Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα Προσανατολισμού

Σαράφης Γιάννης
Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί Θεσσαλονίκης

Οι ασκήσεις που ακολουθούν αναφέρονται στο κεφάλαιο των Διανυσμάτων και στην Εξίσωση Ευθείας. Πριν από τη λύση κάθε άσκησης υπάρχουν κάποιες σκέψεις οι οποίες μας βοηθάνε στην επίλυσή της.

Άσκηση 1η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ του επιπέδου τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$. Δίνεται $|\overrightarrow{B\Delta}|=|\overrightarrow{AB}|=4$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}|=4\sqrt{3}$.

i) **Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι μέσο του ΑΓ.**

ii) **Να αποδείξετε ότι $A\hat{B}\Gamma=90^\circ$.**

iii) **Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$.**

iv) **Έστω διάνυσμα $\vec{\delta}=(3,-1)$ και η κορυφή Α(2,1). Αν ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{\delta}$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.**

Λύση

Σκέψεις…

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Για να είναι $A\hat{B}\Gamma=90^\circ$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0$. Η γωνία των $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$ θα προκύψει από τον τύπο

$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}}{|\overrightarrow{\Gamma B}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma A}|}$. Θέτουμε $\Delta(x,y)$ και αντικαθιστούμε στην σχέση που δίνεται.

i) Ενδείκνυται να θεωρήσουμε ως σημείο αναφοράς το Δ. Οπότε $\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Rightarrow$
$\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{\Delta B}+2\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}=\vec{0}\Rightarrow$
$\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

ii) Έχουμε $\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{B\Delta}$.

Έτσι προκύπτει $\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(2\overrightarrow{B\Delta}\right)^2\Rightarrow$

$\overrightarrow{B\Gamma}^2+2\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}^2=4\overrightarrow{B\Delta}^2\Rightarrow$

$48+2\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+16=64\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

iii) Θα υπολογίσουμε την γωνία από την σχέση

$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}}{|\overrightarrow{\Gamma B}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma A}|}$. Έχουμε:

$\overrightarrow{\Gamma A}^2=\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}^2=$

$16+48=64$, οπότε $|\overrightarrow{\Gamma A}|=8$

$\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma B}^2=48$

Άρα $\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\dfrac{48}{4\sqrt{3}\cdot 8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, διότι $0\le\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)\le\pi$.

(Μπορούμε να το αποδείξουμε και γεωμετρικά)

iv) Έστω Δ(x,y), οπότε $\overrightarrow{A\Delta}=(x-2,y-1)$.

$\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{\delta}\Rightarrow(x-2,y-1)=\frac{1}{3}(3,-1)\Rightarrow$

$\begin{cases}x-2=1\\ y-1=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$. Άρα $\Delta\left(3,\frac{2}{3}\right)$.

Άσκηση 2η

i) **Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$, όπου $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$.**

ii) **Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε να ισχύουν: $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{5}=|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}=\lambda$.**

α) **Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.**

β) **Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ ως συνάρτηση του λ.**

γ) **Έστω διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν $\vec{x}//\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ και $\left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.**

Λύση

Σκέψεις…

Για να είναι δύο διανύσματα αντίρροπα αρκεί να σχηματίζουν γωνία 180°. Εξάλλου για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0$, ενώ: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

i) Έστω φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Έχουμε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|^2\Leftrightarrow$

$$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}^2-2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|+\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$
$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συνφ}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$$
$$\text{συνφ}=-1 \Leftrightarrow \varphi=\widehat{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}=\pi \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}.$$

ii) Έχουμε $|\vec{\alpha}|=5\lambda$, $|\vec{\gamma}|=3\lambda$

α) Για να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα θα αξιοποιήσουμε το ερώτημα (i).

Από τη σχέση $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ έχουμε

$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=2\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=2|\vec{\beta}|=2\lambda$

$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\gamma}|\big|=|5\lambda-3\lambda|=2|\lambda|=2\lambda$

Άρα $|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\gamma}|\big|$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα.

β) $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}| \Rightarrow$

$|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=|\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=5\lambda^2$

$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=2\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=|2\vec{\beta}| \Rightarrow$

$|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|^2=|2\vec{\beta}|^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=4\vec{\beta}^2 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma}=-15\lambda^2$

Όμοια $\vec{\beta}\vec{\gamma}=-3\lambda^2$.

Άρα: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}=5\lambda^2-3\lambda^2-15\lambda^2=-13\lambda^2$

γ) Έχουμε: $\vec{x}\,//\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) \Rightarrow \vec{x}=\kappa\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

$\left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right) \Rightarrow \left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)=0 \Rightarrow$

$\left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\beta}\right)=0 \Rightarrow 2\vec{\beta}\vec{x}-2\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow$

$2\vec{\beta}\kappa\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)-2\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow 2\lambda^2\kappa-6\lambda^2\kappa-2\lambda^2=0 \Rightarrow$

$\kappa=-\frac{1}{2}$. Άρα $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{\gamma}$

Άσκηση 3η

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-5x+5y+6=0$.

i) **Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

ii) **Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω ευθείες με τον άξονα x΄x.**

iii) **Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ε_1) και (ε_2).**

iv) **Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).**

Λύση

Σκέψεις…

Η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς $t=x-y$ οπότε θα βρούμε την διακρίνουσα. Για να είναι οι ευθείες παράλληλες θα πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα x΄x υπολογίζεται από τον συντελεστή διεύθυνσης. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της απόστασης δύο απέναντι πλευρών του. Για να βρούμε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης αξιοποιούμε την ιδιότητα ότι ισαπέχει από τις δύο παράλληλες ευθείες.

i) Έχουμε $x^2+y^2-2xy-5x+5y+6=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-5(x-y)+6=0$ (1)

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς t=x–y με διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot 6=1>0$

Επομένως, $(1) \Leftrightarrow x-y=\frac{5\pm 1}{2} \Leftrightarrow$ x–y=2 ή x–y=3.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες τις $\varepsilon_1: x-y-2=0$ και $\varepsilon_2: x-y-3=0$. Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού $\lambda_1=\lambda_2=1$.

Β΄ Τρόπος (Γενικότερος):

$(1) \Leftrightarrow x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6=0 \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2+y^2+5y+6-\left(\frac{2y+5}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x-\frac{2y+5}{2}=\frac{1}{2}$ ή $x-\frac{2y+5}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x-y-3=0$ ή $x-y-2=0$

ii) Έστω ω η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με τον άξονα x΄x. Τότε έχουμε

$\lambda=\text{εφω} \Rightarrow \text{εφω}=1 \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{4}$, διότι $\omega\in[0,\pi)$.

iii) Το σημείο Α(2,0) ανήκει στην ευθεία (ε_1).

Η πλευρά α του τετραγώνου είναι

$$\alpha=d(A,\varepsilon_2)=\frac{|2-0-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\alpha^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

iv) Έστω $M(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο της μεσοπαράλληλης (δ) των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Έχουμε $M\in(\delta) \Leftrightarrow d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_0-y_0-3|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$x_0-y_0-2=x_0-y_0-3$ ή $x_0-y_0-2=-x_0+y_0+3\Leftrightarrow$

$2x_0–2y_0–5=0 \Leftrightarrow x_0-y_0=\frac{5}{2}$.

Άρα η μεσοπαράλληλη (δ) έχει εξίσωση $x-y=\frac{5}{2}$

Άσκηση 4η

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με Α(–1,3). Μια πλευρά του ορίζει ευθεία με εξίσωση x–2y+3=0. Να βρείτε:

i) Τις εξισώσεις των ευθειών που ορίζουν οι άλλες πλευρές του τετραγώνου.

ii) Σημείο της ευθείας ΑΔ το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Μ(3,1) και Λ(–2,–1).

iii) Την οξεία γωνία που δημιουργείται από το διάνυσμα $\vec{\delta}=(-3,1)$ και την ευθεία ΔΓ.

Λύση

Σκέψεις…

Αξιοποιούμε τις ιδιότητες του τετραγώνου. Δηλαδή οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, οι διαδοχικές πλευρές είναι κάθετες και όλες οι πλευρές είναι ίσες. Το μήκος της πλευράς υπολογίζεται με δύο τρόπους είτε από την απόσταση σημείου από σημείο είτε από την απόσταση σημείου από ευθεία.

i) Ελέγχουμε αν το σημείο Α είναι σημείο της ευθείας x–2y+3=0. Επειδή –1–6+3≠0, το σημείο Α δεν είναι σημείο της ευθείας x–2y+3=0. Άρα η ευθεία x–2y+3=0 ταυτίζεται με την ευθεία ΔΓ ή την ευθεία ΒΓ. Έστω ότι η εξίσωση x–2y+3=0 παριστάνει την πλευρά ΔΓ. Τότε έχουμε: ΑΒ//ΔΓ⇒ $\lambda_{AB}=\lambda_{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}$. Οπότε ΑΒ: $y-3=\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow AB: x–2y+7=0$.

Εξάλλου: $A\Delta\perp\Delta\Gamma\Rightarrow\lambda_{A\Delta}\cdot\lambda_{\Delta\Gamma}=-1\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\lambda_{A\Delta}=-1$ $\Rightarrow\lambda_{A\Delta}=-2$, οπότε η εξίσωση της ΑΔ είναι y–3=–2(x+1), ή 2x+y–1=0.

Επειδή ΒΓ//ΑΔ, η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση 2x+y+κ=0, κ≠-1.

Αλλά

$$d(A,B\Gamma)=d(A,\Gamma\Delta)\ (i)\Rightarrow\frac{|-2+3+\kappa|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|-1-6+3|}{\sqrt{1+4}}\Rightarrow$$

$|\kappa+1|=4\Rightarrow\kappa=3$ ή $\kappa=-5$.

Η εξίσωση της ΒΓ είναι 2x+y+3=0 ή 2x+y–5=0

- Η σχέση (i) μπορεί να αντικατασταθεί από την $d(A,B\Gamma)=(A\Delta)$, αφού βρεθεί πρώτα το Δ ως σημείο τομής των ΑΔ, ΓΔ.

Ανάλογα εργαζόμαστε όταν η x–2y+3=0 παριστάνει την ΒΓ, οπότε βρίσκουμε: $AB: 2x+y-1=0$ και $\Gamma\Delta: 2x+y+3=0$ ή $\Gamma\Delta: 2x+y-5=0$.

ii) Έστω $K(x_0,y_0)$ σημείο της ΑΔ τέτοιο ώστε $(KM)=(K\Lambda)$. Το σημείο Κ βρίσκεται στην ΑΔ οπότε $2x_0+y_0-1=0$ ή $y_0=-2x_0+1$.

Άρα $K(x_0,-2x_0+1)$.

$(KM)=(K\Lambda)\Leftrightarrow\sqrt{(x_0-3)^2+(1+2x_0-1)^2}=\sqrt{(x_0+2)^2+(-1-1+2x_0)^2}\Leftrightarrow$

$(x_0-3)^2+4x_0{}^2=(x_0+2)^2+4(x_0-1)^2\Leftrightarrow$

$-2x_0=-1\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $K\left(\frac{1}{2},0\right)$.

- Το Κ μπορεί να βρεθεί και ως σημείο τομής της ΑΔ με τη μεσοκάθετο του ΛΜ.

iii) Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{\delta}_1//\Delta\Gamma$, π.χ. το $\vec{\delta}_1=(2,1)$. Έστω $\theta=(\vec{\delta},\vec{\delta}_1)$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\delta}\cdot\vec{\delta}_1}{|\vec{\delta}|\cdot|\vec{\delta}_1|}.$$

Έχουμε: $\vec{\delta}\cdot\vec{\delta}_1=-5$, $|\vec{\delta}|=\sqrt{10}$, $|\vec{\delta}_1|=\sqrt{5}$.

Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{3\pi}{4}$ και η ζητούμενη γωνία είναι $\pi-\theta=\frac{\pi}{4}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Μεθοδική Επανάληψη Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης.
Χαρ. Στεργίου–Χ. Νάκης–Ιωάν. Στεργίου (Εκδόσεις Σαββάλας 2002)

2) Επαναληπτικά Θέματα Μαθηματικών Β Λυκείου.
Αλέξανδρος Τραγανίτης (Εκδόσεις Σαββάλας 2002)

3) Μαθηματικά Προσανατολισμού Β Λυκείου (Εκδόσεις Κανδύλας 2010)

4) Μαθηματικά Β Λυκείου Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών. (Εκδόσεις Μαυρίδη 2016)