

# Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

## Ασκήσεις επανάληψης

Παναγιώτης Μπρίνος (7<sup>ο</sup> Γ.Ε.Λ. Ν. Σμύρνης)

### Άσκηση 1

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \vec{OA}$ ,  $\vec{\beta} = \vec{OB}$ ,  $\vec{\gamma} = \vec{OG}$ . Αν γνωρίζουμε ότι:

- $(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$
- $\vec{\alpha} = (3, 1)$
- $\vec{\beta} = (-3, 4)$
- $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$ ,

να βρείτε:

- Το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$ .
- Τη γωνία  $\widehat{B\Delta\Gamma}$ .
- Το συμμετρικό Δ της κορυφής Β ως προς την ευθεία ΑΓ. Στη συνέχεια να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καθώς και το εμβαδόν του.

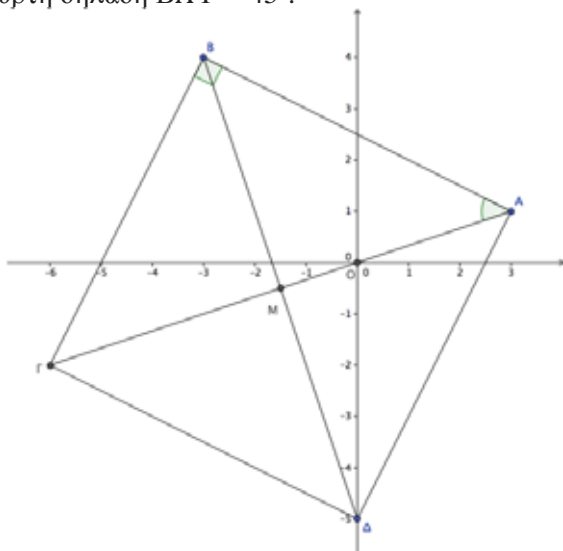
Λύση:

i) Έχουμε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -5$ , οπότε αν  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = v$  τότε από την ισότητα:  $(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow v\vec{\alpha} = -5\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma} = -\frac{v}{5}\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} = (3\lambda, \lambda)$ .

Έχουμε  $A(3,1)$ ,  $B(-3,4)$ ,  $\Gamma(3\lambda, \lambda)$  και  $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$ .  
Επομένως:  $\vec{BA} \cdot \vec{B\Gamma} = 0 \Rightarrow (6, -3)(3\lambda + 3, \lambda - 4) = 0 \Rightarrow 18\lambda + 18 - 3\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ . Άρα  $\vec{\gamma} = (-6, -2)$ .

ii) Έχουμε:  $\vec{AB} = (-6, 3)$ ,  $\vec{A\Gamma} = (-9, -3)$ ,  
 $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 45$ ,  $|\vec{AB}| |\vec{A\Gamma}| = \sqrt{45} \cdot \sqrt{90} = 45\sqrt{2}$ .

Επομένως:  $\sin \widehat{B\hat{A}\Gamma} = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}|}{|\vec{AB}| |\vec{A\Gamma}|} = \frac{45}{45\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 45^\circ$ .  
κυρτή δηλαδή  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 45^\circ$ .



iii) Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση:  $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)$ ,  
 $y = \frac{1}{3}x$ . Η ευθεία ε που διέρχεται από το Β και είναι  
κάθετη στην ΑΓ, έχει  $\lambda = -3$  και εξίσωση:  
 $y - 4 = -3(x + 3)$ ,  $y = -3x - 5$ .

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ΑΓ, ε και βρίσκουμε ότι τέμνονται στο σημείο  $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ . Αν  $\Delta(\alpha, \beta)$  το συμμετρικό του Β ως προς την ΑΓ, τότε το Μ αποτελεί το μέσο του ΑΓ, οπότε  $-\frac{3}{2} = \frac{\alpha - 3}{2}$  και  $-\frac{1}{2} = \frac{\beta + 4}{2}$ . Έτσι, βρίσκουμε  $\Delta(0, -5)$ .

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με  $AB = B\Gamma$ , επομένως το ύψος του ΒΜ είναι και διάμεσος. Έτσι στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ,  $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$  και οι διαγώνιοι του ΒΔ και ΑΓ διχοτομούνται κάθετα στο Μ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, με εμβαδόν  $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = 45$ .

### Άσκηση 2

Δίνονται τα σημεία  $A(-3, 0)$ ,  $B(1, 0)$  και  $\Gamma(-1, 2\sqrt{3})$ .

A) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

B) Να βρείτε σημείο Δ τέτοιο ώστε το ΑΒΔΓ να είναι παραλληλόγραμμο.

Γ) Αν Μ μέσο του ΑΒ, να βρείτε σημείο Κ του τμήματος ΓΜ τέτοιο ώστε  $\frac{ΓΚ}{ΚΜ} = 2$ .

Στη συνέχεια να δείξετε ότι τα σημεία Α, Κ και Δ (του Γ) ερωτήματος) είναι συνευθειακά. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία.

Δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

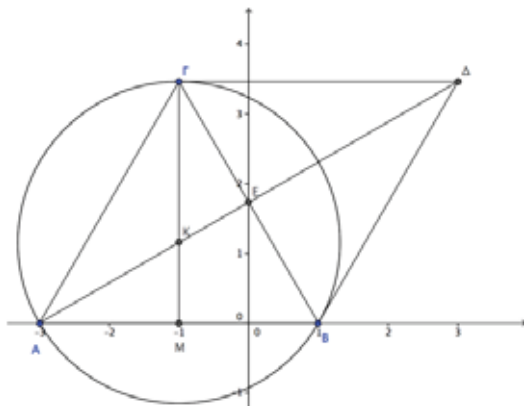
Λύση:

A) Έχουμε:  $\vec{AB} = (4, 0)$ ,  $\vec{A\Gamma} = (2, 2\sqrt{3})$  και  $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 8\sqrt{3} \neq 0$ , δηλαδή τα Α, Β, Γ αποτελούν πλευρές τριγώνου.

Επίσης  $\vec{B\Gamma} = (-2, 2\sqrt{3})$  και  $|\vec{AB}| = |\vec{A\Gamma}| = |\vec{B\Gamma}| = 4$ , επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

B) Έστω  $\Delta(\alpha, \beta)$ . Τότε: ΑΒΔΓ παραλληλόγραμμο  $\Leftrightarrow \vec{B\Delta} = \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow (\alpha - 1, \beta) = (2, 2\sqrt{3}) \Leftrightarrow \alpha = 3$  και  $\beta = 2\sqrt{3}$ . Επομένως  $\Delta(3, 2\sqrt{3})$ .

Γ) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ, άρα  $M(-1, 0)$ . Έστω  $K(\gamma, \delta)$  το ζητούμενο σημείο. Από την σχέση  $\frac{ΓΚ}{ΚΜ} = 2$  έχουμε  $\vec{ΓΚ} = 2\vec{ΚΜ}$  και τα διανύσματα  $\vec{ΓΚ}$ ,  $\vec{ΚΜ}$  είναι ομόρροπα, οπότε πρέπει και αρκεί  $\vec{ΓΚ} = 2\vec{ΚΜ}$ .  
 $\vec{A\Gamma} = 2\vec{ΚΜ} \Leftrightarrow (\gamma + 1, \delta - 2\sqrt{3}) = 2(-1 - \gamma, -\delta)$   
 $\Leftrightarrow \gamma = -1, \delta = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ , δηλαδή  $K(-1, \frac{2}{3}\sqrt{3})$ .



Παρατηρούμε ότι  $\overline{AK} = (2, \frac{2}{3}\sqrt{3})$  και  $\overline{AD} = (6, 2\sqrt{3}) = 3\overline{AK}$ , επομένως τα A, K, Δ είναι συνευθειακά.

**Γεωμετρική ερμηνεία:** Το σημείο K χωρίζει τη διάμεσο ΓΜ του τριγώνου ABΓ σε λόγο 2:1, επομένως αποτελεί το βαρύκεντρο του τριγώνου. Αν Ε το κέντρο του παραλληλογράμμου ABΔΓ, τότε το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ, επομένως τα A, K, Ε, Δ είναι συνευθειακά.

**Δ)** Από το Γ) ερώτημα, με δεδομένο ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, προκύπτει ότι το Κ αποτελεί περίκεντρο του ABΓ.

Η ακτίνα του κύκλου, είναι  $\rho = (AK) = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ .

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C : (x+1)^2 + (y - \frac{2}{3}\sqrt{3})^2 = \frac{16}{3}.$$

### Άσκηση 3

Αν η εξίσωση  $2x^2 + 2y^2 - 2\lambda x + 2y - \lambda = 0$  (1) παριστάνει κύκλο C,

- i) Να βρείτε τις τιμές του λ, το κέντρο Κ καθώς και την ακτίνα ρ.
- ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα Κ των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε ευθεία δ και στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και διευθετούσα την ευθεία δ.
- iii) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
- iv) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η αρχή των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το O(0,0).

**Λύση:**

i)  $(1) \Rightarrow x^2 + y^2 - \lambda x + y - \frac{\lambda}{2} = 0$  (2).

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  και παριστάνει κύκλο επομένως  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 + 2\lambda > 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 > 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ . Το κέντρο του είναι το  $K(\frac{\lambda}{2}, -\frac{1}{2})$  και η ακτίνα του είναι  $\rho = \frac{|\lambda + 1|}{2}$ .

ii) Επειδή η τεταγμένη του Κ είναι σταθερή και ίση με  $-\frac{1}{2}$ , το κέντρο Κ κινείται στην ευθεία δ:  $y = -\frac{1}{2}$ . Αν η παραβολή με διευθετούσα την ευθεία δ έχει παράμετρο ρ τότε:  $-\frac{\rho}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 1$ . Επομένως η εξίσωσή της είναι  $x^2 = 2y$ .

iii) Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$(2x+1)\lambda = 2x^2 + 2y^2 + 2y \quad (3).$$

iv) Για να δείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο αρκεί να βρούμε ένα σημείο  $\Lambda(x_0, y_0)$  του οποίου οι συντεταγμένες να επαληθεύουν την (1) άρα και την (3) για όλες τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ . Το ζητούμενο σημείο θα είναι εκείνο του οποίου οι συντεταγμένες μηδενίζουν τους συντελεστές  $2x+1$  και  $2x^2 + 2y^2 + 2y$  της εξίσωσης (3), δηλαδή αποτελούν λύση του συστήματος  $2x+1 = 0$  και  $2x^2 + 2y^2 + 2y = 0$ . Από την επίλυση του συστήματος βρίσκουμε  $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . Επομένως όλοι οι κύκλοι της οικογένειας (1) διέρχονται από το σημείο  $\Lambda(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

v) Η αρχή O(0,0) των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C αν και μόνο αν  $(OK) < \rho$ .

Αλλά  $(OK) < \rho \Leftrightarrow (\frac{\lambda}{2})^2 + \frac{1}{4} < (\frac{\lambda+1}{2})^2 \Leftrightarrow \lambda > 0$ . Έστω Β, Γ δύο τυχαία σημεία του κύκλου με  $B(x_1, y_1)$ . Η χορδή ΒΓ του κύκλου έχει μέσο το O(0,0) αν και μόνο αν  $\overline{OK} \perp \overline{OB}$ .

Αλλά  $\overline{OK} \perp \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OK} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow (\frac{\lambda}{2}, -\frac{1}{2}) \cdot (x_1, y_1) = 0 \Leftrightarrow y_1 = \lambda x_1$ , δηλαδή η εξίσωση της χορδής του κύκλου με μέσο το O(0,0) είναι η  $y = \lambda x$ , με  $\lambda > 0$ .

### Άσκηση 4

Δίνονται τα σημεία Α, Β, Μ ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων Oxy, όπου O(0, 0), για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

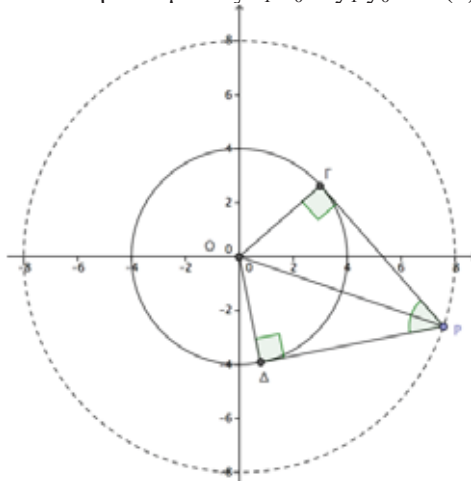
- $A(1, \sqrt{3}), B(2, 0)$ .
  - $(\overline{OM}^2 + \overline{OA}^2)^2 + (\overline{OM}^2 - \overline{OB}^2)^2 = 64$
- i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Μ είναι ομοκυκλικά.
  - ii) Έστω C ο κύκλος που διέρχεται από τα Α, Β, Μ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εξωτερικών του σημείων στα οποία οι εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από τα σημεία αυτά σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$ .

**Λύση:**

i) Έχουμε:  $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = 4$  και  $(\overline{OM}^2 + \overline{OA}^2)^2 + (\overline{OM}^2 - \overline{OB}^2)^2 = 64 \Rightarrow (\overline{OM}^2 + 4)^2 + (\overline{OM}^2 - 4)^2 = 64$

$\Rightarrow 2\overline{OM}^2 + 32 = 64 \Rightarrow \overline{OM}^2 = 16 \Rightarrow |\overline{OM}| = 4$ . Επειδή  $|\overline{OM}| = |\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 4$ , τα σημεία A, B, M ανήκουν στον κύκλο C(O,4) με εξίσωση:  $x^2 + y^2 = 16$ .

ii) Έστω P(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>) σημείο εκτός του κύκλου C και ΡΓ, ΡΔ τα εφαπτόμενα τμήματα που διέρχονται από το Ρ. Αν Γ(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>) τότε η ευθεία ΡΓ έχει εξίσωση  $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 16$  και το σημείο P(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>) ανήκει σ' αυτήν επομένως  $x_1 \cdot x_0 + y_1 \cdot y_0 = 16$  (1).



Από την Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία OP διχοτομεί την γωνία ΓÔΔ. Έχουμε διαδοχικά:  $\Gamma\hat{P}\Delta = 60^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = 120^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}P = 60^\circ$   
 $\Leftrightarrow \sin \Gamma\hat{O}P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{OG \cdot OP}{|OG| \cdot |OP|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 \cdot x_0 + y_1 \cdot y_0}{4|OP|} = \frac{1}{2}$   
 (1)  $\Leftrightarrow \frac{16}{4|OP|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |OP| = 8$ , δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P είναι ο κύκλος C' (O,8).

### Άσκηση 5

Θεωρούμε τους κύκλους

C<sub>1</sub>:  $x^2 + y^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x + (\lambda^3 + \lambda^2 - 2)y + 2\lambda - 2 = 0$  και C<sub>2</sub>:  $(x+1)^2 + y^2 = 25$ , με κέντρα K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub> αντίστοιχα. Αν K<sub>1</sub>(1,0),

- A) Να αποδείξετε ότι  $\lambda=1$  και να βρείτε το K<sub>2</sub> και τις ακτίνες των δύο κύκλων.
- B) Να δείξετε ότι ο C<sub>1</sub> είναι εσωτερικός του C<sub>2</sub>.
- Γ) Αν M, N τυχαία σημεία των C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> αντίστοιχα, να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη δυνατή τιμή του τμήματος MN
- Δ) Αν K είναι το κέντρο ενός κύκλου C που εφάπτεται εσωτερικά του C<sub>2</sub> και εξωτερικά του C<sub>1</sub>, να αποδείξετε το K ανήκει σε έλλειψη.

Λύση:

A) Από την υπόθεση έχουμε:  $\frac{\lambda^2 - 5\lambda + 6}{2} = 1$  και  $-\frac{\lambda^3 + \lambda^2 - 2}{2} = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1, 4\}$  και  $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ .

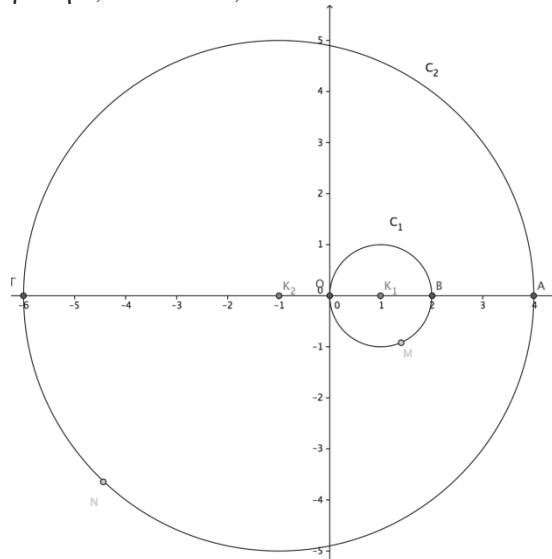
Τότε C<sub>1</sub>:  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  με ακτίνα  $\rho_1 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 1$ .

Επίσης για τον C<sub>2</sub> έχουμε K<sub>2</sub>(-1,0) και  $\rho_2 = 5$ .

B) Παρατηρώ ότι  $(K_1K_2) = 2 < \rho_2 - \rho_1 = 4$ . Επομένως ο C<sub>1</sub> είναι εσωτερικός του C<sub>2</sub>.

Γ) Έστω M, N δύο τυχαία σημεία των C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> αντίστοιχα. Φέρνουμε την διακεντρική ευθεία K<sub>1</sub>K<sub>2</sub> που είναι ο άξονας x'x. Η ευθεία αυτή τέμνει τον C<sub>1</sub> στα σημεία B(2,0), O(0,0) και τον C<sub>2</sub> στα σημεία A(4,0), Γ(-6,0) (σχήμα).

Έχουμε:  $(AB) \leq (MN) \leq (B\Gamma) \Rightarrow 2 \leq (MN) \leq 8$ , Δηλαδή η ελάχιστη δυνατή τιμή για το μήκος του τμήματος MN είναι 2, όταν M≡B, N≡A ενώ η μέγιστη 8, όταν M≡B, N≡Γ.



Δ) Έστω (K,ρ) κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά του C<sub>2</sub> και εξωτερικά του C<sub>1</sub>. Τότε:

$$(KK_1) = \rho + \rho_1, (KK_2) = \rho_2 - \rho.$$

Επομένως  $(KK_1) + (KK_2) = \rho_1 + \rho_2 = 6 > (K_1K_2) = 2$ .

Άρα το K ανήκει στην έλλειψη με εστίες K<sub>1</sub>(1,0),

K<sub>2</sub>(-1,0) και σταθερό άθροισμα 6. Εξάλλου

$$2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3, \gamma = 1, \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 8. \text{ Έτσι, } C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

### Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - 2xy + y^2 - 9 = 0$  (1).

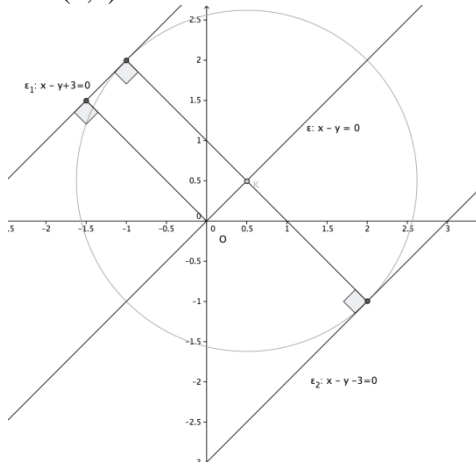
- A) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.
- B) Να βρείτε τη γενική (παραμετρική) εξίσωση των κύκλων που εφάπτονται των δύο παραπάνω ευθειών.
- Γ) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C με εστίες E(√3,0), E'(-√3,0) που εφάπτεται των δύο παραπάνω ευθειών.
- Δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων του B) ερωτήματος, οι οποίοι διέρχονται από τα κοινά σημεία των ευθειών και της έλλειψης του Γ) ερωτήματος. Τι είδους συμμετρία παρουσιάζουν οι κύκλοι αυτοί;

Λύση:

A) Έχουμε: (1)  $\Leftrightarrow (x-y)^2 = 9 \Leftrightarrow x-y = -3$  ή  $x-y = 3 \Leftrightarrow x-y+3=0$  ή  $x-y-3=0$ .

Άρα παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.

**Β)** Έστω  $\varepsilon_1: x-y+3=0$  και  $\varepsilon_2: x-y-3=0$  οι ευθείες αυτές. Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο  $M$  του επιπέδου ισαπέχει από τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  αν και μόνο αν ανήκει στη μεσοπαράλληλο τους. Αν  $\varepsilon: x-y+k=0$  η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  και  $A(0,3), B(0,-3)$  σημεία των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  αντίστοιχα, τότε το μέσο του  $AB$  είναι το  $O(0,0)$ .



Άρα:  $O \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0-0+k=0 \Leftrightarrow k=0$  οπότε  $\varepsilon: x-y=0$ .

Επίσης κάθε σημείο της  $\varepsilon$  απέχει από τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  απόσταση ίση με  $d(O, \varepsilon_1)=d(O, \varepsilon_2)=\frac{|0-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

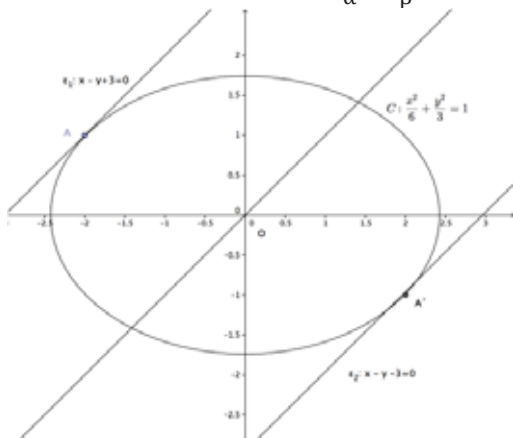
Έχουμε διαδοχικά: Ο κύκλος  $(K, \rho)$  εφάπτεται των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  αν και μόνο αν  $K$  σημείο της  $\varepsilon$  και  $\rho=d(K, \varepsilon_1)$  αν και μόνο αν  $K(\lambda, \lambda)$  και  $\rho=\frac{3\sqrt{2}}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Δηλαδή οι παραπάνω κύκλοι έχουν εξίσωση:

$$(x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ή}$$

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 2\lambda^2 - \frac{9}{2} = 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1).$$

**Γ)** Οι εστίες της έλλειψης  $C$  ανήκουν στον άξονα  $x'x$ , οπότε η εξίσωση της είναι:  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .



Για να εφάπτονται η ευθεία  $\varepsilon_1: x-y = -3$  και η έλλειψη  $C$  στο σημείο  $A(x_1, y_1)$  πρέπει και αρκεί  $x_1 - y_1 = -3$  (1),  $\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$  (2) και η  $\varepsilon_1$  να ταυτίζεται με την εφαπτομένη της  $C$  στο  $A$ , δηλαδή με την  $\varepsilon: \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$  (3)

Αλλά:  $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon \Leftrightarrow$  το σύστημα  $\left. \begin{matrix} x - y = -3 \\ \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1 \end{matrix} \right\}$  είναι άοριστο  $\Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$ , αφού δεν μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές του. Έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{x_1}{\alpha^2} & \frac{y_1}{\beta^2} \end{vmatrix} = \frac{y_1}{\beta^2} + \frac{x_1}{\alpha^2}, \quad D_x = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & \frac{y_1}{\beta^2} \end{vmatrix} = -3\frac{y_1}{\beta^2} + 1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \frac{x_1}{\alpha^2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3\frac{x_1}{\alpha^2}, \quad \text{οπότε: } D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha^2 = -3x_1$  (I) και  $\beta^2 = 3y_1$  (II) (Δηλαδή  $\frac{x_1}{\alpha^2} = \frac{y_1}{\beta^2} = \frac{-1}{3}$ ). Το σημείο  $A$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon_1$  επομένως  $x_1 - y_1 = -3$ .

Έχουμε  $\gamma = (OE) = \sqrt{3}$  από τις εστίες της έλλειψης, οπότε  $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow -3x_1 - 3y_1 = 3 \Rightarrow x_1 - y_1 = -1$  (4). Από τις (1), (4) βρίσκουμε  $x_1 = -2$  και  $y_1 = 1$ .

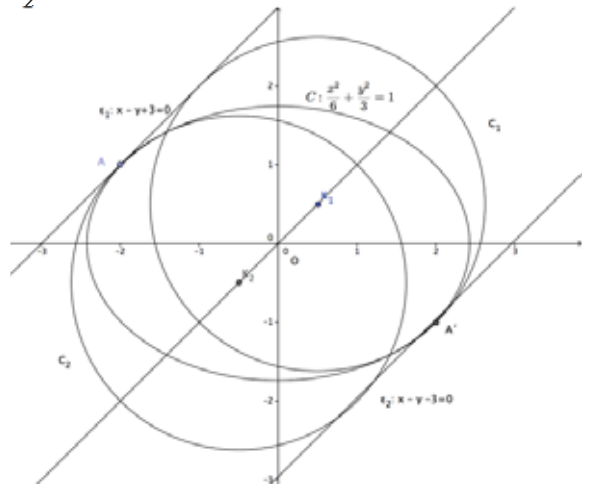
Επομένως  $\alpha^2 = 6$  και  $\beta^2 = 3$ . Η εξίσωση της έλλειψης  $C$  με εστίες  $E(\sqrt{3}, 0), E'(-\sqrt{3}, 0)$  στην οποία εφάπτεται η ευθεία  $\varepsilon_1$  στο σημείο  $A(-2, 1)$  είναι  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ . Παρατηρούμε ότι στο σημείο  $A'(2, -1)$  της έλλειψης  $C$ , η εφαπτομένη της έχει εξίσωση  $\frac{2x}{6} + \frac{-1y}{3} = 1$  ή  $x - y - 3 = 0$ , δηλαδή είναι η ευθεία  $\varepsilon_2$ .

**Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση.** Θα περίμενε κάποιος από τις σχέσεις (1), (2), (I), (II) να υπολογίζονταν οι 4 άγνωστοι  $x_1, y_1, \alpha, \beta$ . Όμως μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι (1), (I), (II)  $\Rightarrow$  (2), οπότε οι εξισώσεις είναι τρεις και όχι τέσσερις.

**Δ)** Το σημείο  $A'(2, -1)$  ανήκει στον κύκλο

$$(x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 + (-1-\lambda)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda + 5 - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2},$$

δηλαδή ο κύκλος της οικογένειας (1) που διέρχεται από το  $A'$  είναι ο  $C_1: (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = (\frac{3\sqrt{2}}{2})^2$ .



Το σημείο  $A(-2, 1)$  ανήκει στον κύκλο

$$(x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (-2-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2\lambda + 5 - \frac{9}{2} = 0$$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ , δηλαδή ο κύκλος της οικογένειας (1) που διέρχεται από το  $A$  είναι ο

$$C_2: \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Παρατηρούμε ότι τα κέντρα των δύο ίσων κύκλων είναι συμμετρικά ως προς την αρχή  $O(0,0)$  των αξόνων άρα και οι κύκλοι είναι συμμετρικοί ως προς το  $O$ .

### Άσκηση 7

Έστω υπερβολή  $C$  για την οποία γνωρίζουμε ότι:

- Έχει κέντρο το  $O(0,0)$  και οι εστίες της  $E', E$  ανήκουν στον άξονα  $x'x$
- Έχει εκκεντρότητα  $\varepsilon = \sqrt{2}$
- Η διχοτόμος της γωνίας  $E'ME$ , όπου  $M$  ένα σημείο της, είναι η  $\varepsilon: 2x - \sqrt{3}y = 1$

**A)** Να βρείτε τις συντεταγμένες  $(x_1, y_1)$  του  $M$  και να δείξετε ότι  $x_1^2 - y_1^2 = 1$ .

**B)** Αν  $M_1$  το συμμετρικό του  $M$  ως προς τον άξονα  $y'y$ , να αποδείξετε ότι ο κύκλος διαμέτρου  $M_1M$  διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής  $C$ .

**Γ)** Αν  $M_2$  το συμμετρικό του  $M$  ως προς τον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα  $M_2, M$  και μία από τις κορυφές της υπερβολής, έχει ορθόκентρο την άλλη κορυφή.

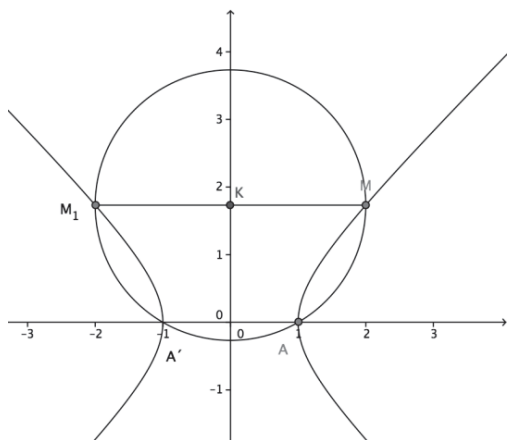
#### Λύση:

**A)** Από υπόθεση

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ και } \varepsilon = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} = \sqrt{2} \Rightarrow \beta = \alpha.$$

Επομένως η υπερβολή είναι ισοσκελής με εξίσωση  $x^2 - y^2 = \alpha^2$ .

Η εφαπτομένη της  $C$  στο  $M$  είναι η  $\varepsilon': x_1 \cdot x - y_1 \cdot y = \alpha^2$ .



Από θεωρία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της  $C$  στο  $M$  είναι και διχοτόμος της γωνίας  $E'ME$ , άρα ταυτίζεται με την  $\varepsilon: 2x - \sqrt{3}y = 1$ .

Επομένως:  $\frac{x_1}{2} = \frac{y_1}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha^2}{1} \Rightarrow x_1 = 2\alpha^2$  και  $y_1 = \sqrt{3}\alpha^2$ .

Εξάλλου:

$$2x_1 - \sqrt{3}y_1 = 1 \Rightarrow 4\alpha^2 - 3\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

Οπότε  $x_1 = 2, y_1 = \sqrt{3}$ .

Έτσι,  $M(2, \sqrt{3})$  και  $C: x^2 - y^2 = 1$ .

**B)** Το σημείο  $M_1$  είναι το συμμετρικό του  $M$  ως προς τον άξονα  $y'y$ , επομένως  $M_1(-2, \sqrt{3})$ .

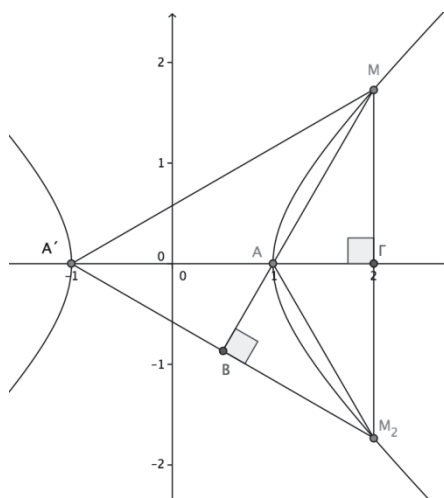
Ο κύκλος  $C_1$  διαμέτρου  $M_1M$  έχει κέντρο το μέσο  $K(0, \sqrt{3})$  του  $M_1M$  και ακτίνα

$$\rho = \frac{(M_1M)}{2} = \frac{\sqrt{(2+2)^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}}{2} = 2.$$

Δηλαδή έχει εξίσωση  $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 4$ .

Παρατηρούμε ότι οι κορυφές  $A'(-1,0)$  και  $A(1,0)$  της υπερβολής ανήκουν στον κύκλο  $C_1$ , αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή του.

**Γ)** Το σημείο  $M_2$  είναι το συμμετρικό του  $M$  ως προς τον άξονα  $x'x$ , επομένως  $M_2(2, -\sqrt{3})$ .



Θεωρούμε το τρίγωνο  $A'MM_2$ .

Το ύψος  $A'\Gamma$  διέρχεται από το  $A$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{A'M_2}$ , δηλαδή  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A'M_2} = 0$ .

$$\overrightarrow{AM} = (2 - 1, \sqrt{3} - 0) = (1, \sqrt{3}).$$

$$\overrightarrow{A'M_2} = (2 + 1, -\sqrt{3} - 0) = (3, -\sqrt{3}), \text{ οπότε}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A'M_2} = 3 - \sqrt{3}\sqrt{3} = 0$$

Επομένως το  $A$  είναι ορθόκентρο του  $A'MM_2$ , οπότε η τετράδα  $A, A', M, M_2$  είναι ορθοκεντρική. Οπότε και το  $A'$  είναι ορθόκентρο του  $AMM_2$ .