ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ματοσσιάν Ντικράν – Άλμπερ– ΠΠΓΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ

Άσκηση 1

Δίνονται οι εξισώσεις:

1) $2x - 5 = 1 + x$ 2) $3(2x + 5) = 12$ 3) $5x - 1 = \frac{2}{3}$

Για καθεμία από αυτές εκτελέστε τα ακόλουθα βήματα:

α. Λύστε την εξίσωση.

β. Γράψτε την στη μορφή $ax + \beta = 0$.

γ. Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων απεικονίστε γραφικά τη συνάρτηση y=αx+β.

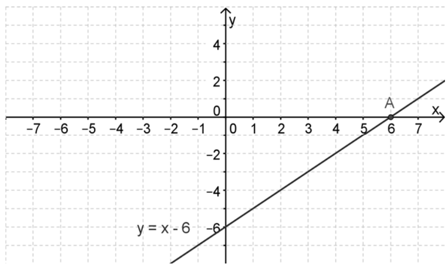
δ. Υπάρχει κάποια σχέση, και αν ναι ποια, μεταξύ της λύσης της εξίσωσης που βρήκατε στο βήμα α και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης του βήματος γ;

Λύση

1) α. $2x - x = 1 + 5 \Leftrightarrow x = 6$

β. $x - 6 = 0$

γ. Y=x–6



δ. *Η τετμημένη του σημείου τομής Α της συνάρτησης y = x – 6 με τον άξονα x΄x είναι ίδια με τη λύση της αρχικής εξίσωσης (γιατί;)*

οι λύσεις των εξισώσεων 2) και 3) καθώς και οι απαντήσεις στα ερωτήματα α), β) ,γ) και δ)

Άσκηση 2

Οι ηλικίες της Κατερίνας και της μητέρας έχουν άθροισμα 43. Πριν από 4 χρόνια η Κατερίνα είχε το ένα τέταρτο της ηλικίας της μητέρας της. Πόσων χρονών είναι η Κατερίνα; (ΑΠ:11 ετών)

Υπόδειξη: αν με χ συμβολίσουμε την σημερινή ηλικία της Κατερίνας, τότε σύμφωνα με το πρόβλημα θα έχουμε:

	Κατερίνας	ηλικίες	Μητέρας
Σήμερα:	x		43–x
Πριν 4 χρόνια:	x–4		(43–x)–4

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε την εξίσωση:

$$x-4 = \frac{1}{4}[(43-x)-4]$$

η λύση της εξίσωσης αφήνεται στον αναγνώστη.

Άσκηση 3

Μια μέρα οι παρόντες μαθητές μιας τάξης ήταν πενταπλάσιοι από τους απόντες. Την επομένη μέρα η τάξη είχε έναν απόντα λιγότερο και οι παρόντες ήταν επταπλάσιοι από τους απόντες. Πόσους μαθητές έχει η τάξη; ΑΠ:24

Υπόδειξη

Με x συμβολίζουμε τους απόντες και σύμφωνα με το πρόβλημα σχηματίζουμε την εξίσωση που προκύπτει απο αυτό. Η εύρεση της εξίσωσης και η λύση της αφήνεται στον αναγνώστη

Άσκηση 4

Όταν ρώτησαν εκτροφέα σκύλων Δαλματίας πόσους σκύλους είχε, απάντησε: αν διαιρέσεις τον αριθμό των σκύλων με το 7 βρίσκεις υπόλοιπο 3, αν τον διαιρέσεις με το 11 βρίσκεις υπόλοιπο 2 και αν τα διαιρέσεις με το 13 βρίσκεις υπόλοιπο 10. Αν το άθροισμα

των τριών πηλίκων αυτών των διαιρέσεων είναι ίσο με 30, πόσους σκύλους έχει ο μυστηριώδης εκτροφέας; ΑΠ=x=101

Υπόδειξη

Εδώ εφαρμόζουμε την ισότητα της ευκλειδιας διαίρεσης φυσικών αριθμών

$$Δ=δ\bullet π+υ, \text{ με } υ<δ \quad (1)$$

Καλούμε με χ τον αριθμό των σκύλων οπότε για δ=7, υ=3 και Δ=x απο την ισότητα (1) έχουμε το πηλίκο $\frac{x-3}{7}$. Η συνέχεια της λύσης του προβλήματος αφήνεται στον αναγνώστη.

Άσκηση 5

Ένα γυμναστήριο προτείνει στους πελάτες του δύο τρόπους πληρωμής:

Α: πάγιο 25 € το μήνα και 4 € την επίσκεψη και

Β: 7 € την επίσκεψη (χωρίς πάγιο)

α) Γράψτε υπό τη μορφή συνάρτησης την κάθε περίπτωση, θέτοντας ως x τον αριθμό των επισκέψεων και ως y το αντίστοιχο κόστος.

β) Στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, παραστήστε γραφικά τις δύο συναρτήσεις.

γ) Προσδιορίστε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης τον ελάχιστο αριθμό επισκέψεων για τους οποίους συμφέρει ο Α τρόπος πληρωμής.

δ) Προσδιορίστε και αλγεβρικά τη λύση που βρήκατε στο γ).

ΑΠ: γ)9 ελάχιστος αριθμός επισκέψεων, $x>\frac{25}{3}\approx 8,33...$

Τα ερωτήματα β), γ) αφήνονται στον αναγνώστη

δ) υπόδειξη 4x+25<7x λύνουμε την ανισότητα και βρίσκουμε x>8,33

α) Α: y = 4x + 25 , Β: y = 7x

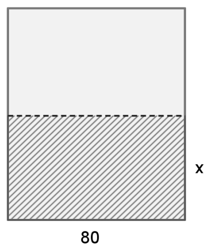
Άσκηση 6

Ένας αγρότης έχει ένα ορθογώνιο χωράφι μήκους 80 m και επιθυμεί να περιφράξει ένα ορθογώνιο τμήμα του που να έχει το ίδιο μήκος με το χωράφι. Επιθυμεί το συνολικό μήκος της περίφραξης να είναι μικρότερο από 300 m, αλλά και η περιφραγμένη περιοχή να έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από 2.400 m^2. Μεταξύ ποίων τιμών μπορεί να κυμαίνεται το πλάτος της περιφραγμένης περιοχής;

ΑΠ: 30<x<70

Υπόδειξη

Καλούμε χ το πλάτος της περιφραγμένης περιοχής και σχηματίζουμε την ανισότητα που προκύπτει απο τα δεδομένα του προβλήματος. Αυτό αφήνεται στον αναγνώστη.



Άσκηση 7

Ένας οδηγός νταλίκας καταγράφει σε ένα σημειωματάριο τις διαδρομές του στη διάρκεια της ημέρας. Στις 12 η ώρα (x = 0), φεύγει από την πόλη Α με σταθερή ταχύτητα 72 km/h, οδηγεί για δύο ώρες και στη συνέχεια ξεκουράζεται για μια ώρα. Στις 15 η ώρα, ξεκινάει πάλι οδηγώντας αυτή τη φορά με ταχύτητα 60 km/h, για 3 ώρες.

α) Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών της απόστασης y σε χιλιόμετρα ως συνάρτηση των ωρών x (x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 και 6).

β) Υπάρχει τύπος που να εκφράζει το y ως συνάρτηση του x; Αν ναι γράψτε την.

γ) Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, επιλέγοντας κατάλληλη κλίμακα, να απεικονίσετε γραφικά τη σχέση μεταξύ x και y.

δ) Τι απόσταση διάνυσε:

- **Μεταξύ 13:00 και 14:00;**
- **Από τις 12:00 μέχρι τις 16:00;**

ε) **Πόσος χρόνος απαιτείται για να διανύσει το όχημα τα πρώτα 100 χιλιόμετρα; Να απαντηθεί το ερώτημα i) με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης και ii) αλγεβρικά.**

στ) **Είναι η συγκεκριμένη σχέση συνάρτηση; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.**

ΑΠ: δ)72 km, 204 km, ε) $\frac{100}{72}=\frac{25}{18}$ ώρες= 83 λεπτά περίπου

β) 72χ με 0≤x≤2, 144 με 2<x≤3 και 144+60•(x–3), με 3<x≤6

Υπόδειξη:

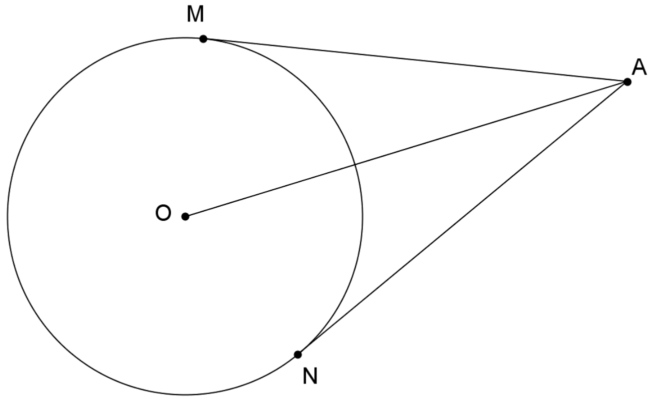
α) *Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:*

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	72	144	144	204	264	324

Η συνέχεια της λύσης αφήνεται στον αναγνώστη.

Άσκηση 8

Στο διπλανό σχήμα, ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα 4 cm και είναι ΟΑ=10,4 cm και ΑΜ=ΑΝ=9,6 cm (όπου Μ, Ν σημεία του κύκλου). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΜ και ΑΝ είναι εφαπτόμενες του κύκλου.



Υπόδειξη:

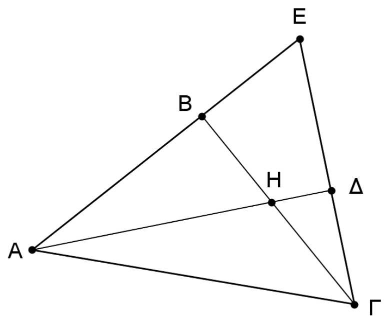
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ΑΜ είναι κάθετος στην ΟΜ. Για αυτό εξετάζουμε αν ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΟ.

Άσκηση 9

Στο διπλανό σχήμα, είναι ΑΓ = 10, ΑΒ = 8, ΒΓ = 6, ΑΔ = 9,6 και ΓΔ = 2,8. Τα ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται στο Η.

α) **Να αποδείξετε ότι το σημείο Η είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ.**

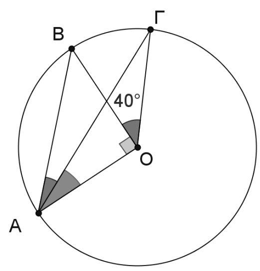
β) **Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη σχετική θέση των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΗ και ΑΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.**



Υπόδειξη: χρησιμοποιούμε το πυθαγόρειο θεώρημα.

Άσκηση 10

Να βρείτε τις γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\Gamma\widehat{A}O$ και $A\widehat{\Gamma}O$ του διπλανού σχήματος.



Λύση

$B\widehat{A}\Gamma=\frac{B\widehat{O}\Gamma}{2}=\frac{40°}{2}=20°$ *(επειδή είναι εγγεγραμμένη που βαίνει με επίκεντρη στο ίδιο τόξο* $\overset{\frown}{B\Gamma}$).

Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές (ΑΟ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου),

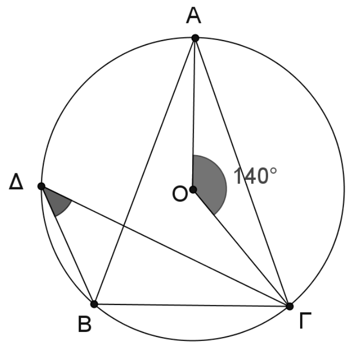
Επομένως $\Gamma\widehat{A}O=A\widehat{\Gamma}O=\frac{180°-A\widehat{O}\Gamma}{2}=\frac{180°-(90°+40°)}{2}=\frac{50°}{2}=25°$ *ή*

Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $B\widehat{A}O=45°$. *Τότε:*

$\Gamma\widehat{A}O=B\widehat{A}O-B\widehat{A}\Gamma=45°-20°=25°$

Άσκηση 11

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ, στο διπλανό σχήμα, είναι ισοσκελές με κορυφή το Α και $A\hat{O}\Gamma = 140°$, να προσδιορίσετε το μέγεθος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.



ΑΠ: *γωνία ΒΑΓ=40°*

Υπόδειξη: i) η εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο ισούτε με $\frac{1}{2}$ της επίκεντρης γωνίας στον ίδιο κύκλο και βαίνουν στο ίδιο αντίστοιχο τόξο.

ii) τρίγωνο ΑΟΓ ισοσκελές.

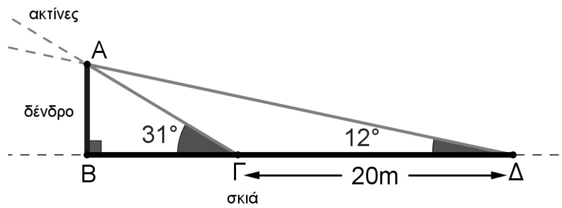
Σημείωση:

Στα παρακάτω 3 προβλήματα μας δίνονται τα στοιχεία ενός ορθογωνίου τριγώνου και μας ζητούνται τα υπόλοιπα. Στις περιπτώσεις αυτές, χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημχ, συνχ, εφχ καθώς και το πυθαγόρειο θεώρημα.

Άσκηση 12

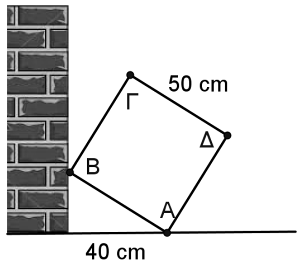
Η σκιά ενός δένδρου επιμηκύνεται κατά 20 m όταν η γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες του ήλιου μειώνεται από 31° σε 12°. Πόσο είναι το ύψος του δένδρου; ΑΠ:6,58 μέτρα το ύψος του δέντρου

Υπόδειξη: απο το σχήμα έχουμε, $\Gamma\Delta = B\Delta - B\Gamma = \frac{AB}{\text{ΕΦ}\Delta} - \frac{AB}{\text{ΕΦ}\Gamma}$ απο τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ. Η συνέχεια της λύσης αφήνεται στον αναγνώστη



Άσκηση 13

Ένα τετράγωνο πλαίσιο πλευράς 50 cm, ακουμπάει σε ένα κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν γνωρίζουμε ότι η κορυφή Α απέχει από τη βάση του τοίχου 40 cm, σε ποιο ύψος από το έδαφος βρίσκεται η κορυφή Γ; ΑΠ:70 εκ απέχει απο το έδαφος η κορυφή Γ.



Λύση

$E\hat{B}A + A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}Z = 180°$,

$\hat{\theta} + 90° + \hat{\omega} = 180°$, $\hat{\omega} = 90° - \hat{\theta}$

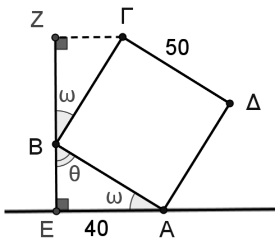
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ προκύπτει ότι:

$E\hat{A}B = 90° - E\hat{B}A = 90° - \hat{\theta} = \hat{\omega}$ *και ακόμη:*

$EB^2 = AB^2 - AE^2 = 50^2 - 40^2 = 2500 - 1600 = 900$,

$EB = \sqrt{900} = 30$

$\text{συν}\omega = \frac{EA}{AB} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$



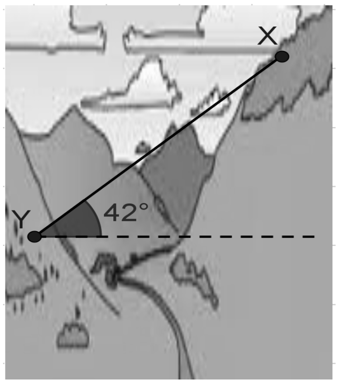
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ προκύπτει ότι: $\text{συν}\omega = \frac{BZ}{B\Gamma}$, $\frac{4}{5} = \frac{BZ}{50}$, $5BZ = 200$, $BZ = \frac{200}{5} = 40$

Επομένως η κορυφή Γ απέχει από το έδαφος όσο το ΖΕ = ΕΒ + ΒΖ = 30 + 40 = 70cm.

Άσκηση 14

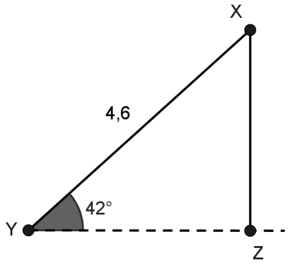
Από ένα σημείο Χ που βρίσκεται στη μία πλευρά μιας κοιλάδας, βλέπουμε ένα άλλο σημείο Υ που βρίσκεται από την

άλλη μεριά της κοιλάδας υπό γωνία 42°. Σε ένα χάρτη με κλίμακα 1:25.000 η απόσταση μεταξύ των σημείων Χ και Υ είναι 4,6 cm. Αν το σημείο Υ βρίσκεται σε υψόμετρο 150 m, ποιο είναι το υψόμετρο του Χ;



(**ΑΠ:** το σημείο x βρίσκεται σε υψόμετρο 919,5 m.)

υπόδειξη:



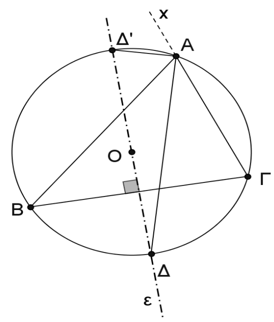
Άσκηση 13

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓ είναι ένα τυχαίο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Η ε είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ που τέμνει τον κύκλο στα Δ και Δ'. Να αποδείξετε ότι:

α) **η ε διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.**

β) **η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου.**

γ) **η ΑΔ' είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $B\hat{A}x$ του τριγώνου.**



Λύση

α) *Επειδή ΟΒ = ΟΓ (ως ακτίνες του ίδιου κύκλου), το Ο ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ, και επομένως βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετό του.*

β) *Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, η ΟΔ είναι ύψος άρα θα είναι και διχοτόμος. Τότε:*

$B\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}\Gamma,\ \frac{B\hat{O}\Delta}{2} = \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2},\ B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$ *δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της* $B\hat{A}\Gamma$.

γ) $\Delta'\hat{A}\Delta = 90°$ *(επειδή βαίνει σε ημικύκλιο)*

$\Gamma\hat{A}\Delta + \underbrace{\Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Delta'}_{90°} + \Delta'\hat{A}x = 180°,\ \Gamma\hat{A}\Delta + \Delta'\hat{A}x = 90°$

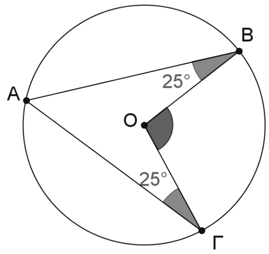
Επειδή $\Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Delta' = 90°,\ \Gamma\hat{A}\Delta + \Delta'\hat{A}x = \Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Delta',\ \Delta'\hat{A}x = B\hat{A}\Delta'$ *(επειδή* $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}B$*), δηλαδή η ΑΔ' είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας* $B\hat{A}x$ *του τριγώνου.*

Άσκηση 14

Στο διπλανό σχήμα, είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 25°$.

α) **Να προσδιορίσετε το μέγεθος της γωνίας $B\hat{O}\Gamma$.**

β) **Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**



Λύση

α) . $\Gamma\hat{A}B + \Gamma\hat{A}O = 25° + 25° = 50°$ *(επειδή τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΑΟΒ είναι ισοσκελή). Επομένως* $\Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{A}B = 2 \cdot 50° = 100°$

β) $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}O + O\hat{B}\Gamma = 25° + \frac{180° - 100°}{2} = 25° + 40° = 65°$ *και*

$A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}O + O\hat{\Gamma}B = 25° + \frac{180° - 100°}{2} = 25° + 40° = 65°$ *(επειδή το τρίγωνο ΓΟΒ είναι ισοσκελές).*