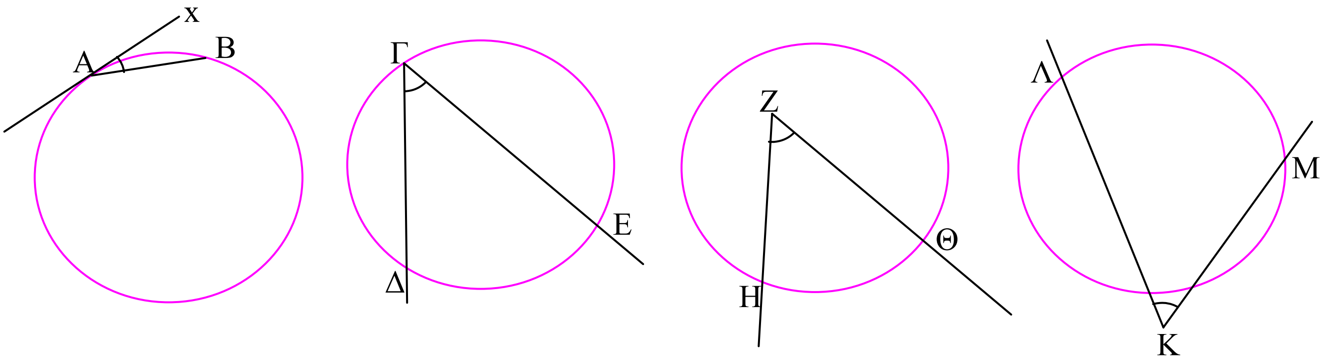
Εγγεγραμμένες γωνίες σε κύκλο

Γιώργος Σ. Μαρίνος

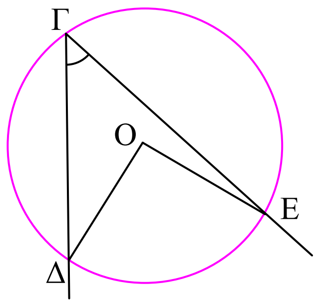
Δραστηριότητα 1

Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω γωνίες:
α) Έχουν τις κορυφές τους πάνω στον κύκλο
β) Οι πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο
γ) Έχουν τις κορυφές τους πάνω στον κύκλο και οι πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο.



Απάντηση:

α) Οι γωνίες $B\hat{A}x$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$. β) Οι γωνίες $\Delta\hat{\Gamma}E$, $H\hat{Z}\Theta$ και $\Lambda\hat{K}M$.
γ) Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$.



- Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ η οποία έχει την κορυφή της πάνω σε κύκλο και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Δ και Ε λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο** $\overset{\frown}{\Delta E}$ και έχει αντίστοιχη **επίκεντρη γωνία** την $\Delta\hat{O}E$.

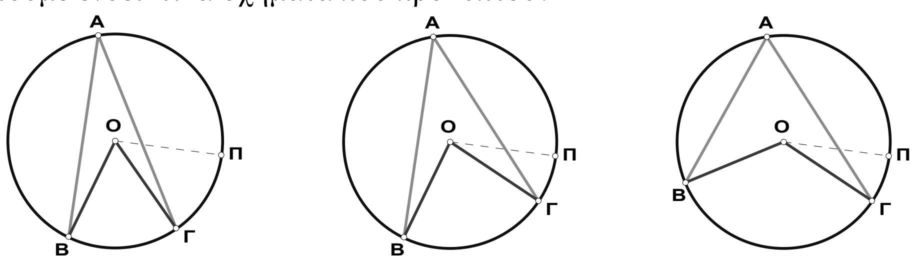
Σχέση εγγεγραμμένης-επίκεντρης που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Στην παρακάτω δραστηριότητα θα βρούμε τη σχέση που συνδέει μια εγγεγραμμένη γωνία με την αντίστοιχή της επίκεντρη με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή και του προγράμματος δυναμικής Γεωμετρίας “The Geometer’s Sketchpad”.

Δραστηριότητα 2

- Έχουμε κατασκευάσει έναν κύκλο (Ο,ΟΠ) με ΟΠ=2cm, την εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και την επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$.
- Μετακινώντας το σημείο Β (ή το Γ) μπορούμε και μεταβάλλουμε τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $B\hat{O}\Gamma$.
- Τα μεγέθη των γωνιών σε μοίρες φαίνονται κάτω από το κάθε σχήμα.

Α. Παραθέτουμε ενδεικτικά σχήματα που προκύπτουν



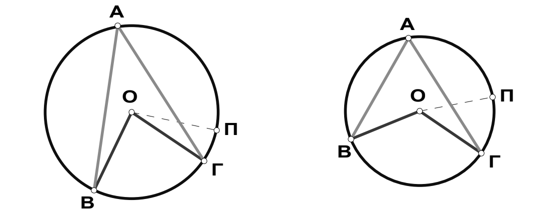
Ακτίνα ΟΟΠ = 2,00 εκατοστά μέγεθος∠ΒΟΓ = 60° μέγεθος∠ΒΑΓ = 30°	Ακτίνα ΟΟΠ = 2,00 εκατοστά μέγεθος∠ΒΟΓ = 82° μέγεθος∠ΒΑΓ = 41°	Ακτίνα ΟΟΠ = 2,00 εκατοστά μέγεθος∠ΒΟΓ = 124° μέγεθος∠ΒΑΓ = 62°

Β. Ταυτόχρονα μπορούμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$	Εγγεγραμμένη $B\hat{A}\Gamma$
60^o	30^o
82^o	41^o
90^o	
124^o	62^o
	90^o
150^o	

(*Μπορείτε και σεις να συμπληρώσετε τα κενά, χωρίς να έχουμε τα αντίστοιχα σχήματα*).

Γ. Μετακινώντας το σημείο Π αλλάζει η ακτίνα του κύκλου. Όσο όμως και να αλλάξουμε την ακτίνα του κύκλου, ο πίνακας δεν μεταβάλλεται.



Ακτίνα οΟΠ = 1,65 εκατοστά
μέγεθος∠ΒΟΓ = 82°
μέγεθος∠ΒΑΓ = 41°

Ακτίνα οΟΠ = 1,40 εκατοστά
μέγεθος∠ΒΟΓ = 124°
μέγεθος∠ΒΑΓ = 62°

Έτσι μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα:

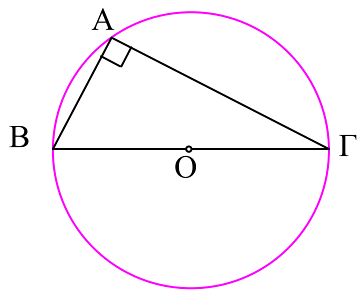
- Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο.

Γνωρίζουμε ότι η επίκεντρη γωνία είναι σε μοίρες όσο και το αντίστοιχο τόξο της. Έτσι

- Η εγγεγραμμένη γωνία σε μοίρες είναι ίση με το μισό του αντίστοιχου τόξου της.

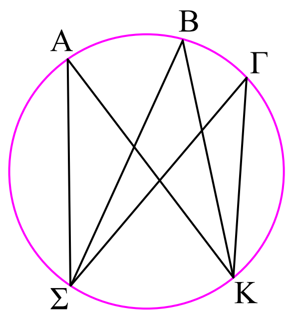
Επίσης είναι γνωστό ότι ένα ημικύκλιο είναι ίσο με 180^o. Οπότε

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



Δραστηριότητα 3

Θα έχετε παρατηρήσει τα θέατρα που έχουν σχήμα «κυκλικό». Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το γιατί. Στο διπλανό σχήμα οι θεατές που κάθονται στις θέσεις Α, Β, Γ παρακολουθούν μία παράσταση που εξελίσσεται στο τόξο $\overset{\frown}{\Sigma K}$. Τι συμπεραίνετε για τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ με τις οποίες κάθε θεατής βλέπει τη σκηνή;



Απάντηση: Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο, που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Sigma K}$. Έτσι αν $\overset{\frown}{\Sigma K} = \mu^o$, τότε καθεμία είναι ίση με $\frac{\mu^o}{2}$. Οπότε κάθε θεατής (και όχι μόνο αυτοί που κάθονται στις θέσεις Α, Β, Γ) βλέπουν τη σκηνή με την ίδια γωνία. Έτσι

- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

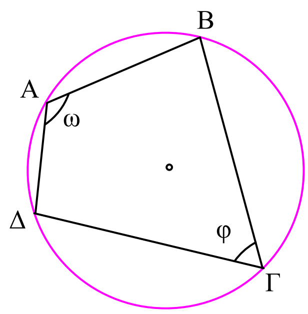
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Οι γωνίες ω, φ του διπλανού σχήματος

α. Είναι ίσες.

β. Έχουν άθροισμα μικρότερο από 180^o

γ. Είναι παραπληρωματικές



(***Διευκρίνιση:*** *Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ βρίσκονται σε τυχαίες θέσεις πάνω στον κύκλο*).

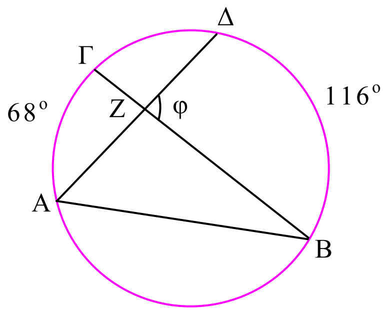
Λύση: Οι γωνίες ω και φ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο και βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Delta}}$ αντίστοιχα. Δεν γνωρίζουμε πόσες μοίρες είναι το κάθε τόξο, αλλά είναι φανερό ότι $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}+\overset{\frown}{\mathrm{BA\Delta}}=360^o$. Επομένως $\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma\Delta}}+\overset{\frown}{\mathrm{BA\Delta}}}{2}=\dfrac{360^0}{2}=180^0$.

Έτσι προκύπτει ότι $ω+φ=180^o$, δηλαδή η σωστή απάντηση είναι η γ.

Σημείωση: Το ίδιο ισχύει και για τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Delta}$. Επομένως μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα:

- Όταν ένα τετράπλευρο έχει τις κορυφές του πάνω σε κύκλο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Άσκηση 2



Στο διπλανό σχήμα είναι $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=68^0$ και $\overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}}=116^0$. Να υπολογίσετε τη γωνία φ.

Λύση: (Προσοχή: Η γωνία φ **δεν** είναι επίκεντρη και βέβαια ούτε είναι εγγεγραμμένη).

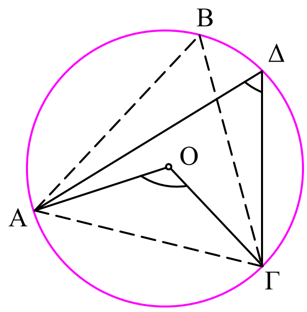
Η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}}$. Έτσι $\hat{\mathrm{A}}=\dfrac{116}{2}=58^o$. Όμοια και $\hat{\mathrm{B}}=\dfrac{68}{2}=34^o$.

Έτσι βρήκαμε τις δύο γωνίες του τριγώνου ΑΒΖ. Επομένως

$\mathrm{A\hat{Z}B}=180^o-(58^o+34^o)$ ή $\mathrm{A\hat{Z}B}=180^o-92^o$ ή $\mathrm{A\hat{Z}B}=88^o$.

Όμως οι γωνίες φ και $\mathrm{A\hat{Z}B}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Έτσι $φ=180^o-88^o$ δηλ. $φ=92^o$.

Άσκηση 3



Στο διπλανό κύκλο με κέντρο Ο είναι $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}=3x+30$ και $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}=\dfrac{5x-30}{2}$.

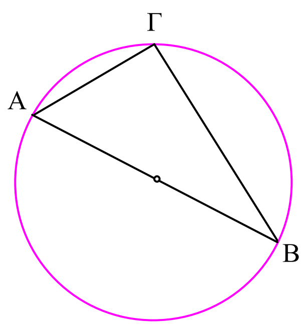
α) Να υπολογίσετε το x.

β) Αν είναι $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του.

Λύση: α) Η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη, η $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}$ επίκεντρη και βαίνουν στο ίδιο τόξο. Έτσι $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}=\dfrac{\mathrm{A\hat{O}\Gamma}}{2}$ ή $\dfrac{5x-30}{2}=\dfrac{3x+30}{2}$ ή $5x-30=3x+30$ ή $5x-3x=30+30$ ή $2x=60$ ή $x=30^o$.

β) Εφόσον τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι ίσα θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές ΑΒ και ΒΓ. Η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει, όπως και η $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$, στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$. Έτσι $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=60^o$. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60^o. Επομένως είναι ισόπλευρο (*γιατί;*).

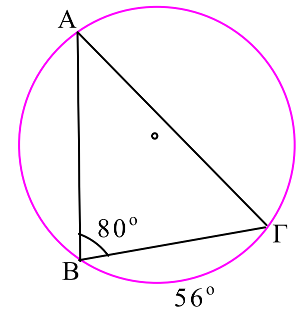
Άσκηση 4



Στο διπλανό κύκλο με διάμετρο ΑΒ η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι κατά 28^o μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

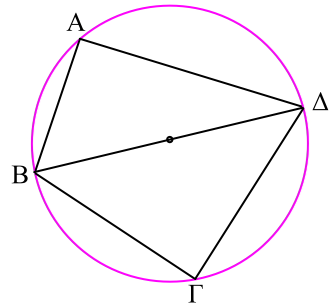
Λύση: Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως ορθή. Αν θεωρήσουμε ότι $\hat{B}$=x, τότε $\hat{A}$=x+28. Όμως σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^{o}$ ή $x+28+x+90=180$ ή $2x+118=180$ ή $2x=180-118$ ή $2x=62$ ή $x=31^{o}$.

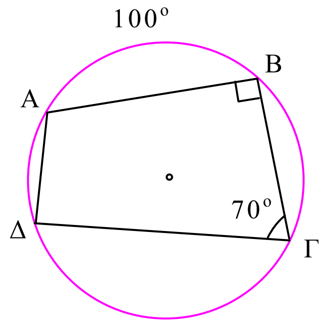
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ



Β25. Να υπολογίσετε σε μοίρες τις εγγεγραμμένες γωνίες καθώς και τα τόξα του κύκλου.

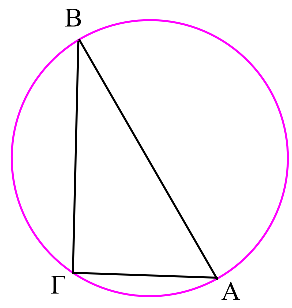
Β26. Στο διπλανό σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου, $A\hat{\Delta}B=36^{0}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}=82^{0}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΔ.

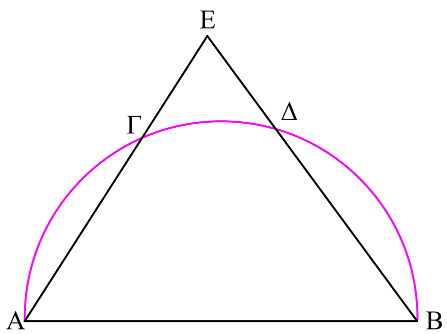




Β27. Στο διπλανό σχήμα είναι: $\hat{B}=90^{0}$, $\overset{\frown}{AB}=100^{0}$ και $\hat{\Gamma}=70^{0}$.
Να υπολογίσετε σε μοίρες:
Τα τόξα $\overset{\frown}{A\Delta}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ καθώς και τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$.
Να δικαιολογήσετε ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

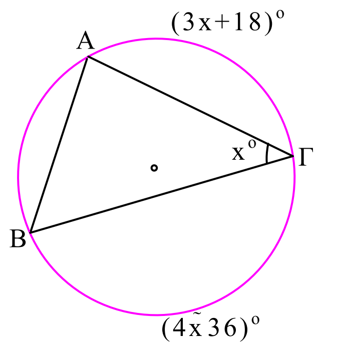
Β28. Στον διπλανό κύκλο με διάμετρο ΑΒ, το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι διπλάσιο από το $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



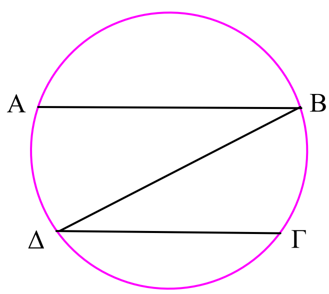


Β29. Στον διπλανό ημικύκλιο $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\overset{\frown}{A\Gamma}=64^{0}$ και $\overset{\frown}{\Delta B}=68^{0}$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΕ.



Β30. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σε μοίρες $\overset{\frown}{A\Gamma}=3x-18$, $\overset{\frown}{B\Gamma}=4x-36$ και $\hat{\Gamma}=x$. Να υπολογίσετε το x.



Β31. Στο διπλανό σχήμα οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Επίσης $\overset{\frown}{B\Gamma}=\psi-42$ και $\hat{B}=\dfrac{\psi}{3}$ (σε μοίρες). Να υπολογίσετε το ψ.