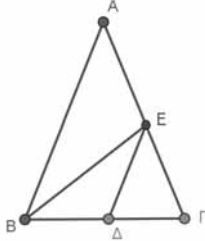


Νίκος Κυριακίδης, 7^ο Γ.Ε.Λ. Ν. Σμύρνης

1. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=8$ και $B\Gamma=6$. Θεωρούμε τα σημεία Δ της $B\Gamma$ και E της AG , έτσι ώστε $DE \parallel AB$. Δείξτε ότι $\frac{(BE\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$.



ΛΥΣΗ: Α' Τρόπος: Αφού τα σημεία Δ και E είναι μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα θα ισχύει

$$\widehat{ABE} = \widehat{BE\Delta}. \text{ Συνεπώς } \frac{(BE\Delta)}{(ABE)} = \frac{BE \cdot \Delta E}{AB \cdot BE} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2},$$

αφού $DE \parallel \frac{1}{2} AB$.

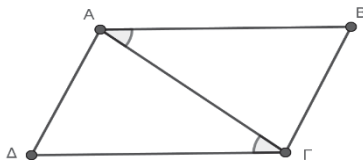
BE διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma \Rightarrow \frac{(ABE)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2}$.

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες

σχέσεις έχουμε $\frac{(BE\Delta)}{(ABE)} \cdot \frac{(ABE)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{(BE\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$.

Β' Τρόπος: Αφού η ED είναι διάμεσος του τριγώνου BEG ισχύει $(BE\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (BEG)$ και αφού η BE είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $(BEG) = \frac{1}{2} \cdot (AB\Gamma)$, οπότε προκύπτει ότι $(BE\Delta) = \frac{1}{4} \cdot (AB\Gamma)$.

2. Να αποδείξετε ότι αν η διαγώνιος AG τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.



ΛΥΣΗ: Αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει:

$$\widehat{AG\Delta} = \widehat{GAB}, \text{ συνεπώς } \frac{(AG\Delta)}{(\Gamma AB)} = \frac{AG \cdot \Gamma\Delta}{AG \cdot AB} = \frac{\Gamma\Delta}{AB} \Rightarrow 1 =$$

$$= \frac{\Gamma\Delta}{AB} \Rightarrow \Gamma\Delta = AB \Rightarrow \Gamma\Delta \parallel AB.$$

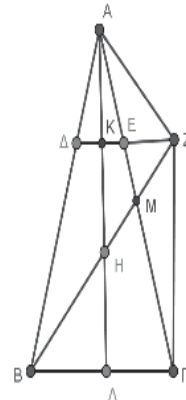
Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Από σημείο Δ της πλευράς AB με $A\Delta = \frac{1}{3} AB$

φέρουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AG στο σημείο E . Προεκτείνουμε την DE κατά $EZ = DE$. Να δείξετε ότι :

A. Η BZ διέρχεται από το μέσο της AG .

B. Αν η κάθετη από το A στην $B\Gamma$ τέμνει την BZ στο σημείο H , να δείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta H Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



ΛΥΣΗ: A. Αφού $DE \parallel B\Gamma$ τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια οπότε: $\frac{AE}{AG} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{DE}{B\Gamma} = \frac{1}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AE = A\Delta = \frac{AB}{3} = \frac{AG}{3}$ και $DE = EZ = \frac{B\Gamma}{3}$.

Αν η BZ τέμνει την AG στο σημείο M τότε τα τρίγωνα MEZ και $M\Gamma B$ είναι όμοια αφού $EZ \parallel B\Gamma$.

Συνεπώς $\frac{ME}{M\Gamma} = \frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{1}{3} \Rightarrow M\Gamma = 3ME$ (1). Άρα:

$$\frac{AE}{AG} = \frac{1}{3} \Rightarrow AG = 3AE \Rightarrow AE + EG = 3AE \Rightarrow AE = \frac{EG}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE + EM = \frac{EM + \Gamma M}{2} + EM \Rightarrow AM = \frac{EM + 3EM}{2} + EM \Rightarrow$$

(1)

$$\Rightarrow AM = 2EM + EM \Rightarrow AM = 3EM \Rightarrow AM = M\Gamma.$$

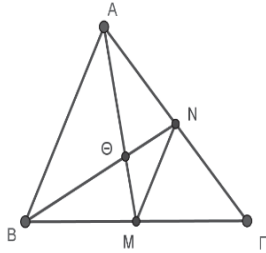
Άρα το M είναι μέσο της AG .

B. Έστω ότι η κάθετη από το A στην $B\Gamma$ τέμνει την DE στο K και την $B\Gamma$ στο Λ . Τότε αφού $DE \parallel B\Gamma$ είναι και η AK κάθετη στην DE , άρα είναι ύψος του τριγώνου $A\Delta E$. Το AK σαν ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\Delta E$ είναι και διάμεσος, άρα $KE = \frac{\Delta E}{2}$. Ισχύει $KZ = KE + EZ = \frac{\Delta E}{2} + \Delta E =$

$$= \frac{3}{2} \cdot \Delta E = \frac{3}{2} \cdot \frac{B\Gamma}{3} = \frac{B\Gamma}{2}, \text{ και αφού το } AB\Gamma \text{ είναι}$$

ισοσκελές το ύψος $A\Lambda$ είναι και διάμεσος, οπότε

$$\Lambda\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$$



Άρα $KZ \parallel \Lambda\Gamma$. Επομένως το τετράπλευρο $KZ\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Συνεπώς ισχύει $K\Lambda \parallel Z\Gamma$ και $A\eta \parallel Z\Gamma$, άρα $\widehat{MA\eta} = \widehat{MZ\Gamma}$ (εντός εναλλάξ των $A\eta \parallel Z\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$). Τα τρίγωνα $AM\eta$ και ΓMZ είναι ίσα γιατί έχουν $AM = M\Gamma$, και τις προσκείμενες γωνίες ίσες ($\widehat{MA\eta} = \widehat{MZ\Gamma}$, $\widehat{\eta M A} = \widehat{Z M \Gamma}$). Από το τελευταίο προκύπτει ότι $M\eta = MZ$ και συνεπώς το τετράπλευρο $AZ\Gamma\eta$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και ηZ διχοτομούνται.

4. Αν AM και BN δύο διάμεσοι τριγώνου $AB\Gamma$ και Θ το βαρύκεντρο να δείξετε ότι $\frac{(MN\Theta)}{1} = \frac{(A\Theta N)}{2} = \frac{(B\Theta M)}{2} = \frac{(\Gamma MN)}{3} = \frac{(AB\Theta)}{4}$.

ΛΥΣΗ: Αφού η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $(ABM) = (AM\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. Όμως το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου, επομένως $A\Theta = 2\Theta M \Rightarrow \frac{(AB\Theta)}{(B\Theta M)} = \frac{A\Theta}{\Theta M} = 2 \Rightarrow$

$$(AB\Theta) = 2(B\Theta M) \Rightarrow (AB\Theta) + (B\Theta M) = 2(B\Theta M) + (B\Theta M) \Rightarrow 3(B\Theta M) = (ABM) \Rightarrow 6(B\Theta M) = (AB\Gamma) \text{ και } 3(AB\Theta) = (AB\Gamma).$$

Αφού $\widehat{A\Theta B} = \widehat{M\Theta N}$ (κατακορυφήν γωνίες), έχουμε:

$$\frac{(MN\Theta)}{(A\Theta B)} = \frac{\Theta M \cdot \Theta N}{\Theta A \cdot \Theta B} \Rightarrow \frac{(MN\Theta)}{(A\Theta B)} = \frac{\Theta M}{\Theta A} \cdot \frac{\Theta N}{\Theta B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(MN\Theta)}{(A\Theta B)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(MN\Theta)}{(A\Theta B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow (MN\Theta) = \frac{1}{4}(A\Theta B)$$

$$\Rightarrow (MN\Theta) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}(AB\Gamma) \Rightarrow 12(MN\Theta) = (AB\Gamma).$$

Αφού $A\Theta = 2\Theta M$ προκύπτει $\frac{(A\Theta N)}{(MN\Theta)} = \frac{A\Theta}{\Theta M} = 2$

$$\Rightarrow (A\Theta N) = 2(MN\Theta) \Rightarrow 6(A\Theta N) = (AB\Gamma)$$

Αφού τα τρίγωνα ΓMN και ΓAB έχουν κοινή γωνία προκύπτει ότι

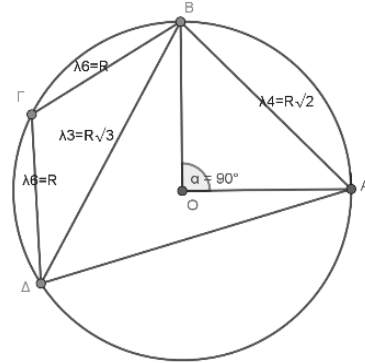
$$\frac{(\Gamma MN)}{(\Gamma AB)} = \frac{\Gamma M \cdot \Gamma N}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(\Gamma MN) = (AB\Gamma).$$

Άρα λοιπόν:

$$12(MN\Theta) = 6(A\Theta N) = 6(B\Theta M) = 4(\Gamma MN) = 3(AB\Theta) \Rightarrow \frac{(MN\Theta)}{1} = \frac{(A\Theta N)}{2} = \frac{(B\Theta M)}{2} = \frac{(\Gamma MN)}{3} = \frac{(AB\Theta)}{4}.$$

6. Σε κύκλο (O, R) φέρουμε τις κάθετες ακτίνες OA και OB . Θεωρούμε χορδές $B\Gamma = \Gamma\Delta = R$, έτσι ώστε τα σημεία A, B, Γ, Δ να βρίσκονται στον κύκλο κατά την τριγωνομετρική φορά.

- A.** Να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου $AB\Delta$.
- B.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$.



ΛΥΣΗ: **A.** Αφού $\widehat{AOB} = 90^\circ$ είναι $AB = \lambda_4 = R\sqrt{2}$. Αφού $B\Gamma = \Gamma\Delta = R = \lambda_6$ έχουμε $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BO\Delta} = 120^\circ$. Άρα $B\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Η γωνία $\widehat{AO\Delta} = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ$. Με τον νόμο του συνημιτόνου στο τρίγωνο $OA\Delta$ έχουμε:

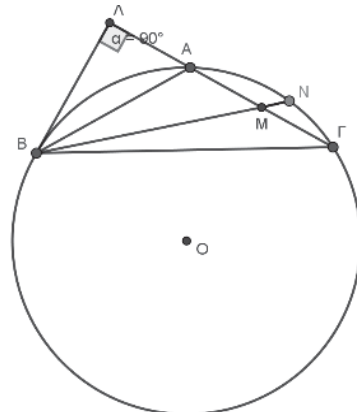
$$A\Delta^2 = OA^2 + O\Delta^2 - 2OA \cdot O\Delta \cdot \cos 150^\circ \Rightarrow A\Delta^2 = 2R^2 - 2R^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = R^2(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow A\Delta = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

B. $(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \Delta B \cdot \Delta A \cdot \sin 45^\circ =$

$$= \frac{1}{2} R\sqrt{3} R\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2}{4} \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}.$$

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = A\Gamma = 4$ και $B\Gamma = 4\sqrt{3}$.



- A.** Να υπολογίσετε την γωνία A .
- B.** Να βρείτε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$.

Γ. Να βρείτε την προβολή της διαμέσου ΒΜ στην πλευρά ΑΓ.

Δ. Να βρείτε την διάμεσο ΒΜ=μ_β.

Ε. Να βρείτε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

ΣΤ. Να βρείτε την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Ζ. Αν η διάμεσος ΒΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ν, να υπολογίσετε το τμήμα ΜΝ.

ΛΥΣΗ: Α. Σύμφωνα με τον νόμο του συνημιτόνου έχουμε: $\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{4^2 + 4^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} =$

$$= \frac{-16}{32} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ.$$

Β. Σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Delta\Delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta\Delta = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\beta} \Rightarrow \Delta\Delta = \frac{(4\sqrt{3})^2 - 4^2 - 4^2}{2 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow \Delta\Delta = \frac{48 - 16 - 16}{8} \Rightarrow \Delta\Delta = 2.$$

Γ. Ισχύει ΜΔ=ΜΑ+ΑΜ=2+2=4.

Δ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow B\Delta = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΜΒ έχουμε $B\Delta^2 + \Delta M^2 \Rightarrow B\Delta^2 = 12 + 16 = 28 \Rightarrow B\Delta = \dots \Rightarrow \mu_\beta = 2\sqrt{7}$.

Ε. Ισχύει $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

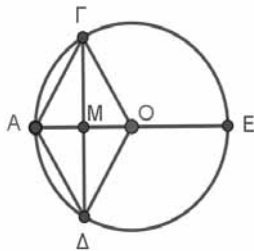
$$\text{Αλλά } (AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Rightarrow R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4(AB\Gamma)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 4\sqrt{3}} \Rightarrow R = 4.$$

ΣΤ. Ισχύει $(AB\Gamma) = \tau \cdot \rho \Rightarrow$

$$\rho = \frac{(AB\Gamma)}{\tau} = \frac{4\sqrt{3}}{4+4+4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{-3+2\sqrt{3}}{4-3} = -3+2\sqrt{3}.$$



Ζ. Αφού $\widehat{AMB} = \widehat{NMG}$, ως κατακορυφήν γωνίες και $\widehat{ABM} = \widehat{AGN}$, ως εγγεγραμμένες γωνίες του

κύκλου που βαίνουν στο τόξο \widehat{AM} , τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΝΓΜ είναι όμοια. Άρα $\frac{AM}{NM} = \frac{MB}{MG} \Rightarrow$

$$AM \cdot MG = NM \cdot MB \Rightarrow NM = \frac{AM \cdot MG}{MB} = \frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

8. Από το μέσο Μ της ακτίνας ΟΑ κύκλου (Ο, R) φέρομε χορδή ΓΔ μήκους R. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΔ είναι ρόμβος.

ΛΥΣΗ: Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΔΜΕ είναι όμοια αφού έχουν $\widehat{ΓΑΕ} = \widehat{ΓΔΕ}$, ως εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου που βαίνουν στο τόξο ΓΕ και $\widehat{ΑΜΓ} = \widehat{ΔΜΕ}$, ως κατακορυφήν γωνίες. Άρα $\frac{MA}{MD} = \frac{MG}{ME} \Rightarrow MA \cdot ME = MG \cdot MD$. Αν $MG = x$

$$\text{έχουμε: } \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = x(R\sqrt{3} - x) \Rightarrow \frac{3R^2}{4} = R\sqrt{3} - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - R\sqrt{3}x + \frac{3R^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Άρα } MG = MD = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \text{ Επομένως}$$

το σημείο Μ είναι μέσο και του ΓΔ. Δηλαδή οι διαγώνιοι του ΑΓΟΔ διχοτομούνται. Άρα το ΑΓΟΔ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού ΟΓ = ΟΔ = R συμπεραίνουμε ότι το ΑΓΟΔ είναι ρόμβος.

9. Α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$ και $\gamma = 4$, να υπολογίσετε τις πλευρές α και β.

Β. Στις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ του τριγώνου θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα έτσι ώστε $\widehat{ΑΕΖ} = 30^\circ$, $\widehat{ΖΑΒ} = 60^\circ$ και $\widehat{ΔΕΓ} = 75^\circ$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

Γ. Να υπολογίσετε την πλευρά ΖΕ του τριγώνου ΔΕΖ.

Δ. Να υπολογίσετε τις πλευρές ΔΕ και ΔΖ του τριγώνου ΔΕΖ.

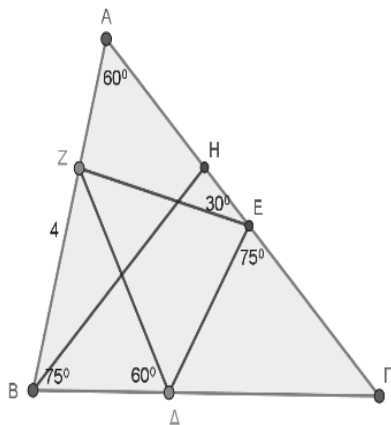
ΛΥΣΗ:

$$\text{Α. Αφού } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ. \text{ Φέρομε το ύψος ΒΗ του τριγώνου ΑΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΗ έχουμε } AH = AB \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ και } BH = AB \eta\mu 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΗΓ έχουμε $GH = BH = 2\sqrt{3}$. Τότε $\beta = AG = AH + HG = 2 + 2\sqrt{3}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ έχουμε

$$\alpha^2 = \text{B}\Gamma^2 = \text{B}\text{H}^2 + \text{G}\text{H}^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 24 \Rightarrow \alpha = 2\sqrt{6}.$$



Β. Στο τρίγωνο ΒΖΔ έχουμε:

$$\widehat{\text{B}} + \widehat{\text{Z}} + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\text{Z}} = 180^\circ - \widehat{\text{B}} - \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{\text{Z}} = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ.$$

Στο τρίγωνο ΑΖΕ έχουμε:

$$\widehat{\text{A}} + \widehat{\text{Z}} + \widehat{\text{E}} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\text{Z}} = 180^\circ - \widehat{\text{A}} - \widehat{\text{E}} \Rightarrow \widehat{\text{Z}} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Αφού

$$\widehat{\text{AZE}} + \widehat{\text{EZ}\Delta} + \widehat{\Delta\text{ZB}} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\text{EZ}\Delta} = 180^\circ - \widehat{\text{AZE}} - \widehat{\Delta\text{ZB}} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Επίσης

$$\widehat{\text{AEZ}} + \widehat{\text{ZE}\Delta} + \widehat{\Delta\text{E}\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\text{ZE}\Delta} = 180^\circ - \widehat{\text{AEZ}} - \widehat{\Delta\text{E}\Gamma} = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ.$$

Στο τρίγωνο ΓΔΕ έχουμε: $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} + \widehat{\text{E}} = 180^\circ \Rightarrow$

$$\widehat{\Delta} = 180^\circ - \widehat{\Gamma} - \widehat{\text{E}} \Rightarrow \widehat{\Delta} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ.$$

Στο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε:

$$\widehat{\Delta} + \widehat{\text{E}} + \widehat{\text{Z}} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\Delta} = 180^\circ - \widehat{\text{E}} - \widehat{\text{Z}} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια αφού είναι ισογώνια με $\widehat{\text{A}} = \widehat{\Delta} = 60^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\text{Z}} = 45^\circ$.

Γ. Τα τρίγωνα ΒΔΖ, ΕΔΖ έχουν κοινή την πλευρά ΔΖ, και τις προσκείμενές της γωνίες ίσες. Αν $\text{ZE} = x$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ έχουμε

$$\epsilon\phi 60^\circ = \frac{\text{ZE}}{\text{AZ}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{\text{AZ}} \Rightarrow \text{AZ} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Από τα ίσα τρίγωνα ΖΔΕ και ΕΔΒ έχουμε $\text{ZB} = \text{ZE} = x$. Όμως $\text{AZ} + \text{ZB} = \text{AB} \Rightarrow$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} + x = 4 \Rightarrow \frac{x \cdot (1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1)} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3 - 1} = 6 - 2\sqrt{3}.$$

Δ. Αφού τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια

$$\epsilon\chi\omicron\upsilon\mu\epsilon: \frac{\text{ΔE}}{\text{ΑB}} = \frac{\text{ΔZ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{EZ}}{\text{BΓ}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{(6 - 2\sqrt{3})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6} - 2\sqrt{18}}{12} = \frac{6(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Τότε } \Delta\text{E} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot \text{ΑB} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot 4 = 2 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\text{και } \Delta\text{Z} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot \text{ΑΓ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot (2 + 2\sqrt{3}) =$$

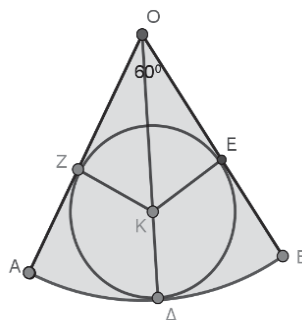
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot 2(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{2}.$$

10. Α. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου, που είναι εγγεγραμμένος σε κυκλικό τομέα 60° , κέντρου Ο και ακτίνας R.

Β. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(\text{K}, \frac{\text{R}}{3})$ έχει

διπλάσιο μήκος από το τόξο $\widehat{\text{ΑB}}$.

Γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κύκλου ισούται με τα δύο τρίτα του εμβαδού του κυκλικού τομέα.



ΛΥΣΗ: Α. Έστω x η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (K, x) . Αφού οι κύκλοι εφάπτονται η διάκεντρος ΟΚ διέρχεται από το σημείο επαφής τους Δ. Αφού η ΟΑ εφάπτεται του κύκλου στο Ζ, η ΚΖ θα είναι κάθετη στην ΟΑ και αφού η ΟΒ εφάπτεται του κύκλου στο Ε, η ΚΕ θα είναι κάθετη στην ΟΒ. Όμως $\text{KE} = \text{KZ} = x$, άρα το Κ ισαπέχει από τις ΟΑ και ΟΒ. Συνεπώς η ΟΚ διχοτομεί την γωνία $\widehat{\text{ΑΟB}}$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΚ είναι $\widehat{\text{ΚΟE}} = 30^\circ$, $\text{KE} = x$ και $\text{OK} = \text{ΟΔ} - \text{ΚΔ} = \text{R} - x$.

Επομένως

$$\text{KE} = \frac{\text{OK}}{2} \Rightarrow x = \frac{\text{R} - x}{2} \Rightarrow 2x = \text{R} - x \Rightarrow 3x = \text{R} \Rightarrow x = \frac{\text{R}}{3}.$$

Β. Το μήκος του κύκλου είναι $L_{\text{K}} = 2\pi \frac{\text{R}}{3} = \frac{2\pi\text{R}}{3}$

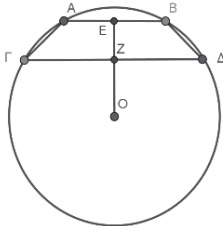
$$\text{και το μήκος του τόξου είναι } L_{\text{T}} = \frac{\pi\text{R} \cdot 60}{180} = \frac{\pi\text{R}}{3}.$$

$$\text{Συνεπώς } L_{\text{K}} = \frac{2\pi\text{R}}{3} = 2 \cdot \frac{\pi\text{R}}{3} = 2L_{\text{T}}.$$

Γ. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_K = \pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{9}$

και το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_T = \frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$. Τότε $E_K = \frac{\pi R^2}{9} = \frac{2\pi R^2}{18} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi R^2}{6} = \frac{2}{3} E_T$.

11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζιού που σχηματίζουν δύο παράλληλες χορδές του κύκλου (O,R), με μήκη R και $R\sqrt{3}$.



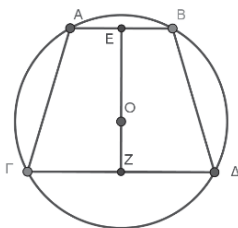
ΛΥΣΗ: Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Α. οι χορδές βρίσκονται στο ίδιο μέρος του Ο και Β. οι χορδές βρίσκονται εκατέρωθεν του Ο.

Α. περίπτωση: Αφού οι χορδές AB και ΓΔ έχουν μήκη R και $R\sqrt{3}$, αντίστοιχα ισχύει $AB=R=\lambda_6$ και $\Gamma\Delta=R\sqrt{3}=\lambda_3$, συνεπώς τα αντίστοιχα αποστήματα είναι $OE=\alpha_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ και $OZ=\alpha_3=\frac{R}{2}$. Το ύψος είναι

$EZ=OE-OZ=\frac{R\sqrt{3}}{2}-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$. Τότε το

εμβαδόν είναι $(AB\Gamma\Delta)=\frac{(AB+\Gamma\Delta)}{2}EZ=\frac{R+R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)=\frac{R^2}{4}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=\frac{R^2}{4}2=\frac{R^2}{2}$.

Β. περίπτωση: Αφού οι χορδές AB και ΓΔ έχουν μήκη R και $R\sqrt{3}$, αντίστοιχα ισχύει $AB=R=\lambda_6$ και $\Gamma\Delta=R\sqrt{3}=\lambda_3$, συνεπώς τα αντίστοιχα αποστήματα είναι $OE=\alpha_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ και $OZ=\alpha_3=\frac{R}{2}$.



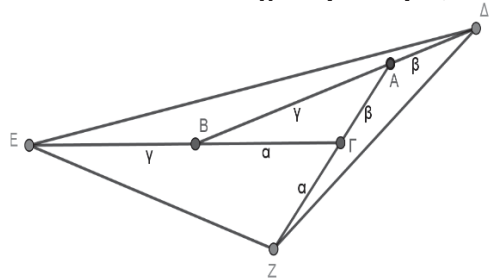
Το ύψος είναι $EZ=OE+OZ=\frac{R\sqrt{3}}{2}+\frac{R}{2}=\frac{R}{2}(\sqrt{3}+1)$.

Τότε το εμβαδόν είναι:

$(AB\Gamma\Delta)=\frac{(AB+\Gamma\Delta)}{2}EZ=\frac{R+R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2}(\sqrt{3}+1)=$

$$= \frac{R^2}{4}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1) = \frac{R^2}{4}(\sqrt{3}+1)^2 = \frac{R^2}{4}(4+2\sqrt{3}) = \frac{R^2}{2}(2+\sqrt{3}).$$

12. Προεκτείνουμε τις πλευρές BA, ΑΓ, ΓΒ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα ΑΔ=ΑΓ, ΓΖ=ΒΓ και ΒΕ=ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $(\Delta EZ) \geq 7(AB\Gamma)$. Πότε ισχύει η ισότητα;



ΛΥΣΗ: Αφού $\widehat{EB\Delta} + \widehat{B} = 180^\circ$ ισχύει

$$\frac{(EB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma(\beta+\gamma)}{\alpha\gamma} \Rightarrow \frac{(EB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha} \Rightarrow (EB\Delta) = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}(AB\Gamma)$$

Αφού $\widehat{\Delta AZ} + \widehat{A} = 180^\circ$ ισχύει $\frac{(\Delta AZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\beta\gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(EB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \Rightarrow (\Delta AZ) = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}(AB\Gamma)$$

Αφού $\widehat{ZGE} + \widehat{G} = 180^\circ$ ισχύει $\frac{(ZGE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\alpha\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(EB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} \Rightarrow (ZGE) = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}(AB\Gamma)$$

Αλλά $(\Delta EZ) = (EBZ) + (\Delta AZ) + (ZGE) + (AB\Gamma) = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}(AB\Gamma) + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}(AB\Gamma) + \frac{\alpha+\gamma}{\beta}(AB\Gamma) + (AB\Gamma) = \left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} + 1\right)(AB\Gamma) =$

$$= \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) + 1 \right] \cdot (AB\Gamma).$$

Όμως:

$$(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2,$$

(το ίσον μόνο όταν $\alpha = \beta$).

Όμοια ισχύουν $\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} \geq 2$ και $\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \geq 2$. Συνεπώς

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} + 1 \geq 7.$$

Άρα $(\Delta EZ) \geq 7(AB\Gamma)$. Για να ισχύει το ίσον πρέπει και αρκεί καθένας από τους τρεις προσθετέους του αθροίσματος να είναι ίσος με 2, που συμβαίνει μόνο όταν $\alpha=\beta$, $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$, ή $\alpha=\beta=\gamma$, δηλαδή σε ισόπλευρο τρίγωνο.