Υπεύθυνοι τάξης: Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Γ. Κατσούλης

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επαναληπτικά Θέματα

Νίκος Κυριακίδης, $7^{ο}$ Γ.Ε.Λ. Ν. Σμύρνης

Άσκηση 1.

Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{x-\lambda}{x+1}+\dfrac{x+\lambda}{x-1}=1$ (1), για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση: Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει και αρκεί $x\neq 1$ και $x\neq -1$. Τότε

$(1)\Leftrightarrow(x-\lambda)(x-1)+(x+\lambda)(x+1)=(x-1)(x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x-\lambda x+\lambda+x^2+x+\lambda x+\lambda=x^2-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+2\lambda=x^2-1\Leftrightarrow x^2=-2\lambda-1$ (2).

Παρατηρούμε ότι: $\lambda>-\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\lambda<1\Rightarrow -2\lambda-1<0$, οπότε η (2) είναι αδύνατη, αφού $x^2\geq 0$,

$\lambda=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\lambda=1\Rightarrow -2\lambda-1=0$, οπότε:

$(2)\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

$\lambda<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\lambda>1\Rightarrow -2\lambda-1>0$, οπότε

(2) $\Leftrightarrow$ $x=\sqrt{-2\lambda-1}$ ή $x=-\sqrt{-2\lambda-1}$. Για να είναι δεκτές οι τιμές αυτές όμως πρέπει και αρκεί να ισχύει $\sqrt{-2\lambda-1}\neq 1$, δηλαδή $-2\lambda-1\neq 1$ και τελικά $\lambda\neq -1$. Επομένως αν $\in(-\infty,-1)\cup(-1,-\dfrac{1}{2})$ έχει δύο λύσεις, τις: $x_1=\sqrt{-2\lambda-1}$ και $x_2=-\sqrt{-2\lambda-1}$.

Αν $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ έχει μία λύση την $x_0=0$, και αν $\lambda=-1$ ή $\lambda\in(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ είναι αδύνατη.

Άσκηση 2.

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+5}{x+6}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+4}{x+5}\quad (1).$$

Λύση: Για να έχει νόημα η (1) πρέπει και αρκεί $x\notin\{-2,-3,-5,-6\}$.Τότε:

$(1)\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x+2}+1-\dfrac{1}{x+6}=1-\dfrac{1}{x+3}+1-\dfrac{1}{x+5}\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+5}\Leftrightarrow\dfrac{2x+8}{x^2+8x+12}=$

$\dfrac{2x+8}{x^2+8x+15}\Leftrightarrow(2x+8)(x^2+8x+15)=$

$(2x+8)(x^2+8x+12)\Leftrightarrow$

$(2x+8)[(x^2+8x+15)-(x^2+8x+12)]=0\Leftrightarrow 3(2x+8)=0$

$\Leftrightarrow 2x+8=0\Leftrightarrow x=-4$ (δεκτή τιμή).

Άσκηση 3.

Α. Να βρείτε τα αναπτύγματα $(6+\sqrt{x})^2$ και $(6-\sqrt{x})^2$.

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A=\sqrt{x+36+12\sqrt{x}}+\sqrt{x+36-12\sqrt{x}}\ .$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση Α=14.

Λύση: Α. Για να έχουν νόημα οι παραστάσεις αυτές πρέπει και αρκεί να ισχύει $x\geq 0$. Τότε έχουμε: $(6+\sqrt{x})^2=6^2+2\cdot 6\cdot\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2=$

$=36+12\sqrt{x}+x=x+36+12\sqrt{x}.(6-\sqrt{x})^2=$

$=6^2-2\cdot 6\cdot\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2=36-12\sqrt{x}+x=x+36-12\sqrt{x}.$

Β. $A=\sqrt{x+36+12\sqrt{x}}+\sqrt{x+36-12\sqrt{x}}$

$=\sqrt{(\sqrt{(6+\sqrt{x})^2}}+\sqrt{(6-\sqrt{x})^2}=\left|6+\sqrt{x}\right|+\left|6-\sqrt{x}\right|=$

$=6+\sqrt{x}+|6-\sqrt{x}|$. Αν $\sqrt{x}\leq 6$ δηλαδή $0\leq x\leq 36$ τότε $A=6+\sqrt{x}+6-\sqrt{x}=12$. Αν $\sqrt{x}>6$ δηλαδή $x>36$ τότε $A=6+\sqrt{x}+\sqrt{x}-6=2\sqrt{x}$.

Γ. Προφανώς η εξίσωση Α=14 είναι αδύνατη για $0\leq x\leq 36$, αφού τότε Α=12 Για $x>36$ έχουμε: $A=14\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=14\Leftrightarrow\sqrt{x}=7\Leftrightarrow x=49$ (Δεκτή τιμή).

Άσκηση 4.

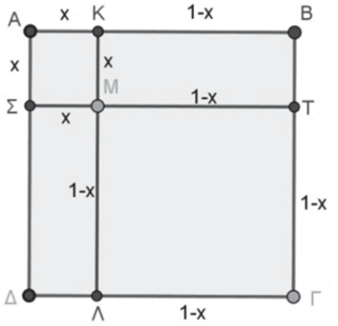
Να δείξετε ότι $\left||x+1|-\sqrt{x}+1\right|\geq\sqrt{x}+1$, για κάθε $x\geq 0$.

Λύση: Αφού τα δύο μέλη της ανίσωσης είναι μη αρνητικά υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της αρκεί να δείξουμε ότι $||x+1|-\sqrt{x}+1|^2\geq(\sqrt{x}+1)^2$, ή $(|x+1|-\sqrt{x}+1)^2\geq(\sqrt{x}+1)^2$, ή $(|x+1|-\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}+1)^2\geq 0$, ή $(|x+1|-\sqrt{x}+1-\sqrt{x}-1)(|x+1|-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}+1)\geq 0$, ή $(|x+1|-2\sqrt{x})((|x+1|+2)\geq 0$. Αφού $|x+1|+2>0$, αρκεί να δείξουμε ότι $|x+1|-2\sqrt{x}\geq 0$, ή $|x+1|\geq 2\sqrt{x}$, ή $|x+1|^2\geq(2\sqrt{x})^2$, ή $(x+1)^2\geq 4x$, ή $x^2+2x+1-4x\geq 0$, ή $x^2-2x+1\geq 0$, ή $(x-1)^2\geq 0$, που αληθεύει για κάθε $x\geq 0$.

Άσκηση 5.

Στις πλευρές ΑΒ,ΑΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ με ΑΒ=1 θεωρούμε σημεία Κ και Σ αντιστοίχως. Οι παράλληλες των ΑΔ, ΑΒ από τα Κ, Σ αντιστοίχως τέμνονται στο Μ και τέμνουν τις ΔΓ, ΒΓ στα Λ,Τ αντιστοίχως. Να βρείτε την θέση του σημείου Κ επί της ΑΒ, έτσι ώστε, το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων ΑΚΜΣ και ΜΤΓΛ να είναι ελάχιστο.

Λύση: Αν ΑΚ=ΑΣ=x, με $x \in (0,1)$, τότε: ΜΤ=ΜΛ=1–x. Τα εμβαδά των δύο τετραγώνων είναι x^2 και $(1-x)^2$ και το άθροισμα των εμβαδών είναι $E(x)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$, τριωνυμική συνάρτηση με α=2>0, β=–2, γ=1, οπότε $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$. Άρα: $\min E(x)=E(\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. Το ελάχιστο προφανώς προκύπτει όταν και μόνο $x=\frac{1}{2}$, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ.



Η αιτιολόγηση του ότι το $\min E(x)= E(\frac{1}{2})$ γίνεται κατά το Σχολικό βιβλίο ως εξής:

$E(x)=2(x^2-x+\frac{1}{2})=2[x^2-2\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2]=$

$=2[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}]= 2[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}] =$

$=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$, με το ίσον μόνο για $x=\frac{1}{2}$

Άσκηση 6.

Ο Υπουργός Οικονομικών της Disneyland, αποφάσισε να ελαφρύνει την φορολογία των πολιτών, επιβάλλοντας κλιμακωτή φορολογία, ανάλογα με το εισόδημα τους και σύμφωνα με τον πίνακα που ακολουθεί.

Τμήμα εισοδήματος σε χιλιάδες ευρώ Από ……. έως και ……	Ποσοστό φόρου του τμήματος εισοδήματος %
0–10	**0**
10–20	**10**
20–30	**20**
Άνω των 30	**30**

Α. **Μπορείτε να βοηθήσετε τον Υπουργό, ώστε να ορίσει την συνάρτηση που θα εκφράζει τον φόρο φ(x) σε σχέση με το εισόδημα x των πολιτών;**

Β. **Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.**

Γ. **Τι φόρο θα πληρώσει ένας πολίτης με εισόδημα 25 χιλιάδες ευρώ; (Να απαντήσετε αλγεβρικά και γραφικά).**

Δ. **Τι εισόδημα είχε ένας πολίτης που πλήρωσε 6 χιλιάδες ευρώ; (Να απαντήσετε αλγεβρικά και γραφικά).**

Λύση:

Α. Έστω x χιλιάδες ευρώ τα έσοδα ενός πολίτη. Τότε: $0\leq x\leq 10 \Rightarrow \varphi(x)= 0$

$10<x\leq 20\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(10) +(x-10)\,\frac{10}{100} =$

$=0+0{,}1x-1 = 0{,}1x-1$.

$20<x\leq 30\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(20) +(x-20)\,\frac{20}{100} =$

$=(0{,}1\cdot 20-1)+0{,}2x-4 = 0{,}2x-3$.

$30<x\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(30) +(x-30)\,\frac{30}{100} =$

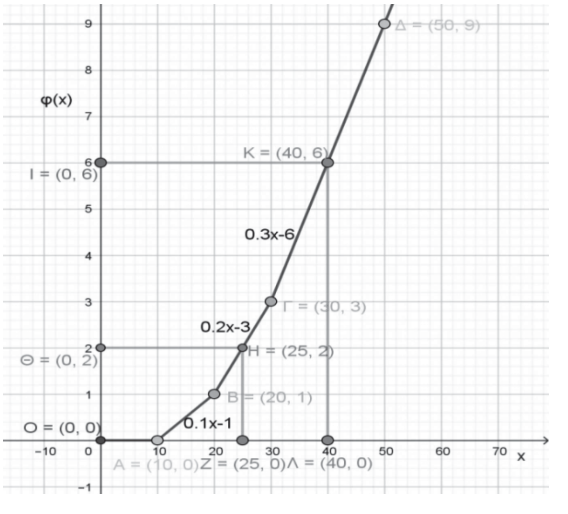
$=(0{,}2\cdot 30-3)+0{,}3x-9 = 0{,}3x-6$.

Επομένως η συνάρτηση θα είναι:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & 0\leq x\leq 10 \\ 0.1x-1, & 10<x\leq 20 \\ 0.2x-3, & 20<x\leq 30 \\ 0.3x-6, & x>30 \end{cases}$$

Β. Κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης φ(x), που αποτελείται από κλάδους, οι οποίοι είναι της μορφής αx+β, οπότε η γραφική παράσταση της φ(x) είναι μία τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από τα ευθύγραμμα ΟΑ, ΑΒ, ΒΓ και την ημιευθεία ΓΔ.

x	φ(x)	Σημείο
0	0	Ο(0,0)
10	0	Α(10,0)
20	1	Β(20,1)
30	2	Γ(30,2)
50	9	Δ(50,9)



Γ. Αλγεβρικά: Αν x=25, αφού $25\in(20,30)$,από τον τρίτο κλάδο έχουμε $\varphi(25)=0.2\cdot 25-3=5-3=2$ χιλιάδες ευρώ. **Γραφικά:** Η παράλληλη από το σημείο Ζ(25,0) προς τον άξονα των y, τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x) στο σημείο Η(25,2) και η παράλληλη από το σημείο Η στον άξονα των x τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Θ(0,2).Επομένως το σημείο Ζ του άξονα των x αντιστοιχεί με το σημείο Θ του άξονα των y, δηλαδή το εισόδημα των 25 χιλ. ευρώ αντιστοιχεί σε φόρο 2 χιλ. ευρώ. Άρα ο πολίτης με εισόδημα 25 χιλ. ευρώ θα πληρώσει 2 χιλ. ευρώ.

Δ. Αλγεβρικά: Αν ο φόρος είναι φ(x)=6 χιλ. ευρώ θα πρέπει να επιλέξουμε τον κατάλληλο κλάδο. Προφανώς δεν μπορεί να είναι ο πρώτος κλάδος φ(x)=0. Αν ήταν ο δεύτερος κλάδος φ(x) =0.1x–1, με $10 < x \le 20$, τότε λύνοντας την εξίσωση φ(x)=6, έχουμε $0.1x–1=6 \Leftrightarrow x = 70$, που απορρίπτεται γιατί $70 \notin (10,20]$. Αν ήταν ο τρίτος κλάδος φ(x)=0.2x–3, με $20 < x \le 30$, τότε λύνοντας την εξίσωση φ(x)=6, έχουμε $0.2x–3=6 \Leftrightarrow x = 45$, που επίσης απορρίπτεται γιατί $45 \notin (20,30]$. Επομένως θα πρέπει να είναι ο τέταρτος και τελευταίος κλάδος φ(x)=0.3x–6, με x>30. Ας το ελέγξουμε: $φ(x)=6 \Leftrightarrow 0.3x - 6 = 6 \Leftrightarrow x = 40$, που είναι δεκτή γιατί 40>30. **Γραφικά:** Η παράλληλη από το σημείο Ι(0,6) προς τον άξονα των x, τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x) στο σημείο Κ(40,6) και η παράλληλη από το σημείο Κ στον άξονα των y τέμνει τον άξονα των x στο σημείο Λ(40,0).Επομένως το σημείο Ι του άξονα των y αντιστοιχεί με το σημείο Λ του άξονα των x, δηλαδή ο φόρος των 6 χιλ. ευρώ αντιστοιχεί σε εισόδημα 40 χιλ. ευρώ. Επομένως ο πολίτης που πλήρωσε φόρο 6 χιλ. ευρώ είχε εισόδημα 40 χιλ. ευρώ.

Άσκηση 7.

Να αποδείξετε ότι $|x+1|+|x–1|=2 \Leftrightarrow |x|\le 1$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι:

$$|x+1|+|x-1|=2 \Leftrightarrow |x+1|+|1-x| = |x+1+1-x| \overset{\substack{x+1=\alpha\\1-x=\beta}}{\Leftrightarrow}$$

$$|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\le 1 \Leftrightarrow |x|^2\le 1 \Leftrightarrow |x|\le 1.$$

Άσκηση 8.

Αν Α(–1,0) και Β(8,0) είναι δύο σημεία, να βρείτε σημείο Μ(x,0) τέτοιο ώστε

(ΑΜ)=2(ΒΜ) (1).

Λύση: Ισχύει $(AM)=|x-(-1)|=|x+1|$ και $(BM)=|x-8|$, οπότε (1) $\Leftrightarrow |x+1|=2|x-8| \Leftrightarrow x+1=2(x–8)$ ή $x+1=–2(x–8) \Leftrightarrow x+1=2x–16$ ή $x+1=–2x+16 \Leftrightarrow x=17$ ή $x=5$.

Συνεπώς υπάρχουν δύο τέτοια σημεία τα: $M_1(17,0)$ και $M_2(5,0)$.

Άσκηση 9.

Να αποδείξετε ότι :

Α. $\alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 \ge \frac{1}{2}$.

Β. $\alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha\cdot\beta \le \frac{1}{4}$.

Γ. $x^2+y^2=1 \Rightarrow |xy| \le \frac{1}{2}$

Δ. $x^2+y^2=1 \Rightarrow |x+y| \le \sqrt{2}$

Λύση: Ισχύει $(\alpha-\beta)^2\ge 0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\ge 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$ (1)

Από τη σχέση (1) που συνδέει το γινόμενο με το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών, εύκολα προκύπτει η σχέση $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\ge 4\alpha\beta$, δηλαδή $(\alpha+\beta)^2\ge 4\alpha\beta$ (2), που συνδέει το γινόμενο με το άθροισμα και η σχέση: $2\alpha^2+2\beta^2 \ge \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$, δηλαδή $2(\alpha^2+\beta^2)\ge(\alpha+\beta)^2$ (3) που συνδέει το άθροισμα με το άθροισμα των τετραγώνων.

Α. Εύκολα αντιλαμβανόμαστε πλέον ότι:
(3) $\Rightarrow 2(\alpha^2+\beta^2) \ge 1^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 \ge \frac{1}{2}$ και

Β. (2) $\Rightarrow 1^2\ge 4\alpha\beta \Rightarrow \alpha.\beta \le \frac{1}{4}$.

Γ. Όμοια: αν $x^2+y^2=1$, δηλαδή $|x|^2+|y|^2=1$, τότε:
(1) $\Rightarrow |x|^2+|y|^2\ge 2|x||y| \Rightarrow 1\ge 2|xy| \Rightarrow |xy|\le \frac{1}{2}$ και

Δ. (3) $\Rightarrow 2(x^2+y^2)\ge (x+y)^2 \Rightarrow 2\cdot 1\ge |x+y|^2 \Rightarrow$
$|x+y| \le \sqrt{2}$.

Άσκηση 10.

Αν αποδείξετε ότι:

Α. $\alpha+\beta+\gamma=1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \frac{1}{3}$.

Β. $\alpha+\beta+\gamma=1 \Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le \frac{1}{3}$.

Λύση: Α. Ισχύουν $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$, $\beta^2+\gamma^2\ge 2\beta\gamma$ και $\gamma^2+\alpha^2\ge 2\gamma\alpha$,για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Rightarrow$

$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

$\Rightarrow 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge(\alpha+\beta+\gamma)^2 \Rightarrow 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge 1$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ge \frac{1}{3}$

Β. Ισχύει $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \Rightarrow$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \overset{(A)}{\Rightarrow} 1-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\ge \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\le \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\le \frac{1}{3}.$$

Ασκήσεις στις προόδους

Κωνσταντίνος Γιατράς, Κυριάκος Καμπούκος

Άσκηση 1

Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύει

$$\frac{S_6}{S_{11}}=\frac{34}{99}$$

Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{11}}$.

Λύση

Αφού $\frac{S_6}{S_{11}}=\frac{34}{99}$ και $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1+(n-1)\omega]$ έχουμε $\frac{3(2\alpha_1+5\omega)}{11(\alpha_1+5\omega)}=\frac{34}{99}$, και επομένως $\alpha_1 = \frac{7}{4}\omega$. Έτσι ο ζητούμενος λόγος γράφεται $\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{11}}=\frac{\alpha_1+22\omega}{\alpha_1+10\omega}=\frac{\frac{7}{4}\omega+22\omega}{\frac{7}{4}\omega+10\omega}=\frac{95}{47}$.

Άσκηση 2

Αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι και οι αριθμοί

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}},\quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}},\quad \frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$$

είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση

Για να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αρκεί:

$$2\frac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} \quad \text{ή αρκεί} \quad 2\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)=\left(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}\right)\left(2\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}\right)$$

ή αρκεί $2\beta = \gamma+\alpha$, που ισχύει αφού α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι σε κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει:

$$\alpha_\lambda^{\mu-\nu}\cdot\alpha_\mu^{\nu-\lambda}\cdot\alpha_\nu^{\lambda-\mu}=1$$

Λύση

Για τον όρο λ τάξεως της γεωμετρικής προόδου με λόγο ω, ισχύει $\alpha_\lambda = \alpha_1\omega^{\lambda-1}$, επομένως

$$\alpha_\lambda^{\mu-\nu}=\alpha_1^{\mu-\nu}\omega^{(\lambda-1)(\mu-\nu)}$$

Ομοίως, για τον μ–οστο και ν–οστο όρο αντίστοιχα, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha_\mu^{\nu-\lambda}=\alpha_1^{\nu-\lambda}\omega^{(\mu-1)(\nu-\lambda)} \quad \text{και} \quad \alpha_\nu^{\lambda-\mu}=\alpha_1^{\lambda-\mu}\omega^{(\nu-1)(\lambda-\mu)}$$

Έτσι έχουμε

$$\alpha_\lambda^{\mu-\nu}\alpha_\mu^{\nu-\lambda}\alpha_\nu^{\lambda-\mu}=\alpha_1^{\mu-\nu}\alpha_1^{\nu-\lambda}\alpha_1^{\lambda-\mu}\omega^{(\lambda-1)(\mu-\nu)}\omega^{(\mu-1)(\nu-\lambda)}\omega^{(\nu-1)(\lambda-\mu)}=\alpha_1^0\cdot\omega^0=1,\ \text{αφού}\ \alpha_1,\omega\neq 0$$

Άσκηση 4

Έστω (α_n) γεωμετρική πρόοδος. Να δείξετε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$S_n=\alpha_1\cdot\alpha_n\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

Λύση

- Αν λ=1, τότε $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$ και $S_n=n\cdot\alpha_1$, οπότε $S_n=\alpha_1^2\dfrac{n}{\alpha_1}=\alpha_1\cdot\alpha_n\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\ldots+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$
- Αν λ≠1, τότε $S_n=\alpha_1\dfrac{\lambda^n-1}{\lambda-1}$ και $\alpha_n=\alpha_1\lambda^{n-1}$, οπότε:

$$\alpha_1\cdot\alpha_n\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right)=\alpha_1\cdot\alpha_1\lambda^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\lambda\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\lambda^{n-1}\alpha_1}\right)$$
$$=\alpha_n\left(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\ldots+\lambda+1\right)=\alpha_1\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}=S_n$$

Άσκηση 5

Για τη γεωμετρική πρόοδο (b_n) ισχύει

$$\begin{cases}\dfrac{b_2}{b_4}=\dfrac{1}{4}\\ b_2+b_5=216\end{cases}$$

Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της προόδου.

Λύση

Έστω b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν λ ο λόγος της και $b_3=b$, τότε:

$$b_1=\frac{b}{\lambda^2},\quad b_2=\frac{b}{\lambda},\quad b_4=b\lambda,\quad b_5=b\lambda^2$$

Επομένως

$$\frac{b_2}{b_4}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow \lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2.$$

Επίσης $b_2+b_5=216\Rightarrow b=\dfrac{216\lambda}{1+\lambda^3}$

Για λ=2 έχουμε b=48 και $b_1=\dfrac{b}{4}=12$, ενώ για λ=–2 έχουμε $b=\dfrac{216\cdot 2}{7}$ και $b_1=\dfrac{b}{4}=\dfrac{108}{7}$

Άσκηση 6

Έστω (α_n) αριθμητική πρόοδος για την όποια ισχύει

$$\begin{cases}\alpha_2+\alpha_5-\alpha_3=10\\ \alpha_2+\alpha_9=17\end{cases}$$

Βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου και στην συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα $S=\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{22}+\alpha_{23}$.

Λύση

Εφόσον για τον n–οστο όρο αριθμητικής προόδου ισχύει $\alpha_n=\alpha_1+(n-1)\omega$ έχουμε:

$$\alpha_2+\alpha_5-\alpha_3=\alpha_1+3\omega=10 \text{ και } \alpha_2+\alpha_9=\alpha_1+9\omega=17.$$

Επιλύοντας το σύστημα ως προς α_1 και ω προκύπτει $\alpha_1=7$ και ω= –1.

Έτσι

$$S=\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{22}+\alpha_{23}=S_{23}-S_{10}=\frac{23}{2}\left[2.7+(23-1)(-1)\right]-\frac{10}{2}\left[2.7+(10-1)(-1)\right]=-117$$