

Θέμα 1^ο: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Αν $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{2}{3}$ και το μέτρο $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ είναι άρτιος αριθμός, τότε:

α. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, \sqrt{22})$,

$\vec{v} = \left(9, \frac{5}{3|\vec{\alpha}|} \right)$ είναι κάθετα.

β. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θέτουμε $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$, όπου \vec{u}, \vec{v} τα διανύσματα του ερωτήματος α. Να βρείτε το διαφορικό του Ο σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ με τον άξονα x'x.

Λύση: α. Έχουμε $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) - 3\vec{\beta}|$ με $3|\vec{\beta}| = 2 > \sqrt{2} = |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$, οπότε

$$3|\vec{\beta}| - |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq 3|\vec{\beta}| + |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| \Rightarrow 2 - \sqrt{2} \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq 2 + \sqrt{2} \Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2,$$

αφού το $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ είναι άρτιος. Εξάλλου

$$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = \sqrt{2} \Rightarrow |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = 2 \Rightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = 2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + 4\vec{\beta}^2 = 2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + \frac{16}{9} = 2 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 + 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = \frac{2}{9} \quad (1) \text{ και}$$

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2 \Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 4 \Rightarrow (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 - 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + \vec{\beta}^2 = 4 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 - 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + \frac{4}{9} = 4 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 - 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = \frac{32}{9} \quad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα (1),(2) και βρίσκουμε:

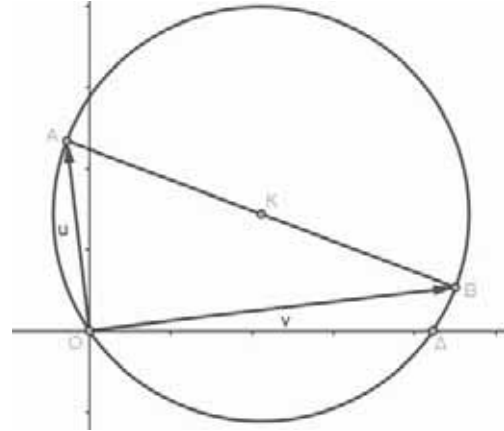
$$|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{22}}{3} \text{ και } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{5}{9}.$$

$$\text{Αρα } \vec{u} = \left(-\frac{5}{9}, \sqrt{22} \right), \vec{v} = \left(9, \frac{5}{\sqrt{22}} \right) \text{ και}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(-\frac{5}{9} \right) 9 + \sqrt{22} \frac{5}{\sqrt{22}} = -5 + 5 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

β. Αφού $\vec{u} \perp \vec{v}$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με $\hat{AOB} = 90^\circ$. Άρα η πλευρά ΑΒ είναι διάμετρος

του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



Σχ.1

Έστω Κ το κέντρο του κύκλου και Δ το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου με τον άξονα x'x.

$$\text{Είναι } A \left(-\frac{5}{9}, \sqrt{22} \right) \text{ και } B \left(9, \frac{5}{\sqrt{22}} \right).$$

Αν Μ το μέσο του ΟΔ, τότε $KM \perp x'x \Rightarrow$

$$x_M = x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{5}{9} + 9}{2} = \frac{38}{9}, \quad \text{οπότε}$$

$$x_\Delta = 2x_M = \frac{76}{9}. \text{ Άρα } \Delta \left(\frac{76}{9}, 0 \right).$$

Θέμα 2^ο: Θεωρούμε τις ευθείες με εξίσωση:

$$(m^2 + m + 1)x - (2\lambda m^2 - 1)y + (\kappa^2 - \rho^2)m^2 - 1 = 0, \quad m \in \mathbb{R}, \kappa, \lambda, \rho \in \mathbb{Z} \text{ και } \lambda > 0.$$

Αν οι παραπάνω ευθείες διέρχονται για κάθε $m \in \mathbb{R}$ από το ίδιο σημείο Μ, δείξτε ότι:

α. $\kappa^2 > \lambda$ και $M(0,1)$.

β. Στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r = \sqrt{\kappa^2 - \lambda}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση: Αφού οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ θα έχουμε:

$$(m^2 + m + 1)x_0 - (2\lambda m^2 - 1)y_0 + (\kappa^2 - \rho^2)m^2 - 1 = 0,$$

για κάθε $m \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (x_0 - 2\lambda y_0 + \kappa^2 - \rho^2)m^2 + x_0 m + x_0 + y_0 - 1 = 0$$

για κάθε $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_0 - 2\lambda y_0 + \kappa^2 - \rho^2 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa^2 - \rho^2 = 2\lambda \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa^2 = \rho^2 + 2\lambda \geq 2\lambda > \lambda \text{ και } M(0,1).$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } \kappa^2 - \lambda &= \kappa^2 - \frac{\kappa^2 - \rho^2}{2} = \frac{\kappa^2 + \rho^2}{2} = \\ &= \frac{(\kappa - \rho)^2 + (\kappa + \rho)^2}{4} = \left(\frac{\kappa - \rho}{2}\right)^2 + \left(\frac{\kappa + \rho}{2}\right)^2 = t_1^2 + t_2^2 \end{aligned}$$

όπου $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, αφού οι αριθμοί $\kappa - \rho$, $\kappa + \rho$ είναι άρτιοι καθ' όσον έχουν και άθροισμα άρτιο και γινόμενο άρτιο. Πράγματι $(\kappa - \rho) + (\kappa + \rho) = 2\kappa$,

$(\kappa - \rho)(\kappa + \rho) = \kappa^2 - \rho^2 = 2\lambda$. Η εξίσωση του κύκλου λοιπόν $x^2 + y^2 = \kappa^2 - \lambda$ επαληθεύεται για $x = t_1, y = t_2$

Θέμα 3^ο : Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x = -\frac{3}{2}$ και $\varepsilon_2:$

$$x = -1.$$

α. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της μεσοπαράλληλου ευθείας ε των ε_1 και ε_2 .

ii. Την εξίσωση της παραβολής C που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διευθετούσα την ευθεία ε του προηγούμενου ερωτήματος.

β. Θεωρούμε την εξίσωση

$$2x^2 + 2y^2 + (\lambda - 1)x - \frac{1}{2} = 0 \quad (1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η (1) είναι εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιπλέον να βρείτε την εξίσωση εκείνου του κύκλου που εκφράζεται από την (1) και το κέντρο του είναι η εστία της παραβολής C του ερωτήματος **α,ii**.

Λύση: α. i. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$ και τα κοινά τους σημεία με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-\frac{3}{2}, 0)$ και $B(-1, 0)$ αντίστοιχα.

Άρα η μεσοπαράλληλος ευθεία ε των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ θα είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, από το μέσο M του AB έχουμε:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{2} - 1}{2} = -\frac{5}{4}. \text{ Άρα } \varepsilon: x = -\frac{5}{4}.$$

ii. Η εξίσωση της παραβολής C είναι $y^2 = 2px$. Η διευθετούσα δ της C έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ και

λόγω της υπόθεσης $-\frac{p}{2} = -\frac{5}{4} \Rightarrow p = \frac{5}{2}$. Άρα

$$C: y^2 = 5x.$$

β. (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{\lambda - 1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ (2).

$$A = \frac{\lambda - 1}{2}, B = 0, \Gamma = -\frac{1}{4}.$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \frac{(\lambda - 1)^2}{4} + 1 > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα η (2) οπότε και η (1) είναι εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τα κέντρα των κύκλων με εξίσωση την (1) είναι

$$K_\lambda \left(-\frac{\lambda - 1}{4}, 0 \right).$$

Η παραβολή C του ερωτήματος **α.ii** έχει εξίσωση $y^2 = 5x$ με $p = \frac{5}{2}$ και εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ή $E\left(\frac{5}{4}, 0\right)$

. Σύμφωνα με την υπόθεση $-\frac{\lambda - 1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = -4$.

Άρα για $\lambda = -4$ από την (2) παίρνουμε

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4} = 0, \text{ που είναι η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου.}$$

Θέμα 4^ο: Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 2px$, $p > 0$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \kappa, \lambda \neq 0$.

α. Να βρείτε τη θέση της ευθείας ε ως προς την παραβολή.

β. Στην περίπτωση που η ε τέμνει την παραβολή στα σημεία A, B

Να βρείτε: i. Την απόσταση των A, B .

ii. Την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την AB .

Λύση: α. Το πλήθος των κοινών σημείων τους εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων του συστή-

$$\text{ματος } \begin{cases} y = \lambda x + \kappa \\ y^2 = 2px \end{cases}, \text{ δηλαδή του } \begin{cases} y = \lambda x + \kappa \\ x = \frac{y^2}{2p} \end{cases}, \text{ ή}$$

τελικά της εξίσωσης $y = \lambda \frac{y^2}{2p} + \kappa$, δηλαδή της

$$\lambda y^2 - 2py + 2p\kappa = 0 \quad (1). \text{ Αφού}$$

$\lambda \neq 0$, η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με άγνωστο το y και η διακρίνουσά της είναι:

$$\Delta = 4p^2 - 8p\kappa\lambda = 4p(p - 2\kappa\lambda)$$

• Η ε έχει με την C δύο διαφορετικά κοινά σημεία αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες άνισες, δηλαδή $\Delta > 0$, ή $p > 2\kappa\lambda$, αφού $p > 0$.

• Η ε έχει με την C ένα μόνο κοινό σημείο (εφαπτομένη της C) αν και μόνο αν η (1) έχει διπλή ρίζα, δηλαδή $\Delta = 0$, ή $p = 2\kappa\lambda$ αφού $p \neq 0$.

• Η ε δεν έχει κοινά σημεία με την C αν και μόνο αν η (1) είναι αδύνατη στο \mathbb{R} , δηλαδή

$\Delta < 0$, ή $p < 2\kappa\lambda$, αφού $p > 0$.

β. i. Αφού η ε τέμνει την παραβολή έχουμε $p > 2\kappa\lambda$.

Έστω ότι $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Τα y_1, y_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1), οπότε από τους τύπους Vieta

$$\text{έχουμε } y_1 + y_2 = \frac{2p}{\lambda} \text{ και } y_1 y_2 = \frac{2p\kappa}{\lambda}.$$

$$y_2 - y_1 = \lambda(x_2 - x_1).$$

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \lambda^2(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

$$\text{Έχουμε: } x_1 + x_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} = \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{2p} = \frac{\frac{4p^2}{\lambda^2} - \frac{4p\kappa}{\lambda}}{2p} =$$

$$\frac{2(p - \kappa\lambda)}{\lambda^2} \text{ και } x_1 x_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{4p^2} = \frac{4p^2 \kappa^2}{4p^2 \lambda^2} = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}, \text{ ο-}$$

$$\text{πότε: } (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 =$$

$$\frac{4(p - \kappa\lambda)^2}{\lambda^4} - 4 \frac{\kappa^2}{\lambda^2} = \frac{4p(p - 2\kappa\lambda)}{\lambda^4} \Rightarrow$$

$$|x_2 - x_1| = \frac{2}{\lambda^2} \sqrt{p(p - 2\kappa\lambda)}.$$

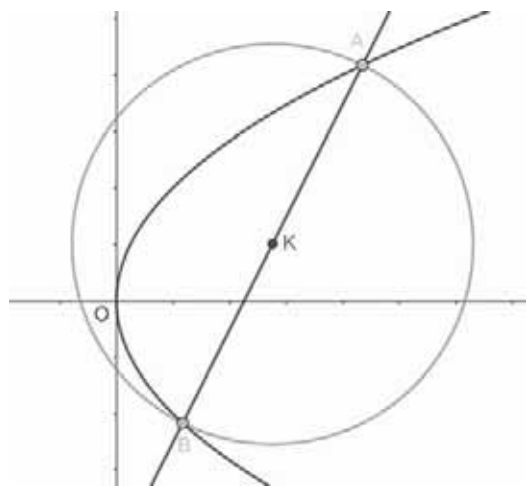
$$\text{Άρα } (AB) = \frac{2}{\lambda^2} \sqrt{p(p - 2\kappa\lambda)(1 + \lambda^2)}.$$

$$\text{Συνοτότερα: } |x_1 - x_2| = \left| \frac{y_1^2 - y_2^2}{2p} \right| = \frac{1}{2} |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| =$$

$$= \frac{1}{2p} \cdot \left| \frac{2p}{\lambda} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \sqrt{p(p - 2\kappa\lambda)}$$

ii. Αν K είναι το κέντρο του κύκλου τότε:

$$x_K = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - \kappa\lambda}{\lambda^2} \text{ και } y_K = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{\lambda}.$$



Σχ.6

Άρα $K\left(\frac{p - \kappa\lambda}{\lambda^2}, \frac{p}{\lambda}\right)$. Η ακτίνα του κύκλου είναι

$$\rho = \frac{(AB)}{2} = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{p(p - 2\kappa\lambda)(1 + \lambda^2)}.$$

Η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι

$$\left(x - \frac{p - \kappa\lambda}{\lambda^2}\right)^2 + \left(y - \frac{p}{\lambda}\right)^2 = \frac{p(p - 2\kappa\lambda)(1 + \lambda^2)}{\lambda^4}.$$

Θέμα 5^ο: Θεωρούμε τα σημεία $M(2\sigma\eta\theta, 4\eta\mu\theta)$ με $\theta \in [0, 2\pi)$.

α. Δείξτε ότι τα σημεία M βρίσκονται πάνω σε μια έλλειψη C .

β. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C στο M όταν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Η (ε) σχηματίζει με τους άξονες τρί-

γωνο εμβαδού $E(\theta)$. Να βρείτε το σημείο M ώστε το εμβαδόν να είναι ελάχιστο καθώς και το ελάχιστο εμβαδόν.

$$\text{Λύση: α. Έχουμε } \begin{cases} x_M = 2\sigma\eta\theta \\ y_M = 4\eta\mu\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_M}{2} = \sigma\eta\theta \\ \frac{y_M}{4} = \eta\mu\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x_M^2}{4} + \frac{y_M^2}{16} = \sigma\eta^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1 \Rightarrow M \in (C), \text{ όπου}$$

$$(C): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ (έλλειψη με τις εστίες στον άξονα } y'y')$$

β. Η (ε) έχει εξίσωση: $\frac{(\sigma\eta\theta)x}{2} + \frac{(\eta\mu\theta)y}{4} = 1$ και τέμνει τους άξονες στα σημεία

$$K\left(\frac{2}{\sigma\eta\theta}, 0\right), \Lambda\left(0, \frac{4}{\eta\mu\theta}\right), \text{ οπότε}$$

$$E(\theta) = \frac{1}{2} (OK)(OL) = \frac{1}{2} \frac{2}{|\sigma\eta\theta|} \frac{4}{|\eta\mu\theta|} =$$

$$\frac{8}{|2\eta\mu\theta \cdot \sigma\eta\theta|} = \frac{8}{|\eta\mu 2\theta|} = \frac{8}{\eta\mu 2\theta}, \text{ αφού}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\theta < \pi \Rightarrow \eta\mu 2\theta > 0.$$

Άρα: $E(\theta)$ ελάχιστο $\Leftrightarrow \eta\mu 2\theta$ μέγιστο \Leftrightarrow

$$\eta\mu 2\theta = 1 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ αφού } 0 < 2\theta < \pi. \text{ Άρα}$$

$$M(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \text{ και } \min E(\theta) = 8.$$