

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ασκήσεις Επανάληψης Γεωμετρίας

Παναγιώτης Ζούζιας, Χρήστος Π. Τσιφάκης 3ο ΓΕΛ Κερατσινίου

Άσκηση 1η. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με πλευρά $A\Gamma = R\sqrt{3}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) .

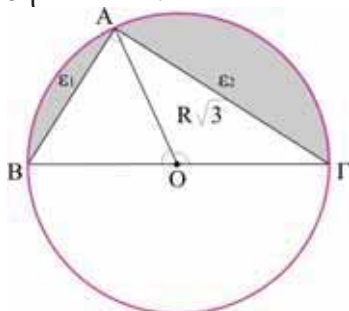
i) Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R το μήκος της πλευράς AB .

ii) Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R τα εμβαδά των κυκλικών τομέων \widehat{OBA} και \widehat{OAG} .

iii) Αν ε_1 είναι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία \widehat{BOA} και ε_2 είναι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία \widehat{AOG} , να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = (\widehat{OBA}).$$

Λύση: i) Αφού $A\Gamma = R\sqrt{3}$ έχουμε ότι $\hat{B} = 60^\circ$, άρα η χορδή $AB = R$.



$$\text{ii) } (\widehat{OBA}) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot R^2}{6}$$

$$(\widehat{OGA}) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot R^2}{3}.$$

iii) $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 =$

$$(\widehat{OAG}) - (\widehat{OGA}) - (\widehat{OBA}) + (\widehat{OBA}) =$$

$$\frac{\pi \cdot R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot R^2}{6} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\pi \cdot R^2}{6}.$$

Άρα $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = (\widehat{OBA})$.

Άσκηση 2η. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, οι διάμεσοί του $A\Delta$, BZ και ΓE και Θ το βαρύκεντρό του.

i. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$ το χωρίζουν σε έξι ισοδύναμα τρίγωνα.

ii. Να αποδείξετε ότι: $(AEZ) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$.

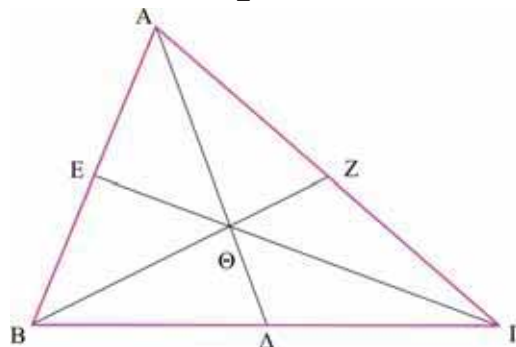
iii. Από το Z φέρνουμε τμήμα ZM ίσο και παράλληλο με το BE . Να αποδείξετε ότι οι πλευρές του τριγώνου $ME\Gamma$ είναι ίσες μία προς μία, με τις διαμέσους του τριγώνου $AB\Gamma$.

iv. Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $AM\Gamma\Delta$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα, δηλαδή: $(AM\Gamma\Delta) = (AB\Gamma)$.

v. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που έχει για πλευρές τις διαμέσους του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι: $(ME\Gamma) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$.

vi. Αν είναι $\mu_\alpha = 13$, $\mu_\beta = 14$ και $\mu_\gamma = 15$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση: i) $(AB\Delta) = (A\Delta\Gamma) = (B\Gamma Z) = (BZA) = (GBE) = (GEA) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.



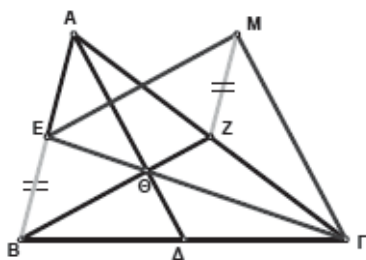
Αλλά $(B\Theta\Delta) = (\Theta\Delta\Gamma) = \frac{1}{3}(AB\Delta)$, οπότε

$(B\Theta\Delta) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$ και όμοια αποδεικνύουμε

ότι $(B\Theta\Delta) = (B\Theta E) = (\Theta E A) = (\Theta A Z) = \dots$

$\dots = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$.

ii) $\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{AE \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{4}$, άρα $(AEZ) = \frac{1}{4}(AB\Gamma)$.

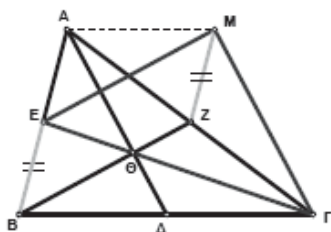


iii) Το MEBZ είναι παραλληλόγραμμο γιατί $MZ // BE$, άρα $ME // BZ$ και όμοια δείχνουμε ότι τα EAMZ και AMΓΔ είναι παραλληλόγραμμα, συνεπώς το τρίγωνο MEG έχει πλευρές ίσες μία προς μία, με τις διαμέσους του τριγώνου ABΓ.

iv) $(AMΓΔ) = ΔΓ \cdot \upsilon_{\alpha}$ και $(ABΓ) = 2 \cdot \frac{1}{2} \Delta \Gamma \cdot \upsilon_{\alpha}$,

άρα $(AMΓΔ) = (ABΓ)$.

v) $(MEΓ) = (MEZ) + (MZΓ) + (EZΓ) =$
 $\frac{1}{4}(ABΓ) + \frac{1}{4}(ABΓ) + \frac{1}{4}(ABΓ) = \frac{3}{4}(ABΓ)$.



vi) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ήρωνα, όπου $\tau = \frac{\mu_{\alpha} + \mu_{\beta} + \mu_{\gamma}}{2} = 21$ έχουμε

$$(MEΓ) = \sqrt{\tau \cdot (\tau - \mu_{\alpha}) \cdot (\tau - \mu_{\beta}) \cdot (\tau - \mu_{\gamma})} =$$

$$\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84.$$

Άρα από το v) ερώτημα

$$(ABΓ) = \frac{4}{3}(MEΓ) = \frac{4}{3} \cdot 84 = \frac{336}{3} = 112.$$

Άσκηση 3η. Τρεις κύκλοι (O_1, R_1) , (O_2, R_2) και (O_3, R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία A, B και Γ. Αν $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$ και $R_3 = 2 - \sqrt{2}$:

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

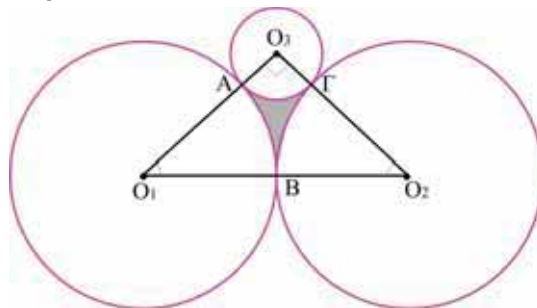
ii) Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου ABΓ.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ABΓ.

Λύση: i) $O_1O_2 = R_1 + R_2 = 2\sqrt{2}$, $O_2O_3 = O_1O_3 = 2$.

Έτσι έχουμε $(O_1O_2)^2 = 8 = (O_1O_3)^2 + (O_2O_3)^2 = 4 + 4$ άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

ii) $\text{Περ}_{ABΓ} = l_{\widehat{AB}} + l_{\widehat{BG}} + l_{\widehat{AG}} =$
 $2 \cdot \frac{\pi \cdot R_1}{8} + \frac{\pi \cdot R_3}{4} = \frac{\pi \cdot (R_1 + R_3)}{4} = \frac{\pi}{2}$.



iii) $(ABΓ) = (O_1O_2O_3) - 2 \frac{\pi \cdot R_1^2}{8} - \frac{\pi \cdot R_3^2}{4} =$
 $2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot (2 - \sqrt{2})^2}{4} = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})}{2} =$
 $2 - \frac{\pi \cdot (4 - 2\sqrt{2})}{2} = 2 - \pi \cdot (2 - \sqrt{2})$.

Άσκηση 4η. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με πλευρές $\gamma = 1$ και $\beta = \sqrt{3}$. Με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ γράφουμε τόξο $\widehat{AΔ}$, με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε τόξο $\widehat{AΕ}$. Να υπολογίσετε:

i) Τις γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ABΓ.

ii) Τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $\widehat{BAΕ}$ και $\widehat{\Gamma AΔ}$.

iii) Το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου AΕΔ, δηλαδή του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Λύση: i) $\epsilon\phi\hat{B} = \frac{AG}{AB} = \sqrt{3}$, άρα $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

ii) $(\widehat{BAΕ}) = \frac{\pi \cdot AB^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$

$\widehat{\Gamma AΔ} = \frac{\pi \cdot AG^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{4}$

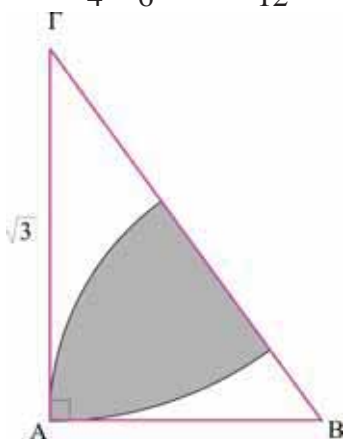
iii) Θέτουμε $x = (\text{μικτ} \Gamma A E)$ και

$y = (\text{μικτ} B A \Delta)$ και τότε:

$$(\text{μικτ} A E \Delta) = (ABΓ) - [(x) + (y)] = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Αφού

$$(x) + (y) = (AB\Gamma) - (\widehat{BAE}) + (AB\Gamma) - (\widehat{\Gamma A\Delta}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{12}.$$

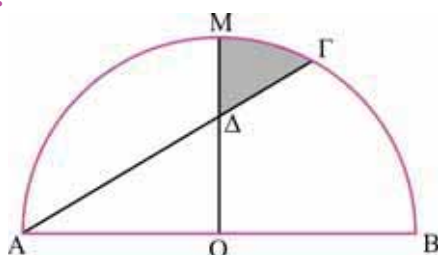


Άσκηση 5η. Θεωρούμε ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2R$, το μέσο M αυτού και σημείο Γ έτσι ώστε $A\Gamma = R\sqrt{3}$. Αν η ακτίνα OM τέμνει την χορδή $A\Gamma$ στο σημείο Δ , να υπολογίσετε:

i) το τμήμα $O\Delta$.

ii) το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου $\Gamma\Delta M$.

Λύση.



i) Αφού $A\Gamma = R\sqrt{3}$ τότε η $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, άρα $\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{O\Delta}{O\Delta} \Leftrightarrow O\Delta = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{3}$.

ii) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 60^\circ$, άρα το $\widehat{B\hat{\Gamma}A} = 60^\circ$ και τότε $\widehat{M\hat{\Gamma}A} = 30^\circ$. Φέρνουμε την ακτίνα $O\Gamma$ και το απόστημα στη χορδή $A\Gamma$ και έχουμε:

$$A\Delta = 2 \cdot O\Delta = 2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3}, \Delta\Gamma = O\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$(\text{μικτ } M\Gamma\Delta) = (\widehat{OM\Gamma}) - (O\Delta\Gamma) =$$

$$\frac{\pi \cdot R^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot \Delta\Gamma \cdot \alpha_3 = \frac{\pi \cdot R^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{R}{2} =$$

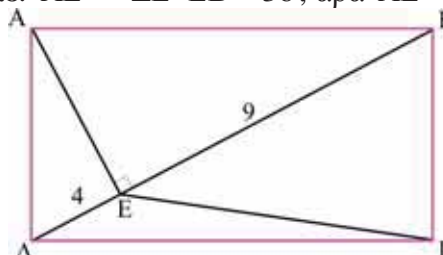
$$\frac{(\pi - \sqrt{3}) \cdot R^2}{12}.$$

Άσκηση 6η. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Φέρνουμε την $AE \perp \Delta B$ όπου $\Delta E = 4 \text{ cm}$ και $EB = 9 \text{ cm}$.

i) Να δείξετε ότι $(AEB) = (BEG)$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

Λύση: i) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο και AE είναι το ύψος του. Από μετρική σχέση έχουμε: $AE^2 = \Delta E \cdot EB = 36$, άρα $AE = 6$.



Οι κορυφές A και Γ ισαπέχουν από την διαγώνιο $B\Delta$, οπότε έχουμε ότι τα τρίγωνα AEB και BEG έχουν ίδια βάση και ίδιο ύψος. Άρα είναι $(AEB) = (BEG)$.

ii) $(\Delta E\Gamma) = (AEB) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ cm}^2$.

Άσκηση 7η. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς a και η διχοτόμος Γx της εξωτερικής γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

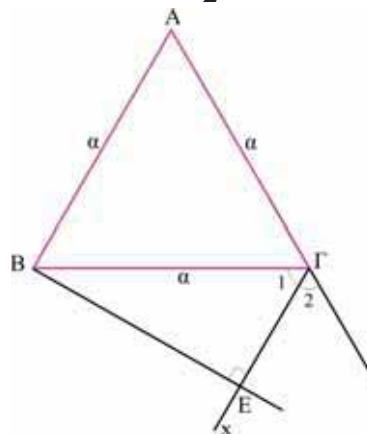
Αν $BE \perp \Gamma x$, να δείξετε ότι:

i) $AE^2 = A\Gamma^2 + \Gamma E^2 + A\Gamma \cdot \Gamma E$.

ii) Να δείξετε ότι $AE = \frac{\alpha\sqrt{7}}{2}$.

iii) Να υπολογίσετε συναρτήσει του a την προβολή του ΓE στην $A\Gamma$.

Λύση: i) Το τρίγωνο ΓBE είναι ορθογώνιο με $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = 30^\circ$, άρα $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{2}$.



Το τρίγωνο ABE είναι ορθογώνιο με $\widehat{A\hat{B}E} = 90^\circ$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} AE^2 &= AB^2 + BE^2 = AG^2 + BG^2 - GE^2 = \\ &= AG^2 + AG^2 - GE^2 = AG^2 + (AG - GE)(AG + GE) = \\ &= AG^2 + GE \cdot (AG + GE) = AG^2 + GE^2 + AG \cdot GE \end{aligned}$$

ii) Από το (i) ερώτημα έχουμε

$$AE^2 = AG^2 + AG^2 - GE^2 = 2\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{7\alpha^2}{4}$$

$$\text{Άρα } AE = \frac{\alpha\sqrt{7}}{2}.$$

iii) Φέρνουμε την $EK \perp AG$ και το τρίγωνο ΓΕΚ είναι ορθογώνιο με $\hat{G}EK = 30^\circ$ οπότε

$$EK = \frac{GE}{2} = \frac{\alpha}{4}.$$

Άσκηση 8η. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές γ , β και α είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5 και 6 αντίστοιχα.

i) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

ii) Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β , να αποδείξετε ότι: $AD = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30}$.

Λύση: i) Έχουμε ότι $\frac{\gamma}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha}{6} = \lambda \Leftrightarrow \alpha = 6\lambda$, $\beta = 5\lambda$, $\gamma = 4\lambda$ δηλαδή η πλευρά α είναι η μεγαλύτερη. Αφού $\alpha^2 = 36\lambda^2 < 41\lambda^2 = \beta^2 + \gamma^2$ προκύπτει ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

ii) Από το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για οξεία γωνία έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot AD \Leftrightarrow AD = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta} \Leftrightarrow$$

$$AD = \frac{\lambda}{2} = \frac{15\lambda}{30} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30}.$$

Άσκηση 9η. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\alpha = x^2 + x + 1$, $\beta = x^2 - 1$ και $\gamma = 2x + 1$ με $x > 1$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$.

ii) Να βρείτε το είδος του τριγώνου, ως προς τις γωνίες του.

iii) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας \hat{A} .

Λύση: i) Αφού $x > 1 \Rightarrow x^2 + 1 > x^2 - 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 > x^2 - 1$
 $x > 1 \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow x^2 + x + 1 > 2x + 1$

Άρα $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$.

ii) $\alpha^2 = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$$\beta^2 + \gamma^2 = (x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 =$$

$$= x^4 + 2x^2 + 4x + 2.$$

$$\text{Αφού } x > 1 \Rightarrow (2x + 1)x^2 > 2x + 1.$$

Άρα $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{A} > 90^\circ$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

iii) Από το νόμο συνημιτόνων έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \text{συν}\hat{A} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{-(x^2 - 1) \cdot (2x + 1)}{2(x^2 - 1) \cdot (2x + 1)} \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}\hat{A} = -\frac{1}{2}. \text{ Άρα } \hat{A} = 120^\circ.$$

Άσκηση 10η. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο

ΑΒΓ με $AB = AG = 1$ και γωνία $\hat{A} = 120^\circ$.

Γράφουμε το τόξο $\left(A, \frac{AB}{2}\right)$ που βρίσκεται

στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές του ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα.

i) Να βρεθεί το μήκος της πλευράς ΒΓ.

ii) Ναδειχθεί ότι η ΒΓ εφάπτεται του κύκλου $\left(A, \frac{AB}{2}\right)$.

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του μικτόγραμμου χωρίου που ορίζεται από το τόξο του κύκλου $\left(A, \frac{AB}{2}\right)$ και τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση: i) Από τον νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\begin{aligned} BG^2 &= AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \text{συν}\hat{A} = \\ &= 1 + 1 - 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 3. \text{ Άρα } BG = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

ii) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

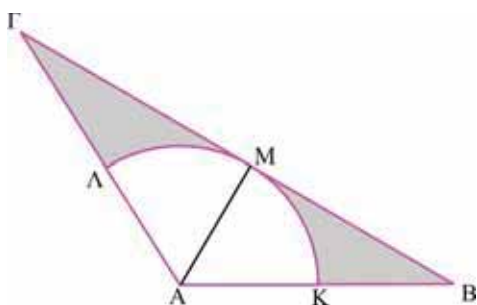
$$(ABG) = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Αλλά $(ABG) = \frac{1}{2} \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, οπότε

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \upsilon_\alpha \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}. \text{ Δηλαδή δείξαμε}$$

ότι το ύψος του τριγώνου είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου $\left(A, \frac{AB}{2}\right)$ συνεπώς η ΒΓ

εφάπτεται του κύκλου $\left(A, \frac{AB}{2}\right)$.



iii) $E_{\gamma_{\text{ραμ}}} = (AB\Gamma) - (\widehat{AKM\Lambda}) =$
 $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} =$

$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}$

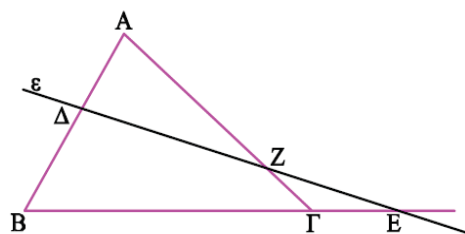
και $\text{Περ}_{\gamma_{\text{ραμ}}} = KB + BG + \Gamma\Lambda + L_{\widehat{K\Lambda M}} =$

$\frac{1}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{\pi \cdot \rho \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{3 + 3\sqrt{3} + \pi}{3}$.

Άσκηση 11η. Αν μια ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ή τις προεκτάσεις των πλευρών AB, BG και ΓA του τριγώνου ABΓ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$\frac{\Delta\Lambda \cdot EB \cdot Z\Gamma}{\Delta B \cdot E\Gamma \cdot ZA} = 1$ (Θεώρημα του Μενελάου).

Λύση: Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΒΕ έχουν $\hat{A}\hat{\Delta Z} + \hat{E}\hat{\Delta B} = 180^\circ$, άρα $\frac{(\Delta\Delta Z)}{(\Delta BE)} = \frac{\Delta\Lambda \cdot \Delta Z}{B\Delta \cdot \Delta E}$ (1).



Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΕΓΖ έχουν την \hat{E} κοινή άρα $\frac{(\Delta BE)}{(\Delta EZ)} = \frac{\Delta E \cdot BE}{E\Gamma \cdot EZ}$ (2).

Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΕΓΖ έχουν $\hat{E}\hat{\Gamma Z} = \hat{A}\hat{Z}\Delta$, άρα $\frac{(\Delta EZ)}{(\Delta\Delta Z)} = \frac{E\Gamma \cdot Z\Gamma}{Z\Lambda \cdot \Delta Z}$ (3).

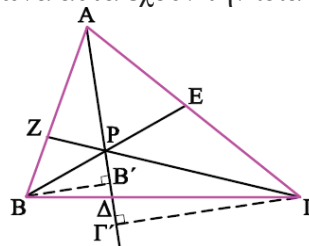
Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1), (2), (3) και παίρνουμε:

$\frac{(\Delta\Delta Z) \cdot (\Delta BE) \cdot (\Delta EZ)}{(\Delta BE) \cdot (\Delta EZ) \cdot (\Delta\Delta Z)} = \frac{\Delta\Lambda \cdot EB \cdot Z\Gamma}{\Delta B \cdot E\Gamma \cdot ZA} = 1.$

Άσκηση 12η. Αν Ρ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABΓ και οι AP, BP, ΓΡ τέμνουν τις BG, ΓA και AB στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα, τότε: $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{\Gamma E}{E\Lambda} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$

(Θεώρημα του Ceva)

Λύση: Αν BB' το ύψος του τριγώνου APB και ΓΓ' το ύψος του APΓ έχουμε: $\frac{(APB)}{(AP\Gamma)} = \frac{BB'}{\Gamma\Gamma'}$ (αφού τα τρίγωνα αυτά έχουν την ίδια βάση AP).



Αφού $BB'\Delta \sim \Gamma\Gamma'\Delta$ έχουμε $\frac{BB'}{\Gamma\Gamma'} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$. Όμοια

παίρνουμε $\frac{(B\Gamma)}{(BPA)} = \frac{\Gamma E}{E\Lambda}$ και $\frac{(\Gamma PA)}{(\Gamma PB)} = \frac{AZ}{ZB}$.

Έτσι έχουμε:

$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{\Gamma E}{E\Lambda} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{(APB) \cdot (B\Gamma) \cdot (\Gamma PA)}{(AP\Gamma) \cdot (BPA) \cdot (\Gamma PB)} = 1.$

Άσκηση 13η. Το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου εσωτερικού σημείου ισόπλευρου τριγώνου από τις πλευρές του είναι σταθερό. (Θεώρημα του Viviani)

Λύση: Έστω Ρ εσωτερικό σημείο του ισόπλευρου τριγώνου ABΓ πλευράς α και ΡΔ, ΡΕ και ΡΖ οι αποστάσεις του από τις πλευρές BG, ΓA και AB αντίστοιχα.

Είναι: $(AB\Gamma) = (PB\Gamma) + (PA\Gamma) + (PAB) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot P\Delta + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot P\epsilon + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot P\zeta \Leftrightarrow$

$P\Delta + P\epsilon + P\zeta = \upsilon$ (το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου) = σταθερό.

Παρατήρηση: Η πρόταση αυτή εύκολα γενικεύεται για οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο.

Άσκηση 14η. Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABΓΔ ισχύει:

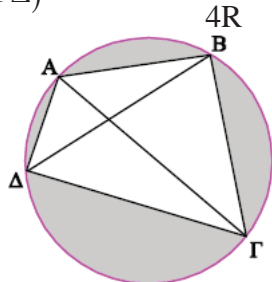
$\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{AB \cdot A\Delta + \Gamma B \cdot \Gamma\Delta}{BA \cdot B\Gamma + \Delta A \cdot \Delta\Gamma}$ (Θεώρημα Πτολεμαίου).

Λύση: Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ABΓΔ, έχουμε:

$(AB\Gamma) = \frac{BA \cdot B\Gamma \cdot A\Gamma}{4R}$ και $(A\Gamma\Delta) = \frac{\Delta A \cdot \Delta\Gamma \cdot A\Gamma}{4R}$

$$\text{\acute{a}\rho\alpha} \quad (AB\Gamma\Delta) = \frac{(BA \cdot B\Gamma + \Delta A \cdot \Delta\Gamma) \cdot A\Gamma}{4R} \quad (1).$$

$$\text{Όμοια:} \quad (AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB \cdot A\Delta + \Gamma B \cdot \Gamma\Delta) \cdot B\Delta}{4R} \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) παίρνουμε:
 $(BA \cdot B\Gamma + \Delta A \cdot \Delta\Gamma) \cdot A\Gamma =$

$$= (AB \cdot A\Delta + \Gamma B \cdot \Gamma\Delta) \cdot B\Delta \Rightarrow$$

$$\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{AB \cdot A\Delta + \Gamma B \cdot \Gamma\Delta}{BA \cdot B\Gamma + \Delta A \cdot \Delta\Gamma}.$$

Παρατηρήσεις. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία αναφέρονται και άλλα δυο θεωρήματα με το όνομα του Κλαύδιου Πτολεμαίου.

1ο Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABΓΔ ισχύει: $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot A\Delta$

2ο Για κάθε μη εγγράμημο τετράπλευρο ABΓΔ ισχύει: $AB \cdot \Gamma\Delta < A\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot A\Delta$

Άσκηση 15η. Από σημείο A εκτός κύκλου (O, R) φέρουμε τέμνουσα ABΓ και εφαπτόμενο τμήμα AΔ. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει τις BΔ, ΓΔ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύει ότι $E\Delta = 2 \cdot EB$. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\frac{EB}{E\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$ και $\frac{Z\Gamma}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$

ii) $EB \cdot Z\Gamma = E\Delta \cdot Z\Delta$

iii) $\frac{(ABE)}{(A\epsilon\Delta)} = \frac{(AZ\Delta)}{(AZ\Gamma)} = \frac{1}{2}$

iv) $\frac{(BEZ\Gamma)}{(ABE)} = \frac{2(AZ\Gamma)}{(A\epsilon\Delta)} - 1$

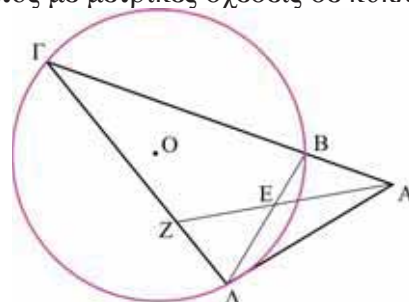
Λύση: i) Από θεώρημα διχοτόμων στα τρίγωνα ABΔ και AΓΔ έχουμε $\frac{EB}{E\Delta} = \frac{AB}{A\Delta}$ και

$$\frac{Z\Gamma}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}.$$

ii) Τα τρίγωνα ABΔ και AΓΔ είναι όμοια (γιατί;), οπότε έχουμε: $\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Delta}$ άρα από i) ερώ-

τημα $\frac{EB}{E\Delta} = \frac{Z\Delta}{Z\Gamma} \Leftrightarrow EB \cdot Z\Gamma = E\Delta \cdot Z\Delta$.

(B τρόπος με μετρικές σχέσεις σε κύκλο)



iii) $\frac{(ABE)}{(A\epsilon\Delta)} = \frac{AB \cdot AE}{A\Delta \cdot AE} = \frac{EB}{E\Delta} = \frac{1}{2}$

$$\frac{(AZ\Delta)}{(AZ\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{A\Gamma \cdot AZ} = \frac{Z\Gamma}{Z\Delta} = \frac{EB}{E\Delta} = \frac{1}{2}.$$

iv) $(BEZ\Gamma) = (AZ\Gamma) - (AEB) \Leftrightarrow$

$$\frac{(BEZ\Gamma)}{(AEB)} = \frac{(AZ\Gamma)}{(AEB)} - 1 \stackrel{\text{iii)}}{=} \frac{(AZ\Gamma)}{(A\epsilon\Delta)} - 1 = \frac{2(AZ\Gamma)}{(AEB)} - 1.$$

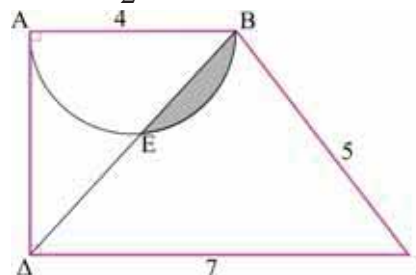
Άσκηση 16η. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ με $AB=4$, $B\Gamma=5$, $\Gamma\Delta=7$ και το ημικόκλιο διαμέτρου AB που τέμνει την διαγώνιο BΔ στο σημείο E. Να υπολογίσετε:

i) Το $(AB\Gamma\Delta)$. ii) Το μήκος του ΔE.

iii) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος.

Λύση: i) Φέρνουμε το ύψος BK και έχουμε $\Delta K = 4$, $K\Gamma = 3$ και $BK = 4$. Άρα

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(4+7) \cdot 4}{2} = 22$$



ii) Το ABKΔ είναι τετράγωνο, άρα το σημείο E είναι το μέσον της διαγωνίου BΔ (γιατί;).

Συνεπώς $\Delta E = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$.

iii) Το γραμμοσκιασμένο κυκλικό τμήμα αντιστοιχεί σε τεταρτοκύκλιο, άρα έχει εμβαδόν

$$E = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \pi - 2.$$

Βιβλιογραφία: Από συλλογές ασκήσεων των συναδέλφων Αθανάσιου Παππά και Σπύρου Καρδαμίτση.