

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ασκήσεις επανάληψης στη Γεωμετρία

Γιώργος Α. Κουσιγιώρης – Μαθηματικός, Διευθυντής του Γυμνασίου Γαστούνης Για το Παράρτημα Ν. Ηλείας της ΕΜΕ

Α. Ασκήσεις στις μετρικές σχέσεις

1. Σε κύκλο (O, R) δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα σε μεταβλητό σημείο M του κυκλικού δίσκου (O, R) .

Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2$ είναι σταθερό.

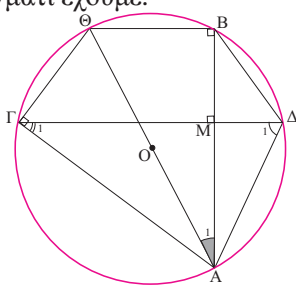
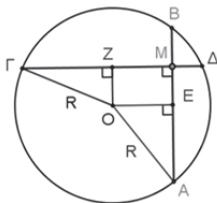
Λύση: Το ότι το παραπάνω άθροισμα είναι σταθερό σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου M .

Κατ' αρχήν προσπαθούμε να εντοπίσουμε ποιο είναι το σταθερό αυτό άθροισμα. Το σκεπτικό σε αυτές τις περιπτώσεις είναι να θεωρήσουμε τα μεταβλητά αντικείμενα σε μία οριακή θέση ή σε κάποια θέση που παρουσιάζει ιδιαιτερότητες. Εν προκειμένω θεωρούμε το M στο κέντρο του κύκλου. Τότε οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι διάμετροι οπότε $MA = MB = M\Gamma = M\Delta = R$ και συνεπώς είναι $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4R^2$ (1)

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε σημείο M του κυκλικού δίσκου ισχύει η (1).

Αλλά η ακτίνα εκφράζεται με βάση το απόστημα και το μισό κάθε χορδής.

Φέρνουμε λοιπόν τα αποστήματα OE και OZ των χορδών AB και $\Gamma\Delta$ αντιστοίχως, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τα $MA, MB, M\Gamma, M\Delta$ ως συνάρτηση των OE, EA και $OZ, Z\Gamma$. Πράγματι έχουμε:



$$MA^2 = (ME + EA)^2 = (OZ + EA)^2 =$$

$$OZ^2 + EA^2 + 2OZ \cdot EA \quad (2) \text{ και}$$

$$MB^2 = (EB - EM)^2 = (EA - OZ)^2 =$$

$$OZ^2 + EA^2 - 2OZ \cdot EA \quad (3)$$

Οι (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$MA^2 + MB^2 = 2(OZ^2 + EA^2) \quad (4)$$

Ομοίως έχουμε:

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2(OE^2 + Z\Gamma^2) \quad (5)$$

Οι (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 =$$

$$= 2[(OZ^2 + Z\Gamma^2) + (OE^2 + EA^2)] = 2(R^2 + R^2) = 4R^2$$

Β' Τρόπος: Προφανώς $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = (MA^2 + M\Gamma^2) + (MB^2 + M\Delta^2) = A\Gamma^2 + B\Delta^2$.

Αν λοιπόν Θ το αντιδιαμετρικό του A τότε $4R^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Theta^2$. Αρκεί λοιπόν $\Delta B = \Gamma\Theta$, ή

$\widehat{\Delta B} = \widehat{\Gamma\Theta}$, ή $\Theta B // \Gamma\Delta$, που ισχύει αφού:

$$\Theta\hat{B}A = 90^\circ \Rightarrow \Theta B \perp AB \Rightarrow \Theta B // \Gamma\Delta.$$

Παράπλευρα συμπέρασματα

$$1) \widehat{M\Gamma B} = \widehat{\Delta M B} \Rightarrow \frac{\widehat{\Gamma\Theta} + \widehat{\Theta B} + \widehat{A\Delta}}{2} = \frac{\widehat{\Delta B} + \widehat{A\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\widehat{\Theta B} + \widehat{A\Delta} = \widehat{A\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$$

2) Αν K, Λ τα μέσα των $A\Gamma, B\Delta$ αντιστοίχως τότε $MK^2 + M\Lambda^2 = 2R^2$

3) Αν Σ το μέσον του $K\Lambda$ τότε από θεώρημα διαμέσων βρίσκουμε $4M\Sigma^2 + K\Lambda^2 = 4R^2$. Υπάρχει περίπτωση το Σ να ταυτίζεται με το M και $K\Lambda = R\sqrt{2}$;

2. Δίνεται κύκλος (O, R) και σταθερό σημείο Σ στο εσωτερικό του. Από το Σ φέρνουμε δύο μεταβλητές χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται κάθετα. Να δείξετε ότι το άθροισμα $AB^2 + \Gamma\Delta^2$ είναι σταθερό.

Λύση: Έστω $O\Sigma = \delta$. Το ότι το

άθροισμα $AB^2 + \Gamma\Delta^2$ είναι

σταθερό σημαίνει ότι δεν

εξαρτάται από τη θέση των χορδών AB και $\Gamma\Delta$. Αν

θεωρήσουμε την AB διάμετρο, τότε είναι

$$AB^2 = (2R)^2 = 4R^2 \text{ και}$$

$$\Gamma\Delta^2 = (2\Gamma\Sigma)^2 = 4\Gamma\Sigma^2 = \dots =$$

$$= 4R^2 - 4\delta^2.$$

Επομένως $AB^2 + \Gamma\Delta^2 =$

$$= 8R^2 - 4\delta^2 \quad (1).$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι η (1)

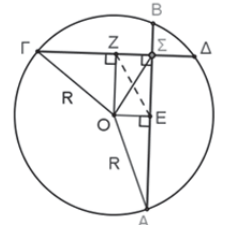
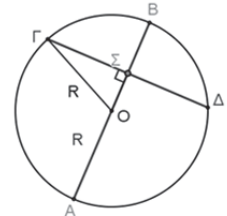
ισχύει ανεξάρτητα από τη

θέση των χορδών AB και $\Gamma\Delta$. Όπως προηγουμένως

εκφράζουμε τις $AB, \Gamma\Delta$ ως συνάρτηση της ακτίνας

και των αποστημάτων τους OE, OZ Έχουμε:

$$AB^2 = (2AE)^2 = 4AE^2 =$$



$$=4(OA^2 - OE^2) = 4R^2 - 4OE^2 \quad (2)$$

$$\text{Ομοίως: } \Gamma\Delta^2 = (2\Gamma Z)^2 = 4\Gamma Z^2 =$$

$$=4(O\Gamma^2 - OZ^2) = 4R^2 - 4OZ^2 \quad (3)$$

Οι (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = 8R^2 - 4(OE^2 + OZ^2) = 8R^2 - 4ZE^2 = 8R^2 - 4\delta^2, \text{ αφού το } OE\Sigma Z \text{ είναι ορθογώνιο, οπότε } ZE = O\Sigma = \delta.$$

Β΄ Τρόπος: Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση και τη δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο έχουμε:

$$AB^2 = (\Sigma A + \Sigma B)^2 = \Sigma A^2 + \Sigma B^2 + 2\Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma A^2 + \Sigma B^2 + 2(R^2 - \delta^2)$$

$$\text{και } \Gamma\Delta^2 = (\Sigma\Gamma + \Sigma\Delta)^2 = \Sigma\Gamma^2 + \Sigma\Delta^2 + 2\Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta = \Sigma\Gamma^2 + \Sigma\Delta^2 + 2(R^2 - \delta^2). \text{ Άρα}$$

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = 4R^2 + 4(R^2 - \delta^2) = 8R^2 - 4\delta^2.$$

3. Με διαμέτρους τις πλευρές εγγεγραμμένου σε δοσμένο κύκλο ισόπλευρου τριγώνου και έξω από το τρίγωνο γράφουμε τρία ημικύκλια. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου κατά το 1/8 του εμβαδού του δοθέντος κύκλου.

Λύση: Ας είναι R η ακτίνα του κύκλου, τότε η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $a = R\sqrt{3}$.

Αν είναι μ το εμβαδό των τριών μηνίσκων, τότε για το σκιασμένο εμβαδό ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} \mu &= (AB\Gamma) + 3E_{\eta\mu\kappa} - E_{\kappa\omega\kappa} = \\ &= (AB\Gamma) + 3 \cdot \frac{1}{2} \pi \frac{a^2}{4} - \pi R^2 = (AB\Gamma) + \frac{3\pi \cdot 3R^2}{8} - \frac{8\pi R^2}{8} = \\ &= (AB\Gamma) + \frac{9\pi R^2 - 8\pi R^2}{8} = (AB\Gamma) + \frac{\pi R^2}{8}, \end{aligned}$$

$$\text{οπότε } \mu - (AB\Gamma) = \frac{1}{8} \pi R^2.$$

B. Ασκήσεις στη Στερεομετρία

1. Να αποδειχθεί ότι ένας κύκλος και ένα επίπεδο (Π) το οποίο δεν τον περιέχει έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Λύση: Έστω (ρ) το επίπεδο του κύκλου (O, R). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- (ρ) // (Π). Στην περίπτωση αυτή τα επίπεδα δεν έχουν κοινά σημεία οπότε ο κύκλος (O, R) και το επίπεδο (Π) δεν έχουν κοινά σημεία.

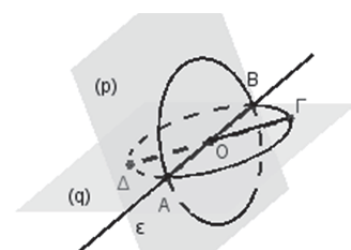
- (ρ) // (Π). Τότε τα επίπεδα (ρ) και (Π) τέμνονται κατά ευθεία (ε).

Συνεπώς τα κοινά σημεία του κύκλου (O, R) και του επιπέδου (Π) είναι τόσα όσα και τα κοινά σημεία του κύκλου με την ευθεία (ε) με την οποία είναι συνεπίπεδος. Μια ευθεία και ένας κύκλος στο επίπεδο έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, συνεπώς ο κύκλος (O, R) και το επίπεδο (Π) έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Άρα σε κάθε περίπτωση ο κύκλος (O, R) και το επίπεδο (Π) έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

2. Να αποδειχθεί ότι δύο ίσοι ομόκεντροι κύκλοι που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο έχουν μία μόνο κοινή διάμετρο.

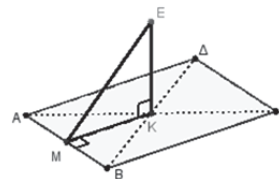
Λύση: Επειδή οι κύκλοι έχουν κοινό κέντρο, έστω O, τα επίπεδά τους (ρ) και (q) έχουν κοινό σημείο το O οπότε έχουν κοινή



μία ευθεία (ε) που περιέχει το O. Η ευθεία (ε) τέμνει και τους δύο κύκλους στα σημεία A και B οπότε έχουν κοινή διάμετρο την AB.

Αν οι κύκλοι είχαν και άλλη κοινή διάμετρο τη ΓΔ τότε τα Γ και Δ δεν ανήκουν στην (ε) αλλά ανήκουν στα επίπεδα (ρ) και (q), οπότε τα (ρ) και (q) έχουν κοινή την ευθεία (ε) και κοινό σημείο εκτός αυτής (το Γ ή το Δ), επομένως τα επίπεδα αυτά συμπίπτουν αφού μια ευθεία και ένα σημείο ορίζουν μόνο ένα επίπεδο.

3. Δίνεται ορθογώνιο ABΓΔ και μια ευθεία (ε) κάθετη στο επίπεδό του στο κέντρο του K. Πάνω στην (ε) παίρνουμε τυχαίο σημείο E. Αν M είναι το μέσον της AB, να δείξετε ότι ME ⊥ AB.

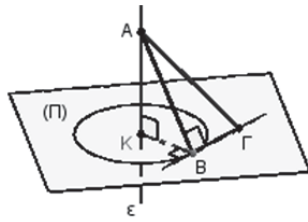


Λύση: Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι $KM \perp AB$ (γιατί;). Έχουμε $EK \perp (AB\Gamma\Delta)$ και $KM \perp AB$ επομένως από το θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι $ME \perp AB$.

4. Θεωρούμε ένα επίπεδο (Π) και ένα σημείο του K. Θεωρούμε ευθεία (ε) κάθετη στο (Π) στο σημείο K και πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο A έτσι ώστε AK=10cm. Πάνω στο επίπεδο (Π) γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο K και ακτίνα 8cm. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε ένα σημείο του B και πάνω σε αυτή παίρνουμε τμήμα BΓ = 4√2cm. Να υπολογιστεί το μήκος του τμήματος ΑΓ.

Λύση: Είναι $AK \perp (\Pi)$ και $KB \perp B\Gamma$ (γιατί),

οπότε από το θεώρημα τριών καθέτων είναι $AB \perp B\Gamma$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB από το πυθαγόρειο



θεώρημα έχουμε: $AB^2 = AK^2 + KB^2 = 10^2 + 8^2 = 164$

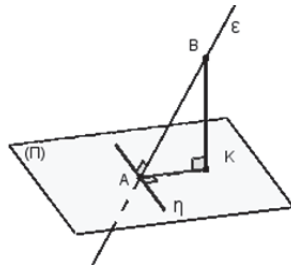
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ επίσης από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = 164 + (4\sqrt{2})^2 = 196$$

Οπότε $A\Gamma = \sqrt{196} = 14$ (Σε cm).

5. Δίνεται ένα επίπεδο (Π) και μία ευθεία (ϵ) που δεν ανήκει στο (Π) , δεν είναι κάθετη σ' αυτό και το τέμνει σε ένα σημείο A . Να δείξετε ότι υπάρχει μία μόνο ευθεία του (Π) που είναι κάθετη με την ευθεία (ϵ) .

Λύση: Πάνω στην ευθεία (ϵ) παίρνουμε σημείο B διαφορετικό του A και από το B φέρνουμε τη BK κάθετη στο (Π) .



Θεωρούμε την ευθεία (η) του (Π) κάθετη στην AK στο σημείο A . Επειδή $BK \perp (\Pi)$ και

$AK \perp (\eta)$, από το θεώρημα τριών καθέτων προκύπτει ότι $AB \perp (\eta)$.

Η ευθεία (η) είναι η μοναδική κάθετη στην (ϵ) γιατί αν υπήρχε και δεύτερη ευθεία του (Π) κάθετη στην (ϵ) , τότε η (ϵ) θα ήταν κάθετη στο επίπεδο (Π) ως κάθετη σε δύο ευθείες του (Π) , πράγμα άτοπο.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και μια ευθεία (ϵ) κάθετη στο επίπεδό του στο μέσο M της υποτεινούςας του. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της (ϵ) ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$.

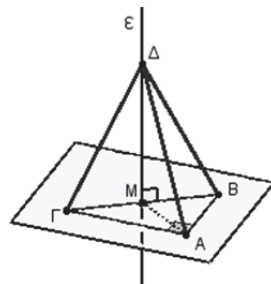
Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η MA είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα οπότε

$$\text{είναι } MA = \frac{B\Gamma}{2} = MB$$

$$= M\Gamma.$$

Επειδή $(\epsilon) \perp (A, B, \Gamma)$

θα είναι $(\epsilon) \perp B\Gamma$ και



$(\epsilon) \perp AM$ (γιατί;) οπότε τα τρίγωνα ΔMA , ΔMB και $\Delta M\Gamma$ είναι ορθογώνια στο M και προφανώς είναι ίσα αφού έχουν τη $M\Delta$ κοινή και $MA = MB = M\Gamma$. Επομένως είναι $\Delta A = \Delta B = \Delta \Gamma$.

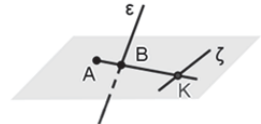
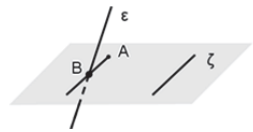
7. Από ένα σημείο A που δεν ανήκει σε κάποια από δύο ασύμβατες ευθείες (ϵ) και (ζ) να φέρετε ευθεία που τέμνει και τις δύο αυτές ασύμβατες ευθείες.

Λύση: Θεωρούμε το επίπεδο που ορίζει η μία από τις δύο ασύμβατες, έστω η (ζ) και το σημείο A . Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\epsilon \not\parallel (A, \zeta)$.

Στην περίπτωση αυτή η (ϵ) τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο B .

Αν είναι $AB \parallel \zeta$ τότε η ζ είναι παράλληλη με το επίπεδο που ορίζουν η AB και η ϵ και επομένως οποιαδήποτε ευθεία του που διέρχεται από το A δεν μπορεί να τέμνει τη ζ , αφού αυτή βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο με τη ζ .

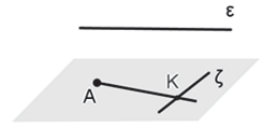


Αν η ευθεία AB δεν είναι παράλληλη με τη ζ τότε την τέμνει σε σημείο K . Η AB είναι προφανώς η ζητούμενη ευθεία.

- $\epsilon \parallel (A, \zeta)$.

Στην περίπτωση αυτή οποιαδήποτε ευθεία

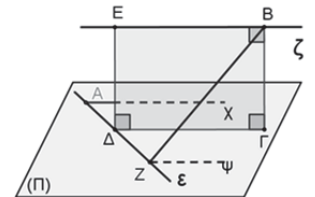
διέρχεται από το A και τέμνει τη ζ βρίσκεται στο επίπεδο (A, ζ) που είναι παράλληλο με την (ϵ) και συνεπώς δεν τέμνει την ευθεία ϵ .



8. Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες (ϵ) και (ζ) . Να δείχθει ότι υπάρχει μία μόνο ευθεία που είναι κάθετη και στις δύο ασύμβατες ευθείες (ϵ) και (ζ) .

Λύση: Θεωρούμε δύο ασύμβατες ευθείες (ϵ) και (ζ) . Από ένα σημείο A της μιας, έστω της ϵ φέρνουμε την $Ax \parallel \zeta$ και ονομάζουμε (Π) το επίπεδο που ορίζουν η (ϵ) και η Ax . Τότε $\zeta \parallel Ax \Rightarrow \zeta \parallel (\Pi)$. Από ένα σημείο B της (ζ) φέρνουμε $B\Gamma \perp (\Pi)$, οπότε είναι και $B\Gamma \perp \zeta$.

Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την Ax που τέμνει την (ϵ) στο Δ . Από το Δ φέρνουμε την παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που, προφανώς, θα τμήσει τη (ζ) σε σημείο E . Είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma \perp (\Pi)$



οπότε είναι $\Delta E \perp (\Pi)$ και επομένως $\Delta E \perp \varepsilon$.
 Επειδή $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma \perp \zeta$ θα είναι και $\Delta E \perp \zeta$.
 Συνεπώς η ΔE είναι η ζητούμενη κοινή κάθετος των δύο ασυμβάτων ευθειών (ε) και (ζ). Η ΔE είναι η μοναδική κοινή κάθετος των ασυμβάτων γιατί αν υπήρχε και άλλη για παράδειγμα η BZ τότε θα ήταν $BZ \perp \varepsilon$, $Z \neq \Gamma$ (γιατί;). Αν $Z\psi \parallel \zeta$, τότε $BZ \perp \zeta \Rightarrow BZ \perp Z\psi \Rightarrow BZ \perp (\Pi)$ ως κάθετη στις ευθείες του $Z\psi$, ε . Άρα $Z \equiv \Gamma$, άτοπο (Για να μην περιπλέξουμε το σχήμα θεωρήσαμε ως ένα σημείο της δεύτερης κοινής καθετούς το σημείο B της ζ αντί τυχαίου σημείου Θ αυτής. Αυτό προφανώς δεν περιορίζει τη γενικότητα).

Συνοπτότερα:

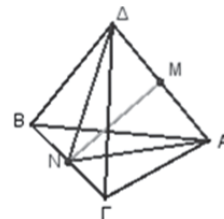
$E\Delta \perp (\Pi)$, $BZ \perp (\Pi) \Rightarrow E\Delta \parallel BZ \Rightarrow E, \Delta, B, Z$ συνεπίεδα $\Rightarrow EB, \Delta Z$ συνεπίεδες, άτοπο.

9. Σε στρεβλό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ (στρεβλό ονομάζεται το τετράπλευρο που οι κορυφές του δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο) οι απέναντι πλευρές

του είναι ίσες. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι η κοινή κάθετός τους.

Λύση: Έστω $AB\Gamma\Delta$ το δεδομένο στρεβλό τετράπλευρο με $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Gamma = B\Delta$. Έστω M, N τα μέσα των διαγωνίων του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντιστοίχως.

Θα δείξουμε ότι $MN \perp A\Delta$ και $MN \perp B\Gamma$. Για να είναι $MN \perp A\Delta$ αρκεί στο τρίγωνο $AN\Delta$ η MN εκτός από διάμεσος να είναι και ύψος δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $NA = N\Delta$.



Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν ίσες πλευρές ($AB = \Gamma\Delta$, $A\Gamma = B\Delta$ και τη $B\Gamma$ κοινή) θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες διαμέσους $NA = N\Delta$. Ομοίως αποδεικνύεται η καθετότητα της MN με τη $B\Gamma$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στέργιος Τουρναβίτης

1. Με σκοπό την σχεδίαση ενός καραβιού, ένας μαθητής Δημοτικού σχολείου ζωγράφισε αρχικά ένα ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις $AB = 5 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 17 \text{ cm}$.

Μπορείτε να τον βοηθήσετε να υπολογίσει το ύψος u , τις μη παράλληλες πλευρές του y και τις διαγώνιες δ , αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν αυτού του τραπέζιου, καταλαμβάνει το $\frac{1}{4}$ της επιφάνειας ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 22 cm και 16 cm ;

Λύση: Για να υπολογίσουμε το ύψος u του τραπέζιου εφόσον γνωρίζουμε τις βάσεις και ότι το εμβαδόν του E είναι το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ορθογωνίου $EZ\Gamma\Delta$, έχουμε:

$$E = \frac{(AB + \Gamma\Delta) \cdot u}{2} = \frac{1}{4} EZ \cdot E\Delta$$

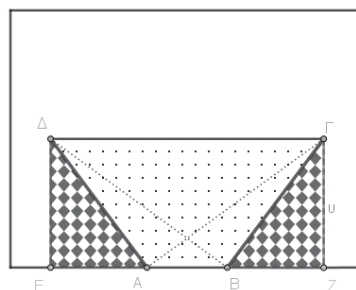
$$\Rightarrow \frac{(5 + 17) \cdot u}{2} = \frac{1}{4} 22 \cdot 16 \Rightarrow \dots \Rightarrow u = 8 (\text{Σε cm}).$$

Αν από τα Γ και Δ φέρουμε τις κάθετες αποστάσεις στην απέναντι βάση AB , τα μήκη αυτά των καθετών πλευρών, είναι ίσα μεταξύ τους, όπως είναι ίσα και τα ορθογώνια τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $B\zeta\Gamma$ (γιατί;).

Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων, μπορούμε να θέσουμε $A\epsilon = B\zeta = z$ και $A\Delta = B\Gamma = y$.

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$2z + 5 = 17 \Rightarrow z = 6 (\text{Σε cm})$$



Εφαρμόζουμε το Π.Θ. σ' ένα από αυτά κι' έχουμε: $y = \sqrt{8^2 + 6^2} = \dots = 10 (\text{Σε cm})$ είναι τα ίσα μήκη των μη παράλληλων πλευρών.

Για να βρούμε τις διαγώνιες δ , εφαρμόζουμε το Π.Θ. σ' ένα από τα επίσης ίσα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\epsilon B$, $\Gamma\zeta A$ (γιατί;) κι' έχουμε:

$$\delta = \sqrt{8^2 + 11^2} = \dots \approx 13.6 (\text{Σε cm}).$$

2. Ένα κανονικό πολύγωνο με άγνωστο αριθμό πλευρών n , έχει εμβαδόν $E_n = 8$. Η γωνία ϕ_n του κανονικού πολυγώνου που έχει τετραπλάσιο αριθμό πλευρών μ σε σχέση με αυτό ($\mu = 4 \cdot n$), είναι: $\hat{\phi}_\mu = 157^\circ 30'$. Να υπολογισθούν:

2α) Ο αριθμός των πλευρών n του κανονικού n -γώνου,

2β) Η πλευρά του λ_n ,

2γ) Το απόστημά του α_v και,

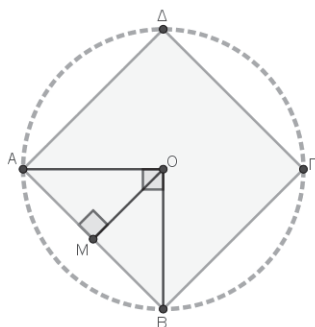
2δ) Η περιμέτρος του P_v

Λύση: 2α) Για την γωνία $\varphi_\mu = 157^\circ 30'$ του κανονικού μ -γώνου, ισχύει:

$$\varphi_\mu = 157^\circ 30' = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\mu} \Rightarrow$$

$$157.5^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\mu} \Rightarrow \dots \Rightarrow \mu = 16.$$

Επειδή $v = \frac{1}{4}\mu$, $v=4$.



2β) Το εμβαδόν E_4 του τετραγώνου δίνεται από

τον τύπο: $E_4 = 4 \cdot \frac{1}{2} \lambda_4 \cdot \alpha_4 = 8 \Rightarrow \lambda_4 \cdot \alpha_4 = 4$ (1)

Γνωρίζουμε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου R

η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Αντικαθιστούμε στην (1) την πλευρά λ_4 και το απόστημα

α_4 , κι' έχουμε: $R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = 4 \Rightarrow$

$\dots \Rightarrow R = 2$. Επομένως: $\lambda_4 = 2\sqrt{2}$,

2γ) $\alpha_4 = \sqrt{2}$ και, 2δ) $P_4 = 8\sqrt{2}$.

3. Η πλευρά και το απόστημα ενός κανονικού πολυγώνου που είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο έχουν μέτρα $6\sqrt{3}$ και 9 αντιστοίχως.

Να βρεθούν:

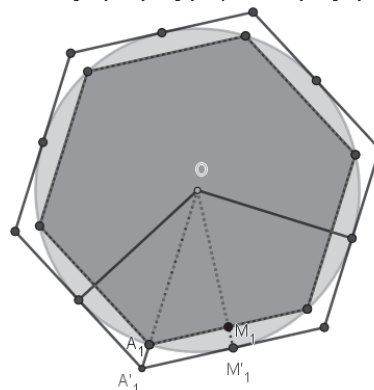
3α) Η πλευρά, το απόστημα, του κανονικού πολυγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο και έχει τον ίδιο αριθμό πλευρών με αυτό.

3β) Το συνολικό εμβαδό των κυκλικών τμημάτων που είναι μεταξύ του κύκλου και του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου.

Λύση: 3α) Γνωρίζουμε ότι δύο κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, είναι όμοια.

Αν π.χ. κατασκευάσουμε σ' έναν κύκλο ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σ' αυτό και στα μέσα των τόξων του φέρουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο και ενώσουμε τα σημεία τομής αυτών των εφαπτομένων, θα δημιουργήσουμε κατ' αυτό τον τρόπο ένα κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο στον

ίδιο κύκλο. Μ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται και το περιγεγραμμένο κανονικό v -γώνο, όταν έχουμε κατασκευάσει το αντίστοιχο ομόλογό του εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Γι' αυτό στη συνέχεια αναφερόμαστε στο τυχαίο κανονικό v -γώνο όπου v φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3.



Παρατηρούμε ότι το απόστημα α'_v του περιγεγραμμένου κανονικού v -γώνου, ταυτίζεται με την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου στο κανονικό v -γώνο που είναι εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Ονομάζουμε λ_v , α_v την πλευρά και το απόστημα του εγγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού v -γώνου και λ'_v , α'_v την πλευρά και το απόστημα του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού v -γώνου, αντίστοιχα. Από την σχέση ομοιότητας των δύο ορθογωνίων τριγώνων A_1M_1O , $A'_1M'_1O$, έ-

χουμε: $\frac{\lambda_v}{\lambda'_v} = \frac{\alpha_v}{R} \Rightarrow \frac{\lambda_v}{6\sqrt{3}} = \frac{\alpha_v}{9} \Rightarrow \alpha_v = \frac{\lambda_v\sqrt{3}}{2}$ (1)

Επίσης από την σχέση που συνδέει την πλευρά και το απόστημα, ισχύει:

$$\frac{\lambda_v^2}{4} + \alpha_v^2 = 9^2 \Rightarrow \frac{\lambda_v^2}{4} + \left(\frac{\lambda_v\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_v^2}{4} + \left(\frac{\lambda_v\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_v = 9$$
 (2) και

$\alpha_v = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. Επειδή όπως είπαμε: $\alpha'_v = R = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_v = R = 9$, συμπεραίνουμε ότι $v=6$. (γιατί;)

3β) Το εμβαδόν του καθενός από τα ίσα κυκλικά τμήματα έστω τ , προκύπτει αν από το εμβαδόν του

κυκλικού τομέα $\frac{\pi R^2}{6}$, αφαιρέσουμε το εμβαδόν

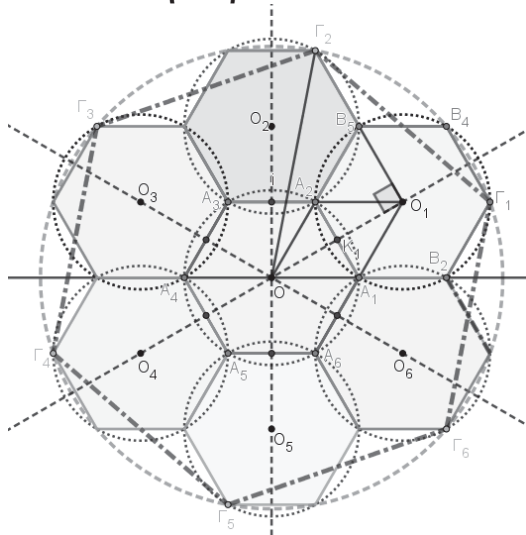
ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς R .

Άρα: $\tau = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \tau = \frac{R^2}{12} \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})$.

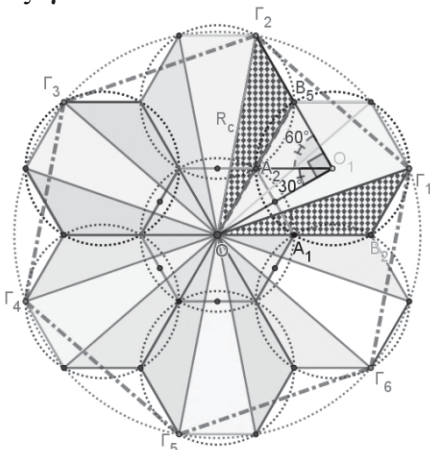
Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$6\tau = \frac{R^2}{2} \cdot (2\pi - 3\sqrt{3}) \Rightarrow 6\tau = \frac{81}{2} \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})$$

4. Γύρω από τις πλευρές ενός κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνας $R=1$, «χτίζουμε» άλλα 6 κανονικά εξάγωνα ίσα προς αυτό. Η κατασκευή π.χ. του $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$ γίνεται όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



Αρχικά φέρουμε την κάθετη στην A_1A_2 , βρίσκουμε το συμμετρικό O_1 του O ως προς αυτή και εγγράφουμε στον κύκλο (O_1, O_1A_1) ένα κανονικό εξάγωνο.



Να αποδείξετε ότι:

4α) Τα 6 κανονικά εξάγωνα που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο, είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ίσης ακτίνας $R=1$, με αυτή του αρχικού κεντρικού εξαγώνου.

4β) Τα σημεία O, A_2, B_5 είναι συνευθειακά.

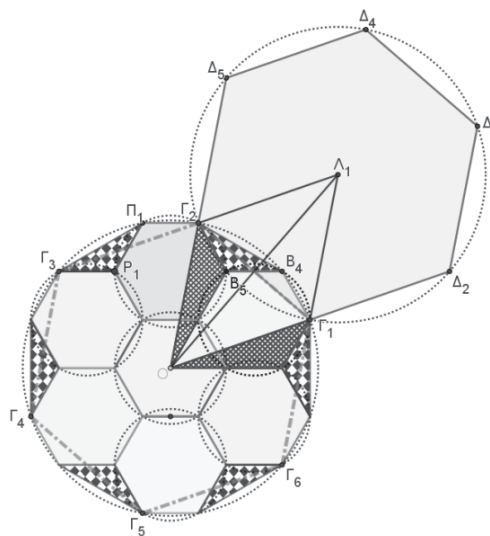
4γ) Αν ενώσουμε τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ που είναι ανά ένα κορυφές των προηγούμενων κανονικών εξαγώνων, δημιουργείται ένα εξάγωνο. Αφού αποδείξετε ότι είναι κανονικό, να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας $R=1$, την

ακτίνα του R_C .

4δ) Τέλος, αν φέρουμε την κάθετη στην $\Gamma_1\Gamma_2$ και βρούμε το συμμετρικό Λ_1 του O ως προς αυτή, μπορούμε να αποδείξουμε με παρόμοιο τρόπο όπως στο 4α) ερώτημα ότι το εξάγωνο $\Gamma_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4\Delta_5\Gamma_2$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο $(\Lambda_1, \Lambda_1\Gamma_1)$, είναι κανονικό.

4δi) Με τι ισούται η απόσταση $d = O\Lambda_1$ των κέντρων των δύο κανονικών εξαγώνων;

4δii) Να αποδείξετε ότι $d = \sqrt{3} \cdot R_C$.



Λύση: 4α) Το τετράπλευρο $OA_1O_1A_2$ είναι ρόμβος γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα. Επομένως το σημείο O_1 (το συμμετρικό του O ως προς την A_1A_2), θα ισαπέχει από τα σημεία A_1 και A_2 , ίδια απόσταση με την πλευρά $\lambda_6 = R = 1$, του αρχικού (κεντρικού) κανονικού εξαγώνου. Εφόσον εγγράφουμε στον κύκλο (O_1, O_1A_1) το κανονικό εξάγωνο $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$, η τελευταία κορυφή του (η A_2) θα συμπίπτει με το άλλο άκρο του τμήματος A_1A_2 που είναι ταυτόχρονα και πλευρά του αρχικού εξαγώνου με μήκος $R=1$, όσο και η ακτίνα των δύο κύκλων. Καθένα από αυτά τα τόξα των διαδοχικών κορυφών του $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$ είναι 60° . Ομοια αποδεικνύεται ότι και τα άλλα 5 κανονικά εξάγωνα με τον τρόπο που κατασκευάζονται είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνας $R = 1$.

4β) Οι γωνίες $B_5\hat{A}_2O_1, O_1\hat{A}_2A_1, A_1\hat{A}_2O$ είναι γωνίες ισοπλευρών τριγώνων (ποιων;) και κάθεμιά τους είναι 60° . Επομένως το άθροισμά τους θα είναι η ευθεία γωνία $B_5\hat{A}_2O_1 = 180^\circ$.

4γ) Το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήμα-

τος μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τα τμήματα OA_2 και A_2B_5 ως ευρισκόμενα στην ίδια ευθεία και με άθροισμα $2R=2$, που ταυτίζεται με το μήκος του OB_5 . Τα σκιασμένα με μωβ τετραγωνίδια τρίγωνα, έχουν: δύο πλευρές ίσες (με μήκη 2, 1) και την περιεχόμενη γωνία ίση με $\varphi_6 = 120^\circ$. Αν κοιτάξουμε προσεκτικά το σχήμα υπάρχουν άλλα 10 ίσα τρίγωνα που έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία με αυτά. Στην πραγματικότητα υπάρχουν 6 ζευγάρια (λαμβάνομένων διαδοχικά με κοινή πλευρά π.χ. την OB_5) ίσα αμβλυγώνια και ανάμεσα σ' αυτά τα ίσα ζευγάρια, υπάρχουν άλλα 6 ισοσκελή και ίσα μεταξύ τους τρίγωνα (μπορείτε να τα εντοπίσετε στο σχήμα;).

Είναι προφανές ότι από τις παραπάνω ιδιότητες ότι το O ισαπέχει από τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$, άρα αυτά τα 6 σημεία βρίσκονται πάνω σε κύκλο. Μένει να αποδείξουμε ότι αυτά τα σημεία, χωρίζουν τον κύκλο σε 6 ίσα τόξα. Αν παρατηρήσουμε τα γραμμοσκιασμένα με την σκίαση της σκακέρας αμβλυγώνια και ισοσκελή τρίγωνα στο τελευταίο σχήμα της άσκησης, αυτά έχουν από 2 πλευρές ίσες με την ακτίνα $R=1$ και τις περιεχόμενες γωνίες από 120° (γιατί;). Άρα κάθε τόξο κάθε πλευράς του εξαγώνου $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6$ είναι το άθροισμα δύο ίσων τόξων, αφού στο καθένα από αυτά αντιστοιχούν δύο ίσες χορδές. Π.χ. στην πλευρά-χορδή του κύκλου $\Gamma_1\Gamma_2$, αντιστοιχεί το τόξο της χορδής Γ_1B_4 συν το τόξο της χορδής $B_4\Gamma_2$. Και για τις άλλες 5 πλευρές το ίδιο ισχύει. Τα τόξα είναι μεταξύ τους ίσα, το ίδιο και οι πλευρές του εξαγώνου γιατί σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα και αντιστρόφως. Κάθε τώρα εγγεγραμμένη γωνία αυτού του εξαγώνου, βαίνει σε 6-2 τόξα των 60° . Επομένως όλες οι γωνίες είναι ίσες με $\varphi_6 = 120^\circ$.

Το εξαγώνο $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6$ είναι κανονικό γιατί έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες. Όσον αφορά τον υπολογισμό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του εξαγώνου (ή της ακτίνας της συστάδας όπως λέγεται στην τεχνολογία των κυψελωτών δικτύων) μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

1^{ος} τρόπος: Εφαρμόζουμε το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο (γιατί;) $OO_1\Gamma_2$ κι' έχουμε:

$$R_c^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7 \Rightarrow R_c = \sqrt{7}.$$

2^{ος} τρόπος: Σύμφωνα με το Θεώρημα των συνημιτόνων σ' ένα από τα 12 ίσα αμβλυγώνια τρίγωνα π.χ. το $OB_5\Gamma_2$ ισχύει:

$$R_c^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \text{συν}(120^\circ) \Rightarrow \dots \Rightarrow R_c = \sqrt{7}$$

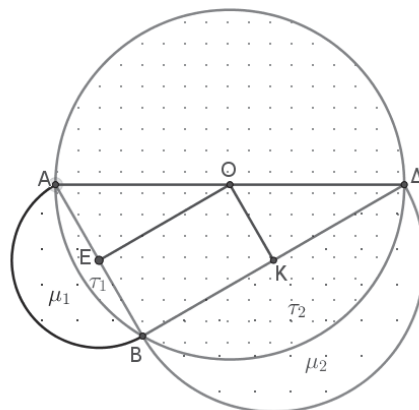
4δ_i) & 4δ_{ii}) Η απόσταση d είναι ίση με το διπλάσιο του ύψους ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς R_c .

$$\text{Επομένως } d = 2 \cdot \frac{R_c \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot R_c \Rightarrow d = \sqrt{21}$$

5. Σε κύκλο με διάμετρο την AD γράφουμε δύο ημικύκλια εκτός του κύκλου. Το ένα έχει διάμετρο τη χορδή BA τόξο 120° και το άλλο διάμετρο την AB , όπως δείχνει η παρακάτω εικόνα.

5α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ ή το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $EBKO$ όπου K και E τα μέσα των χορδών AB, BA αντίστοιχα.

5β) Αν $BA = 5\sqrt{3}$ m να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων και των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων, είναι: $E = \mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = 12.5\pi$.



Λύση: 5α) Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο στο B . Επίσης η γωνία του Δ είναι 30° . Άρα $AB = R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου. (γιατί;) Όπως γνωρίζουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Delta$ συναρτήσει της ακτίνας R , αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς του BA , αφού αυτό ισούται με το ημιγινόμενο των καθέτων πλευρών του. Η BA μπορεί να υπολογιστεί είτε από το $\text{συν}(30^\circ)$, είτε από το Π.Θ. είτε ακόμη από το ότι είναι κατευθείαν $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ αφού αντιστοιχεί σ' αυτήν επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}_3 = 120^\circ$.

$$\text{Επομένως: } E = (AB\Delta) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών κάθε μηνίσκου μαζί με το αντίστοιχο κυκλικό τμήμα, δίνει το εμβαδόν του ημικυκλίου στο οποίο περιέχονται. Αυτό εκφράζεται από τις δύο σχέσεις:

$$\mu_1 + \tau_1 = \pi \cdot \frac{R^2}{8} \quad (1)$$

$$\mu_2 + \tau_2 = 3\pi \cdot \frac{R^2}{8} \quad (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1), (2), έχουμε:

$$\mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad (3), \text{ το οποίο ταυτίζεται με}$$

το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ δίνει επίσης το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΔ. Οπότε έχουμε:

$$\tau_1 + \tau_2 + (ΑΒΔ) = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad (4)$$

$$\mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 + (ΑΒΔ) \quad (5)$$

Η σχέση (5) αποδεικνύει το 1^ο σκέλος του ερωτήματος. Για το 2^ο σκέλος αρκεί να αναλύσουμε το εμβαδόν του ΑΒΔ που βρήκαμε προηγουμένως, όπως παρακάτω:

$$E = (ΑΒΔ) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{R \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{2} = 2 \cdot (ΕΒΚΟ)$$

5β) Σύμφωνα με την εκφώνηση ΒΔ = 5√3 m. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι ακόμη και, ΒΔ = R√3 m. Από αυτές τις δύο ισότητες συμπεραίνουμε ότι R = 5m.

Όπως φαίνεται και από την ισότητα (3) του προηγούμενου ερωτήματος, $\mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = \frac{1}{2}\pi R^2$ (3)

Αντικαθιστούμε στο 2^ο μέλος της ισότητας αυτής το R=5 κι' έχουμε: $\mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = 12.5\pi$

6. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ, τέμνονται έτσι ώστε η διάκεντρος ΟΚ να είναι ίση με την κοινή χορδή ΑΒ.

6α) Να δικαιολογήσετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΒΚ είναι τετράγωνο.

Περιμετρικά αυτού του τετραγώνου κατασκευάζουμε άλλα 4 ίσα τετράγωνα, τα ΑΕΙΟ, ΟΒΣΤ, ΚΒΠΡ και ΚΑΛΜ.

6β) Να αποδείξετε ότι τα 6 μικτόγραμμα τρίγωνα ΑΛΜ, ΙΕΑ, ΒΣΤ, ΒΠΡ, ΑΚΒ, ΑΟΒ έχουν ίσα εμβαδά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του καθενός από αυτά, συναρτήσει της ακτίνας ρ των δύο ίσων κύκλων.

Αν γνωρίζουμε ότι το συνολικό εμβαδόν των 6 μικτόγραμμων τριγώνων είναι: 96 - 24π, να υπολογισθούν:

6γ) Η ακτίνα ρ των δύο ίσων κύκλων και,

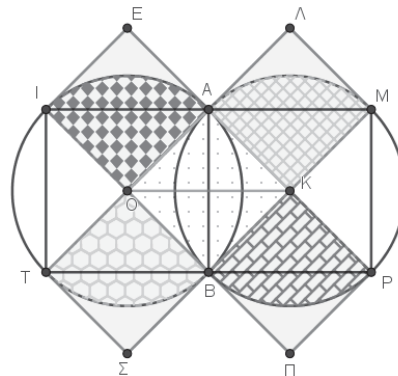
7δ) το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

Λύση: 6α) Το τετράπλευρο ΑΟΒΚ είναι τετράγωνο γιατί οι διαγώνιοί του είναι και μεσοκάθετοι η

μία της άλλης και επιπλέον είναι και ίσες.

6β) Το εμβαδόν καθενός από τα 6 μικτόγραμμα τρίγωνα, έστω Ε, προκύπτει αν από ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με ρ, αφαιρέσουμε ένα κυκλικό τμήμα εμβαδού έστω τ.

Είναι προφανές ότι τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους επειδή έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες με την ακτίνα ρ των δύο ίσων κύκλων. Καθένα από τα κυκλικά τμήματα εμβαδού τ, προκύπτει αν από ένα τεταρτοκύκλιο (κυκλικός τομέας επίκεντρης γωνίας 90^ο) και ακτίνας ρ, αφαιρέσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με ρ.



Όλα αυτά συνοψίζονται στις δύο ισότητες:

$$E = \frac{1}{2}\rho^2 - \tau \quad (1), \quad \tau = \frac{\pi\rho^2}{4} - \frac{1}{2}\rho^2 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) } \wedge \text{ (2)} \Rightarrow E = \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) \quad (3)$$

6γ) Από την ισότητα (3) και την εκφώνηση έχουμε: $6 \cdot \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) = 96 - 24\pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{6} \cdot \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) = \cancel{6} \cdot (16 - 4\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) = 4 \cdot (4 - \pi) \Rightarrow \rho = 4$$

6δ) Η τομή των δύο ίσων κύκλων εμβαδού έστω κ, αποτελείται από δύο ίσα κυκλικά τμήματα εμβαδού τ. Όπως προκύπτει και από την (2) αν αντικαταστήσουμε όπου ρ=4, έχουμε:

$$\kappa = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) \Rightarrow \kappa = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa = 2 \cdot (4\pi - 8) \Rightarrow \kappa = 8 \cdot (\pi - 2)$$

Βιβλιογραφία:

Για την άσκηση 4, χρησιμοποιήθηκαν οι Σημειώσεις του κ. Νικολάου Τσελίκα του μαθήματος Ευρυζωνικά Δίκτυα, στο ΜΠΣ «Εφαρμοσμένα Πληροφοριακά Συστήματα» του ΑΕΙ Πειραιά Τ.Τ.