

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικά Θέματα Άλγεβρας

Λουκάς Κανάκης, Γιώργος Μαυρίδης – Θεσσαλονίκη

Τα θέματα που ακολουθούν αφορούν στην Τριγωνομετρία στα Συστήματα Α΄ Βαθμού και στα μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων. Φροντίσαμε να αποτελέσει υπόδειξη προς τους μαθητές η αντιμετώπισή τους με τις άκρως απαραίτητες συνθήκες.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Ο αριθμός 1 είναι μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .

iv) Ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

Λύση

i) Έχουμε: $f(x) = \eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x$

$$= (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$= 1^2 - \frac{1}{2}(4\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) = 1 - \frac{1}{2}(2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε: $0 \leq \eta\mu^2 2x \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \geq -\frac{1}{2}\eta\mu^2 2x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}\eta\mu^2 2x \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 2x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Παρατηρούμε ότι $f(0) = \eta\mu^4 0 + \sigma\upsilon\nu^4 0$
 $= 0^4 + 1^4 = 1$.

Επομένως, από τη σχέση του ερωτ. ii) έχουμε $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε, ο αριθμός $f(0) = 1$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .

iv) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι ο αριθμός 0 είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . Τότε, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$.

Οπότε, από τη σχέση του ερωτήματος i) έχουμε

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 2x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\eta\mu^2 2x_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 2x_0 = 2$$

$$\Rightarrow \eta\mu 2x_0 = \sqrt{2} > 1 \text{ ή } \eta\mu 2x_0 = -\sqrt{2} < -1,$$

που είναι άτοπο, αφού $-1 \leq \eta\mu 2x_0 \leq 1$.

Άρα, η υπόθεσή μας, δηλαδή ότι ο αριθμός 0 είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f ήταν εσφαλμένη και συνεπώς ο αριθμός 0 δεν είναι η ελάχιστη τιμή της f .

• Η λύση αυτή είναι ανεξάρτητη από τα ερωτήματα (i), (ii). Με βάση αυτά η απάντηση είναι άμεση αφού $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) > 0$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση και να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{7\pi}{11}\right)$ και $f\left(\frac{11\pi}{13}\right)$.

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = 1$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$.

Λύση

i) • Οι τιμές της συνάρτησης

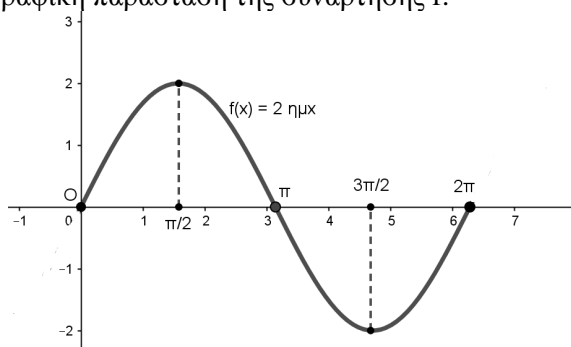
$$f(x) = 2\eta\mu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

είναι διπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $\eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$. Οπότε, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2 max	0	-2 min	0

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Επίσης, παρουσιάζει για $x = \frac{\pi}{2}$ ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ και για $x = \frac{3\pi}{2}$ ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

Με βάση τον παραπάνω πίνακα, προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :



- Παρατηρούμε ότι οι τιμές $\frac{7\pi}{11}$ και $\frac{11\pi}{13}$ ανήκουν στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Αρχικά συγκρίνουμε μεταξύ τους τις τιμές $\frac{7\pi}{11}$ και $\frac{11\pi}{13}$. Έχουμε: $\frac{7\pi}{11} - \frac{11\pi}{13} = \frac{91\pi - 121\pi}{11 \cdot 13} = -\frac{30\pi}{143} < 0$. Επομένως, $\frac{7\pi}{11} < \frac{11\pi}{13}$ και συνεπώς $f\left(\frac{7\pi}{11}\right) > f\left(\frac{11\pi}{13}\right)$, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

ii) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ συμπίπτει με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = a$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Καθώς το a κινείται από το $-\infty$ προς το $+\infty$ πάνω στον άξονα y ' y παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = a$:

- Δεν έχει κοινά σημεία με την C_f αν $a < -2$
- Έχει ένα κοινό σημείο με την C_f αν $a = -2$
- Έχει δύο κοινά σημεία με την C_f αν $-2 < a < 0$
- Έχει τρία κοινά σημεία με την C_f αν $a = 0$

- Έχει δύο κοινά σημεία με την C_f αν $0 < a < 2$
- Έχει ένα κοινό σημείο με την C_f αν $a = 2$
- Δεν έχει κοινό σημείο με την C_f αν $a > 2$. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = a$:
- Είναι αδύνατη αν $a < -2$ ή $a > 2$
- Έχει ακριβώς μία ρίζα αν $a = -2$ ή $a = 2$
- Έχει ακριβώς δύο ρίζες αν $-2 < a < 0$ ή $0 < a < 2$
- Έχει ακριβώς τρεις ρίζες αν $a = 0$.

iii) Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 1$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 1$. Έχουμε λοιπόν $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αναζητούμε ποιες από τις παραπάνω τιμές του x ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Σχετικά με

τις τιμές $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12}.$$

Και επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 0$ και αντιστοίχως $x_1 = \frac{\pi}{6}$.

Σχετικά με τις τιμές $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12}.$$

Και επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 0$ και αντιστοίχως $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Επομένως, τα κοινά σημεία

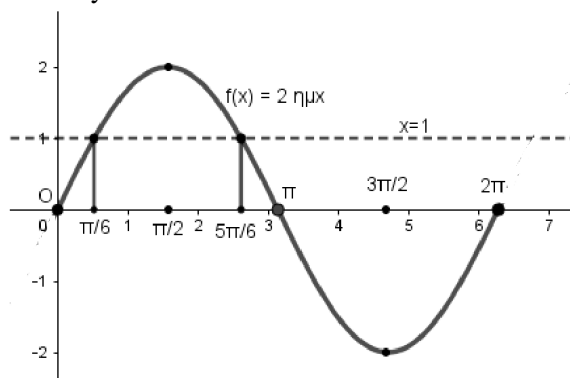
της C_f με την ευθεία $y = 1$ είναι τα σημεία

$$A\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \text{ και } B\left(\frac{5\pi}{6}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Δηλαδή τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{6}, 1\right)$.

iv) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=1$.



Έχουμε λοιπόν $f(x) < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{5\pi}{6} < x \leq 2\pi$.

Άσκηση 3

Δίνονται τα συστήματα
$$\begin{cases} \lambda x + y = 4 \\ x + (\lambda^4 - 2)y = 2\lambda \end{cases}$$
 και
$$\begin{cases} \lambda^2 x - 3y = \lambda - 1 \\ x + (1 - \lambda^3)y = 3, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

με αντίστοιχες ορίζουσες D και D' .

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $D + D'$.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.

iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $D + D' = 1$, να αποδείξετε ότι τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Λύση

i) Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^4 - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^4 - 2) - 1 \cdot 1 = \lambda^5 - 2\lambda - 1$

και $D' = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -3 \\ 1 & 1 - \lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda^2(1 - \lambda^3) - 1 \cdot (-3) = \lambda^2 - \lambda^5 + 3$.

Οπότε: $D + D' = (\lambda^5 - 2\lambda - 1) + (\lambda^2 - \lambda^5 + 3) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Παρατηρούμε ότι $D + D' = (\lambda - 1)^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ μία τουλάχιστον από τις ορίζουσες D και D' είναι διαφορετική του μηδενός και συνεπώς ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.

iii) Έχουμε

$$D + D' = 1 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Για $\lambda = 1$ το πρώτο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Για $\lambda = 1$ το δεύτερο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda = 1$ τα δύο συστήματα έχουν την ίδια μοναδική λύση $(x, y) = (3, 1)$ και συνεπώς είναι ισοδύναμα.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x - \sin^2 x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{4}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \leq \frac{1}{4} \quad \text{για κάθε } x \in [0, 2\pi].$$

iii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4f(x) = 1 + \eta\mu^4 x$ (I)

είναι αδύνατη.

Λύση

i) Έχουμε: $f(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 4\sin x - 4\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή $x \in [0, 2\pi]$, συμπεραίνουμε ότι

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

ii) Για την $f(x) \leq \frac{1}{4}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$4f(x) \leq 1^1, \quad \text{ή} \quad 4\sin x - 4\sin^2 x \leq 1,$$

$$\text{ή} \quad 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 \geq 0, \quad \text{ή} \quad (2\sin x - 1)^2 \geq 0$$

που ισχύει. Αλλά και συνθετικά:

$$\frac{1}{4} - f(x) = \dots = \frac{(2\sin x - 1)^2}{4} \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{4}$$

iii) Αποδείξαμε ότι $f(x) \leq \frac{1}{4} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Άρα το $\frac{1}{4}$

είναι ελάχιστη τιμή της f την οποία παρουσιάζει σε μια μόνο θέση ακόμη την $\frac{5\pi}{3}$

iv) Αποδείξαμε ότι $4f(x) \leq 1$ (1) για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ και προφανώς $g(x) \geq 1$ (2) για κάθε

¹ Συμβολικά $f(x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \dots$

$x \in \mathbb{R}$. Μοναδική περίπτωση λοιπόν να ισχύει η (I) είναι να ισχύουν οι (1), (2) συγχρόνως ως ισότητες για κάποιο $x \in [0, 2\pi]$. Αλλά στο $[0, 2\pi]$

βρήκαμε: $4f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ ενώ για

$x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ έχουμε $g(x) = 1 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 > 1$. Άρα

η (I) είναι αδύνατη.

- Φυσικά θα μπορούσαμε αντ' αυτού να βρούμε ότι η (2) ισχύει ως ισότητα στο $[0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$ μόνο για $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$ και στη συνέχεια ότι για κάθε $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$ ισχύει $4f(x) < 1$.

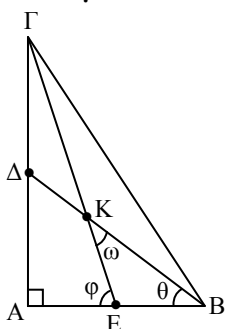
Καθώς επίσης να βρούμε τα σύνολα λύσεων

$L_1 = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ και $L_2 = \{0, \pi, 2\pi\}$ των

$4f(x) = 1$, $g(x) = 1$ αντιστοίχως και να δείξουμε ότι $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Έτσι όμως επιφορτιζόμαστε με τη λύση μιας ακόμη εξίσωσης η οποία πιθανόν να είναι δυσκολότερη.

Άσκηση 5

Στο σχήμα φαίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και οι διάμεσοί του ΒΔ και ΓΕ.



Να αποδείξετε ότι:

i) $\epsilon\phi\omega = 2\epsilon\phi B$ και $\epsilon\phi\theta = \frac{1}{2}\epsilon\phi B$

ii) $\epsilon\phi\omega = \frac{3\epsilon\phi B}{2 + 2\epsilon\phi^2 B}$

iii) $\epsilon\phi\omega \leq \frac{3}{4}$

iv) Η γωνία ω γίνεται μέγιστη, όταν και μόνο το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

i) Έχουμε $\epsilon\phi B = \frac{AG}{AB}$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{AG}{AE} = \frac{AG}{\frac{1}{2}AB} = 2 \frac{AG}{AB} = 2\epsilon\phi B$$

$$\text{Και } \epsilon\phi\theta = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AG}{AB} = \frac{1}{2} \frac{AG}{AB} = \frac{1}{2} \epsilon\phi B.$$

ii) Στο τρίγωνο EBK έχουμε $\hat{\phi} = \hat{E}_{\epsilon\zeta} = \hat{\omega} + \hat{\theta}$.

Επομένως, $\hat{\omega} = \hat{\phi} - \hat{\theta}$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \epsilon\phi\omega &= \epsilon\phi(\phi - \theta) = \frac{\epsilon\phi\phi - \epsilon\phi\theta}{1 + \epsilon\phi\phi \cdot \epsilon\phi\theta} \\ &= \frac{2\epsilon\phi B - \frac{1}{2}\epsilon\phi B}{1 + 2\epsilon\phi B \cdot \frac{1}{2}\epsilon\phi B} = \frac{\frac{3}{2}\epsilon\phi B}{1 + \epsilon\phi^2 B} \\ &= \frac{3\epsilon\phi B}{2(1 + \epsilon\phi^2 B)} = \frac{3\epsilon\phi B}{2 + 2\epsilon\phi^2 B}. \end{aligned}$$

iii) Για την $\epsilon\phi\omega \leq \frac{3}{4}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{3\epsilon\phi B}{2 + 2\epsilon\phi^2 B} \leq \frac{3}{4}, \text{ ή } 12\epsilon\phi B \leq 6 + 6\epsilon\phi^2 B,$$

$$\text{ή } 2\epsilon\phi B \leq 1 + \epsilon\phi^2 B, \text{ ή } 1 + \epsilon\phi^2 B - 2\epsilon\phi B \geq 0,$$

$$\text{ή } (1 - \epsilon\phi B)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει. Αλλά και συνθετικά}$$

$$\frac{3}{4} - \epsilon\phi\omega = \dots = \frac{6(\epsilon\phi B - 1)^2}{2 + 2\epsilon\phi^2 B} \geq 0$$

iv) Επειδή η $\epsilon\phi\omega$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0^\circ, 90^\circ)$, η γωνία ω θα γίνει μέγιστη αν και μόνον

$$\text{αν η } \epsilon\phi\omega \text{ γίνει μέγιστη, δηλαδή } \epsilon\phi\omega = \frac{3}{4} \text{ (i).}$$

$$\text{Έχουμε: (i) } \Leftrightarrow (1 - \epsilon\phi B)^2 = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi B = 1$$

$$\Leftrightarrow \hat{B} = 45^\circ, \text{ αφού } 0^\circ < \hat{B} < 90^\circ.$$

Άρα, η γωνία ω γίνεται μέγιστη, όταν και μόνο το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

Σχόλιο: Δοθέντος πλέον ότι $0 < \epsilon\phi\omega \leq \frac{3}{4}$ η

$$\text{εξίσωση } \frac{3x}{2 + 2x^2} = \epsilon\phi\omega \text{ με άγνωστο } x = \epsilon\phi B,$$

δηλαδή η $(2\epsilon\phi\omega)x^2 - 3x + 2\epsilon\phi\omega = 0$, έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 9 - 16\epsilon\phi^2\omega = (3 - 4\epsilon\phi\omega)(3 + 4\epsilon\phi\omega) \geq 0 \text{ και}$$

$$\text{θετικές ρίζες τις } x_1 = \frac{3 + \sqrt{\Delta}}{4\epsilon\phi\omega} \geq 1, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{\Delta}}{4\epsilon\phi\omega} \leq 1$$

με $x_1 x_2 = 1$ (γιατί ;) Αν λοιπόν $\hat{B} \geq \hat{\Gamma}$, τότε

$$\epsilon\phi B = x_1 \text{ και } \epsilon\phi\Gamma = \sigma\phi B = \frac{1}{x_1} = x_2$$

- Ο υπολογισμός των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου συναρτήσεως της γωνίας ω είχε δοθεί ως θέμα στο Ε.Μ.Π. το 1931 και μας είχε

προταθεί για τη στήλη (Θέματα Παλαιότερων εποχών) από το συνάδελφο Τηλέμαχο Μπαλτσαβιά το καλοκαίρι. Με την ευκαιρία αυτή πραγματοποιείται η επιθυμία και των τριών συναδέλφων τους οποίους ευχαριστούμε.

Άσκηση 6

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , η οποία είναι άρτια και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή την $f(0)$.

iii) Αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα πάνω και στη συνέχεια οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 4x + 8, x \in \mathbb{R}$.

Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f ;

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ έχουμε $-x_1, -x_2 \in (-\infty, 0]$ και $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow f(-x_1) < f(-x_2)$, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επειδή η

συνάρτηση f είναι άρτια, η τελευταία σχέση γράφεται $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ii) • Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Οπότε, για κάθε $x \leq 0$ έχουμε

$$f(x) \geq f(0).$$

• Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Οπότε, για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$f(x) \geq f(0).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) \geq f(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή την $f(0)$.

iii) Με βάση την υπόθεση, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και στη συνέχεια κατά 3 μονάδες προς τα κάτω. Επομένως,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x+2) - 3 = (x+2)^2 - 4(x+2) + 8 - 3 \\ &= x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 + 8 - 3 = x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Στη μνήμη του Βαγγέλη Ευσταθίου

Στις 9 Μαΐου 2018, έφυγε απροσδόκητα από κοντά μας ο Βαγγέλης Ευσταθίου. Καταγόταν από την Αίγινα, μεγάλωσε στην Αθήνα και σπούδασε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών. Ένας εκλεκτός συνάδελφος, μέλος της Ε.Μ.Ε. από τα πρώτα χρόνια μετά την απόκτηση του πτυχίου του με μεγάλη και ανιδιοτελή συνεισφορά στη Μαθηματική Εταιρεία κατά τις διετίες 2001-2003, 2003-2005, 2013-2015, ως ταμίας του ΔΣ για πολλά χρόνια και ως υπεύθυνος για την έκδοση του περιοδικού Ευκλείδη Β'.

Ασυναγώνιστος σε θέματα οργάνωσης, ήταν ένας πολύτιμος και αποτελεσματικός συνεργάτης σε όλα τα Δ.Σ. που συμμετείχε. Η απουσία του αναμφισβήτητα θα είναι δυσαναπλήρωτη.

Από τα πρώτα χρόνια μετά τη λήψη του πτυχίου του ίδρυσε το Φροντιστήριο του το οποίο λειτούργησε με μεγάλη επιτυχία μέχρι πέρυσι, αφού ήταν και εξαιρετικός Μαθηματικός και δάσκαλος με μεγάλη μεταδοτικότητα. Ανέπτυξε παράλληλα και επιτυχημένη επιχειρηματική δραστηριότητα στον τομέα της Ναυτιλίας, με την ίδρυση μιας πολύ καλής Ναυτιλιακής Επιχείρησης. Το περασμένο Φθινόπωρο στο νησί της Λευιάδας όπου εδραζόταν η επιχείρησή του, συνεισέφερε τα μέγιστα στην οργάνωση πολύ επιτυχούς συνεδρίου μας.

Ως αγαπητός συνάδελφος, πάντα καλόκαρδος και καλοσυνάτος, είχε μόνο φίλους στους κόλπους της Ε.Μ.Ε. Τον αποχαιρετάμε όλοι με βαθιά την αίσθηση της πίκρας.

Ανάργυρος Φελλούρης

Καθηγητής Μετσοβίου Πολυτεχνείου, Πρόεδρος της ΕΜΕ