

## Άλγεβρα Β' Λυκείου.

N. Χιωτέλης - 1<sup>ο</sup> ΓΕΛ Αθηνών

Η ύλη της Άλγεβρας της Α' Λυκείου δίνει την δυνατότητα της εξοικείωσης των μαθητών με τις έννοιες της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού της και του συνόλου τιμών της καθώς και με τις έννοιες της μονοτονίας και των ακρότατων. Στα παρακάτω παραδείγματα αποφεύγονται οι πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις καθώς ο στόχος είναι η κατανόηση των εννοιών.

### Άσκηση 1<sup>η</sup>

Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \alpha + \beta \sqrt{x^2 + 2x + |\lambda - 1|}$$

όπου  $\alpha, \beta, \lambda$  είναι πραγματικοί αριθμοί.

i) Να δείξετε ότι  $\beta \neq 0$ .

ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

iii) Για  $\lambda=2$  να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς ριζικά και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε η γραφική παράσταση να διέρχεται από τα σημεία A(0,1) και B(1,3).

### Λύση.

i) Δουλεύουμε με απαγωγή σε άτοπο. Αν  $\beta=0$  τότε η συνάρτηση είναι σταθερή με τύπο  $f(x)=\alpha$ , που είναι αντίθετο με την υπόθεση, δηλαδή άτοπο. Άρα  $\beta \neq 0$ .

ii) Πρέπει και αρκεί για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει:

$$x^2 + 2x + |\lambda - 1| \geq 0, \text{ δηλαδή } \Delta \leq 0,$$

όπου  $\Delta$  η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου, αφού ο συντελεστής του  $x^2$  είναι θετικός.

Αλλά:

$$\begin{aligned} \Delta \leq 0 &\Leftrightarrow 4 - 4|\lambda - 1| \leq 0 \Leftrightarrow |\lambda - 1| \geq 1 \Leftrightarrow \\ &\lambda - 1 \geq 1 \text{ ή } \lambda - 1 \leq -1 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \end{aligned}$$

iii) Για  $\lambda=2$  η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \alpha + \beta \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \alpha + \beta \sqrt{(x+1)^2} = \alpha + \beta |x+1|$$

Στη συνέχεια πρέπει και αρκεί  $f(0)=1, f(1)=3$ .

Οι σχέσεις αυτές οδηγούν στο σύστημα:

$$1 = \alpha + \beta, 3 = \alpha + 2\beta$$

Με λύση  $\alpha = -1, \beta = 2$ .

### Άσκηση 2<sup>η</sup>

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$g(x) = \sqrt[3]{x^4}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς τη χρήση του συμβόλου του ριζικού αλλά χρησιμοποιώντας ρητό εκθέτη.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

### Λύση.

i) Το πεδίο ορισμού αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  που ικανοποιούν τη συνθήκη  $x^4 \geq 0$ . Άρα  $A_g = \mathbb{R}$ .

ii) Αφού  $|x|^4 = x^4$  η συνάρτηση γράφεται

$$g(x) = \sqrt[3]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{3}}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απόλυτης τιμής ο τύπος της συνάρτησης μπορεί να γραφτεί απαλλαγμένος από την απόλυτη τιμή  $g(x) = x^{\frac{4}{3}}$  για  $x \geq 0$  και  $g(x) = (-x)^{\frac{4}{3}}$  για  $x < 0$ .

iii) Έστω  $0 \leq x_1 < x_2$ , τότε  $x_1^{\frac{4}{3}} < x_2^{\frac{4}{3}}$  και επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .

Αν  $x_1 < x_2 \leq 0$ , τότε  $-x_1 > -x_2 \geq 0$  και επομένως  $(-x_1)^{4/3} > (-x_2)^{4/3}$ . Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ .

Από τη συμπεριφορά της καταλαβαίνουμε ότι η συνάρτηση εμφανίζει την ελάχιστη τιμή της μόνο για  $x=0$ . Η ελάχιστη αυτή τιμή είναι,  $g_{\min} = g(0) = 0$ .

### Άσκηση 3<sup>η</sup>

Ένα σύρμα μήκους 8 μέτρων κόβεται σε δύο κομμάτια.

Το ένα κομμάτι έχει μήκος  $x$  μέτρα. Λυγίζοντας κατάλληλα το κάθε κομμάτι κατασκευάζουμε δύο τετράγωνα.

**i)** Να γράψετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή  $x$ .

**ii)** Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων δίνεται από την συνάρτηση:

$$E(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 4,$$

και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**iii)** Να εξηγήσετε για πιο λόγο η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία η  $E$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $E$ .

**iv)** Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του  $x$  ώστε το άθροισμα των εμβαδών να ισούται με 5 τετραγωνικά μέτρα.

#### Λύση.

**i)** Το ένα κομμάτι έχει μήκος  $x$  με  $x \in (0, 8)$ , οπότε το άλλο θα έχει μήκος  $8 - x$ , (προφανώς τότε και  $0 < 8 - x < 8$ ).

**ii)** Με το κομμάτι μήκους  $x$  κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο που έχει περίμετρο  $x$  άρα πλευρά  $x/4$  και επομένως εμβαδόν  $E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$ .

Όμοια το εμβαδόν του τετραγώνου που κατασκευάζεται από το άλλο κομμάτι μήκους  $8 - x$ , είναι

$$E_2 = \left(\frac{8-x}{4}\right)^2.$$

Τελικά το άθροισμα των εμβαδών δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο,

$$E(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = \frac{2x^2 - 16x + 64}{16} = \frac{1}{8}x^2 - x + 4,$$

με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(0, 8)$  όπως εξηγήθηκε στο ερώτημα I.

**iii)** Η παραπάνω συνάρτηση έχει τη μορφή παραβολής. Επειδή ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι θετικός ( $1/8$ ), γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή. Συγκεκριμένα η κορυφή της  $K$  έχει συντεταγμένες

$$K\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right).$$

Στη δική μας περίπτωση έχουμε  $\frac{-\beta}{2\alpha} = 4$  και  $\frac{-\Delta}{4\alpha} = 2$ .

Άρα το ελάχιστο της συνάρτησης εμφανίζεται για  $x=4$ .

Τα κομμάτια τότε είναι ίσα με μήκη  $x=4$ ,  $8-x=4$  και το συνολικό εμβαδόν τους είναι 2 (σε τετραγωνικά μέτρα).

**iv)** Στο  $(0, 8)$  έχουμε:

$$E(x) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{8}x^2 - x + 4 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{6}$$

Όμως  $4 - 2\sqrt{6} < 0$  και  $4 + 2\sqrt{6} > 8$ .

Επομένως καμιά από τις τιμές αυτές δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Συνεπώς δεν υπάρχουν τιμές του  $x$  τέτοιες ώστε  $E(x)=5$ .