτούμε είναι η εύρεση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης μεταξύ των συντελεστών ενός τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ώστε οι ρίζες του x_1, x_2 να ικανοποιούν μια συγκεκριμένη σχέση.

Οι πλέον βολικές περιπτώσεις προκύπτουν όταν η σχέση είναι $1^{ου}$ βαθμού ή συμμετρική ως προς τις ρίζες.

Ας θεωρήσουμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-3x+\lambda$ και ας απαιτήσουμε αρχικά: Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει κάποια από τις παρακάτω σχέσεις:

α) $2x_1+x_2=5$ **(1)**

β) $\lambda x_1+x_2=5$ **(2)**

γ) $3\left(x_1^2+x_2^2\right)+5x_1^2x_2+5x_1x_2^2=45$ **(3)**

Λύση

α) Με την προϋπόθεση ότι $\alpha\neq 0$, $\Delta\geq 0$, δηλαδή $9-4\lambda\geq 0$ έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x_1+x_2=5\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2\\ x_2=1\\ \lambda=2\end{matrix}\right\},$$

δεκτή τιμή του λ, αφού τότε $\Delta=9-4\lambda=9-4\cdot 2=1>0$

β) $$(2)\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda x_1+x_2=5\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} (\lambda-1)x_1=2\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{2}{\lambda-1}\\ x_2=3-\dfrac{2}{\lambda-1}\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{2}{\lambda-1}\\ x_2=\dfrac{3\lambda-5}{\lambda-1}\\ \dfrac{2}{\lambda-1}\cdot\dfrac{3\lambda-5}{\lambda-1}=\lambda \quad (\mathrm{i})\end{matrix}\right\}(\mathrm{i})\Leftrightarrow \frac{2}{\lambda-1}\cdot\frac{3\lambda-5}{\lambda-1}=\lambda\Leftrightarrow$$

$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+10=0\Leftrightarrow(\lambda-2)\left(\lambda^2-5\right)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\lambda\in\left\{2,\sqrt{5},-\sqrt{5}\right\}$, δεκτές τιμές αφού ικανοποιούν την $9-4\lambda\geq 0$.

γ) $$(3)\Leftrightarrow 3\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+$$
$$+5x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=45\Leftrightarrow$$
$$3(9-2\lambda)+5\cdot\lambda\cdot 3=45\Leftrightarrow\lambda=2.$$

δ) Στη συνέχεια ας απαιτήσουμε οι ρίζες να ικανοποιούν μια σχέση μεγαλύτερου βαθμού (μη συμμετρική), π.χ. την $\dfrac{2}{7}x_1^{\,3}+x_2=\dfrac{23}{7}$ (4), με $\lambda\in\mathbb{Q}$

α΄ τρόπος (ίδιος με τον προηγούμενο)

$$(4)\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{2}{7}x_1^{\,3}+x_2=\dfrac{23}{7}\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{2}{7}x_1^{\,3}+3-x_1=\dfrac{23}{7}\\ x_2=3-x_1\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \left(x_1-2\right)\left(2x_1^{\,2}+4x_1+1\right)=0\\ x_2=3-x_1\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x_1=2 \text{ ή } x_1=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}\\ x_2=3-x_1\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2\\ x_2=1\\ \lambda=2\end{matrix}\right\}.$$

Αν $x_1\neq 2$, τότε $x_1\cdot x_2=\lambda\Rightarrow\lambda\notin Q$.

β΄ τρόπος

Εκτελώντας τη διαίρεση $x^3:\left(x^2-3x+\lambda\right)$ βρίσκουμε

$x^3=\left(x^2-3x+\lambda\right)\cdot\left(x+3\right)+\left(9-\lambda\right)x-3\lambda$ για κάθε $x\in R$.

Άρα $x_1^3=\left(x_1^2-3x_1+\lambda\right)\cdot\left(x_1+3\right)+$

$+\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda=$

$=0\cdot\left(x_1+3\right)+\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda=\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda$

Ομοίως $x_2^3=\left(9-\lambda\right)x_1^2-3\lambda$.

Ανάγεται λοιπόν στη μορφή (β).

Έτσι έχουμε

$$(3)\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\frac{2}{7}\left[\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda\right]+x_2=\frac{23}{7}\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_1+x_2=\frac{23+6\lambda}{7}\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\left(11-2\lambda\right)x_1=2+6\lambda\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\overset{\lambda\neq\frac{11}{2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{c}x_1=\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\\ x_2=3-\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}x_1=\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\\ x_2=\frac{31-12\lambda}{11-2\lambda}\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}$$

Αλλά: $x_1\cdot x_2=\lambda\Leftrightarrow\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\cdot\frac{31-12\lambda}{11-2\lambda}=\lambda\Leftrightarrow$

$4\lambda^3+28\lambda^2-41\lambda-62=0\Leftrightarrow$

$\left(\lambda-2\right)\left(4\lambda^2+36\lambda+31\right)=0\Leftrightarrow\lambda=2\in Q$,

αφού το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=20\sqrt{5}$, δηλαδή άρρητες ρίζες.

- *Αν η σχέση ήταν μεγαλύτερου βαθμού ως προς x_1 ή x_2 π.χ. τετάρτου βαθμού τότε ομοίως εκτελώντας τη διαίρεση* $x^4:\left(x^2-3x+\lambda\right)$ βρίσκουμε

$x^4=\left(x^2-3x+\lambda\right)\left(x^2+3x+9-\lambda\right)+$

$+\left(27-6\lambda\right)x+\lambda^2-9\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$x_i^4=\left(27-6\lambda\right)x_i+\lambda^2-9\lambda$, για $i\in\{1,2\}$

γ΄ τρόπος

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν

($x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$)

ή αντιστρόφως

($x_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$)

ουσιαστικά η σχέση (4) ισοδυναμεί με

$$\frac{2}{7}x_1^3+x_2=\frac{23}{7}\ \text{ή}\ \frac{2}{7}x_2^3+x_1=\frac{23}{7},$$

δηλαδή με

$$\left(\frac{2}{7}x_1^3+x_2-\frac{23}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}x_2^3+x_1-\frac{23}{7}\right)=0\quad(I)$$

Έχουμε: $(I)\Leftrightarrow\frac{4}{49}\left(x_1\cdot x_2\right)^3-\frac{23}{7}\left(x_1+x_2\right)+$

$+\frac{2}{7}\left(x_1^4+x_2^4\right)-\frac{46}{49}\left(x_1^3+x_2^3\right)+$

$+x_1\cdot x_2+\frac{529}{49}=0$.

Αλλά $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-$

$-3x_1\cdot x_2\left(x_1+x_2\right)=27-9\lambda$,

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2=9-2\lambda,$

$x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2\left(x_1\cdot x_2\right)^2=$

$=\left(9-2\lambda\right)^2-2\lambda^2=2\lambda^2-36\lambda+81$

Οπότε: $(I)\Leftrightarrow\frac{4}{49}\lambda^3-\frac{23}{7}\cdot3+\frac{2}{7}\left(2\lambda^2-36\lambda+81\right)-$

$-\frac{46}{49}\left(27-2\lambda\right)+\lambda+\frac{529}{49}=0\Leftrightarrow\ldots$

$4\lambda^3+28\lambda^2-41\lambda-62=0$ κλπ.

- *Εντελώς όμοια θα μπορούσαμε να έχουμε:* $(1)\Leftrightarrow\left(2x_1+x_2-5\right)\left(2x_2+x_1-5\right)=0$ *καθώς και* $(2)\Leftrightarrow\left(\lambda x_1+x_2-5\right)\left(\lambda x_2+x_1-5\right)=0$ *κ.λ.π.*

Όσον αναφορά στη σχέση (4) που είναι τρίτου βαθμού ως προς x_1,x_2 συμφέρει να αναχθεί πρώτα στην πρωτοβάθμια ως προς x_1,x_2 σχέση

$$\left[\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_1+x_2-\frac{23+6\lambda}{7}\right]=0$$

και στη συνέχεια στην

$$\left[\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_1+x_2-\frac{23+6\lambda}{7}\right]\cdot$$

$$\left[\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_2+x_1-\frac{23+6\lambda}{7}\right]=0$$

αντί της (I) που είναι μεγαλύτερου βαθμού ως προς x_1, x_2.

Τελικά συμφερότερος είναι ο δεύτερος τρόπος, αφού ανάγει όλες τις σχέσεις σε πρωτοβάθμιες.