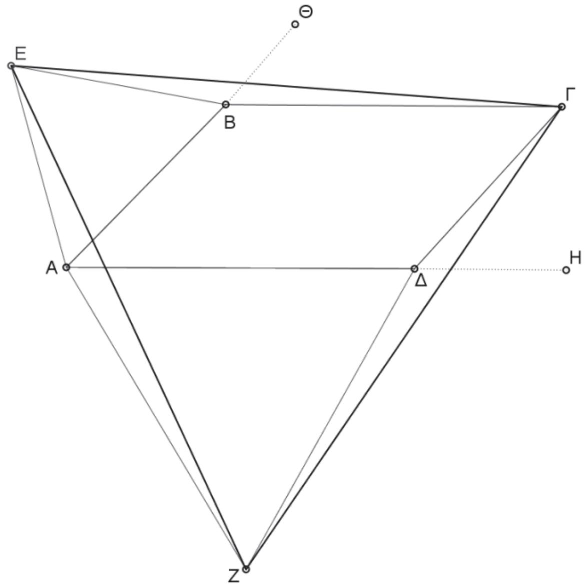
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Προβλήματα Γεωμετρίας

Κοσπεντάρης Γιώργος, Καψάλας Νικόλαος.
1ο Πειραματικό ΓΕΛ Αθήνας «Γεννάδειο»

Πρόβλημα 1

Εξωτερικά ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο.



Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΔΖΓ. Έχουν: $\widehat{ΖΑΕ} = \widehat{ΖΑΔ} + \widehat{ΔΑΒ} + \widehat{ΒΑΕ} = 60^o + \widehat{ΓΔΗ} + 60^o$ (γιατί οι γωνίες $\widehat{ΖΑΔ}$ και $\widehat{ΒΑΕ}$ είναι γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων και οι γωνίες $\widehat{ΔΑΒ}$ και $\widehat{ΓΔΗ}$ είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ, όπου ΔΗ η προέκταση της ΑΔ)$=120^o + \widehat{ΓΔΗ} = \widehat{ΓΔΗ} + \widehat{ΗΔΖ}$ (εφ' όσον η $\widehat{ΗΔΖ}$ εξωτερική γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΖΑΔ) $= \widehat{ΓΔΖ}$. Επίσης έχουν: ΑΖ = ΑΔ = ΔΖ (από το ισόπλευρο ΑΖΔ) και ΕΑ = ΑΒ (από το ισόπλευρο ΑΒΕ) = ΔΓ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ).

Βάσει του κριτηρίου ΠΓΠ έχουμε τριγ. ΑΕΖ = τριγ. ΔΓΖ, οπότε ΕΖ = ΖΓ (1).

Συγκρίνουμε στη συνέχεια τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΕΒΓ. Αυτά έχουν: $\widehat{ΕΒΓ} = \widehat{ΕΒΘ}$ (όπου Θ η προέκταση της ΑΒ) $+ \widehat{ΘΒΓ} = 120^o + \widehat{ΒΑΔ}$ (γιατί η γωνία $\widehat{ΕΒΘ}$ είναι εξωτερική του ισοπλεύρου τριγώνου ΕΑΒ και η γωνία $\widehat{ΘΒΓ}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΒΓ και ΑΔ που τέμνονται από την ΑΒ) = γων. ΖΑΕ (βλ. παραπάνω).

Επίσης: ΒΓ = ΑΔ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)=ΑΖ (πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ΖΑΔ) και ΕΒ = ΑΕ (πλευρές του ισοπλεύρου ΑΒΕ).

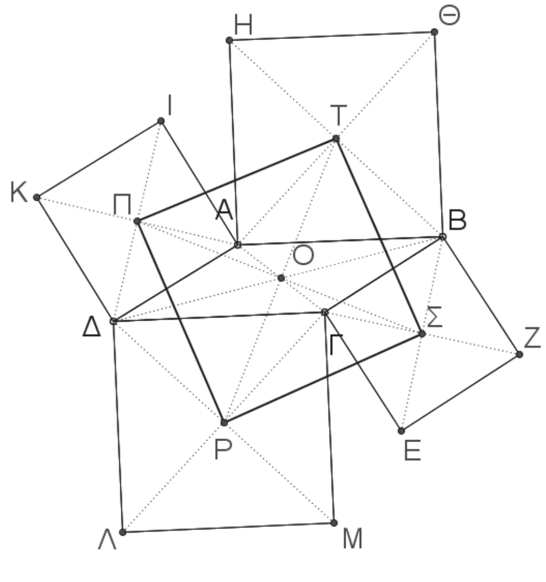
Βάσει του ΠΓΠ έχουμε τριγ. ΑΕΖ = τριγ. ΕΒΓ, οπότε ΕΓ = ΕΖ (2). Από (1) και (2) έχουμε: ΕΓ= ΕΖ = ΖΓ, δηλ. το ΓΕΖ ισόπλευρο.

Πρόβλημα 2

Εξωτερικά του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΘΗ, ΒΓΕΖ, ΔΓΜΛ και ΑΔΚΙ. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το τετράπλευρο που σχηματίζουν τα κέντρα των τετραγώνων είναι τετράγωνο.

β) Οι διαγώνιες του τετραγώνου αυτού διέρχονται από το ίδιο σημείο με τις διαγώνιες του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Έστω τα κέντρα των τετραγώνων ΑΒΘΗ, ΒΓΕΖ, ΓΔΛΜ και ΑΔΚΙ, Τ, Σ, Ρ, Π αντίστοιχα. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΣΤ και ΑΠΤ. Έχου-με: ΑΠ = ΒΣ (μισά διαγωνίων των ίσων τετρα-γώνων ΑΔΚΙ και ΒΓΕΖ) και ΤΒ = ΤΑ (μισά των διαγωνίων του τετραγώνου ΑΒΘΗ). Επίσης:

$$\widehat{ΤΒΣ} = \widehat{ΤΒΑ} + \widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΣ} = 45^o + \widehat{ΑΒΓ} + 45^o$$

(εφ'όσον η διαγώνιος τετραγώνου διχοτομεί τη γωνία της κορυφής που είναι ορθή) = $90^o + \widehat{ΑΒΓ}$ = 90^o + $\widehat{ΗΑΙ}$ (οι γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΗΑΙ}$ είναι ίσες γιατί είναι οξείες και έχουν τις πλευρές κάθετες, ΑΗ κάθετη στην ΑΒ και ΑΙ κάθετη στην ΑΔ, οπότε και στην παράλληλή της ΒΓ) = γων. ΠΑΤ. Άρα, από κριτήριο ΠΓΠ, έχουμε τρίγ. ΒΣΤ = τριγ. ΑΠΤ, οπότε ΠΤ = ΤΣ (1). Με εντελώς όμοιο τρόπο έχουμε τριγ. ΒΣΤ = τριγ. ΠΔΡ, οπότε ΤΣ = ΠΡ (2) και τριγ. ΓΣΡ = τριγ. ΒΣΤ, οπότε ΤΣ = ΣΡ (3). Έτσι, από (1), (2) και (3): ΠΤ = ΤΣ = ΠΡ = ΡΣ. Άρα το ΤΣΡΠ είναι ρόμβος.

Στη συνέχεια έχουμε: $\widehat{ΠΤΣ} = \widehat{ΠΤΑ} + \widehat{ΑΤΣ} = \widehat{ΣΤΒ} + \widehat{ΑΤΣ}$ (από τα ίσα τρίγωνα ΑΠΤ και ΒΣΤ) = $\widehat{ΑΤΒ} = 90^o$ (οι διαγώνιες τετραγώνου τέμνο-νται κάθετα). Άρα, το τετράπλευρο ΤΣΡΠ είναι ρόμβος με μία ορθή γωνία, οπότε είναι τετράγωνο.

β) Οι διαγώνιες του τετραγώνου ΤΣΡΠ έχουν κοινό μέσο. Το ίδιο ισχύει και για τις διαγώνιες του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Θα δείξουμε τώρα ότι το ΒΣΔΠ είναι παραλλη-λόγραμμο. Πράγματι, ΒΣ = ΠΔ (μισά διαγωνίων των ίσων τετραγώνων ΑΔΚΙ και ΒΓΕΖ) και $\widehat{ΠΔΒ}$ = $\widehat{ΠΔΑ} + \widehat{ΑΔΒ} = 45^o + \widehat{ΑΔΒ}$ (η διαγώνιος τετραγώνου διχοτομεί τη γωνία της κορυφής) = $45^o + \widehat{ΑΔΒ} = 45^o + \widehat{ΔΒΓ}$ (γιατί οι γωνίες $\widehat{ΑΔΒ}$ και $\widehat{ΔΒΓ}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλ-λήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΒ) = $\widehat{ΣΒΓ} + \widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΔΒΣ}$, οπότε ΠΔ παράλληλη της ΒΣ, εφ' όσον έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Συνεπώς το ΒΣΔΠ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες. Άρα, οι διαγώνιές του ΠΣ και ΒΔ έχουν κοινό μέσο, έστω Ο. Αλλά η ΠΣ έχει, όπως είδαμε παραπάνω, κοινό μέσο με την ΤΡ και η ΒΔ κοινό μέσο με την ΑΓ. Εν τέλει, και οι τέσσερις έχουν κοινό μέσο το Ο.

Πρόβλημα 3

Έστω Ε, Δ, Ζ τρία τυχαία σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι οι τρεις κύκλοι που ορίζονται από τις τριάδες σημείων (Α, Ζ, Δ), (Β, Ε, Δ) και (Γ, Ε, Ζ) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

Έστω ότι οι κύκλοι που ορίζονται από τις τριάδες σημείων (Β, Ε, Δ) και (Γ, Ε, Ζ) τέμνονται στο σημείο Μ[*]. Τότε, το τετράπλευρο ΒΕΜΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, άρα: $\widehat{ΔΜΕ} = 180^o - \widehat{ΑΒΓ}$ (1) (οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές). Όμοια στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΕΜΖ θα έχουμε: $\widehat{ΕΜΖ} = 180^o - \widehat{ΑΓΒ}$ (2). Με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$\widehat{ΔΜΕ} + \widehat{ΕΜΖ} = 360^o - (\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΑΓΒ}) \Rightarrow$$

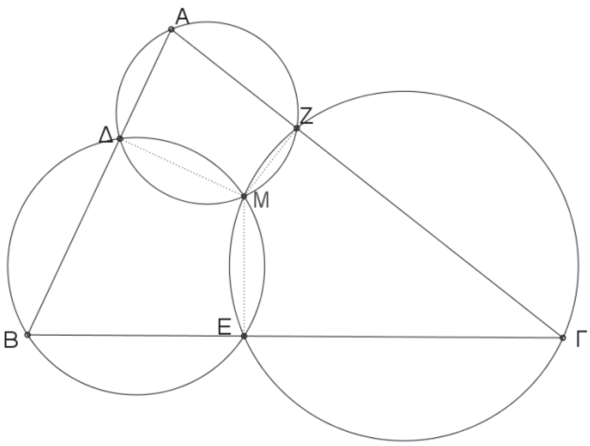
$$360^o - \widehat{ΔΜΖ} = 360^o - (\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΑΓΒ}) \Rightarrow$$

$$\widehat{ΔΜΖ} = \widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΑΓΒ} \Rightarrow \widehat{ΔΜΖ} = 180^o - \widehat{ΒΑΓ}$$

(άθροισμα γωνιών τριγώ-νου ΑΒΓ) $\Rightarrow$

$$\widehat{ΔΜΖ} + \widehat{ΒΑΓ} = 180^o.$$

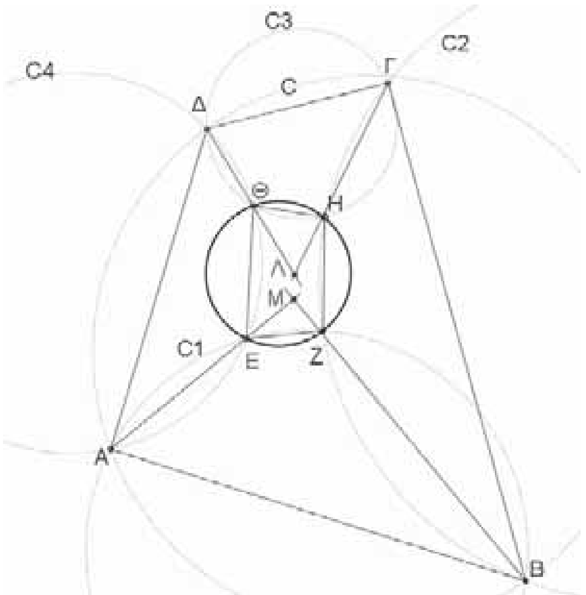
Δηλαδή, στο τετράπλευρο ΑΔΜΖ οι δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο. Άρα, ο κύκλος που ορίζει η (Α, Ζ, Δ) διέρχεται επίσης από το σημείο Μ.



[*] Αφήνεται στον αναγνώστη να τροποποιήσει ελαφρά τη λύση στην περίπτωση που το σημείο Μ είναι εξωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 4

Να αποδειχθεί ότι τα σημεία τομήςς των περιφερειών, που έχουν χορδές τις πλευρές εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι κορυφές άλλου τετραπλεύρου εγγράψιμου σε κύκλο.



Λύση

Έστω το εγγεγραμμένο στον κύκλο (C) τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

Γράφουμε κύκλους (C_1), (C_2), (C_3) και (C_4), με τυχαία ακτίνα, που έχουν ως χορδές τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ, αντίστοιχα, του ΑΒΓΔ.

Οι κύκλοι αυτοί τέμνονται, ο καθένας με τον διπλανό του, στα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ πρέπει να αποδείξουμε ότι το σχηματιζόμενο τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο.

Φέρουμε τις κοινές χορδές ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ και ΔΘ των τεμνόμενων κύκλων και έχουμε:

Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (C_1), οπότε η εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική, δηλ. $\widehat{ΜΕΖ} = \widehat{ΑΒΖ}$ (1).

Όμοια στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΕΘΔ έχουμε $\widehat{ΜΕΘ} = \widehat{ΑΔΘ}$ (2), στο εγγεγραμμένο ΔΓΗΘ έχουμε $\widehat{ΘΗΛ} = \widehat{ΓΔΘ}$ (3) και στο εγγεγραμμένο ΓΒΖΗ έχουμε $\widehat{ΛΗΖ} = \widehat{ΓΒΖ}$ (4).

Συνεπώς:

$\widehat{ΘΕΖ} + \widehat{ΘΗΖ} = \widehat{ΘΕΜ} + \widehat{ΜΕΖ} + \widehat{ΘΗΛ} + \widehat{ΛΗΖ} =$ (από (1), (2), (3) και (4)) =

$\widehat{ΑΔΘ} + \widehat{ΑΒΖ} + \widehat{ΓΔΘ} + \widehat{ΓΒΖ} =$

$\widehat{ΑΒΖ} + \widehat{ΓΒΖ} + \widehat{ΑΔΘ} + \widehat{ΓΔΘ} =$

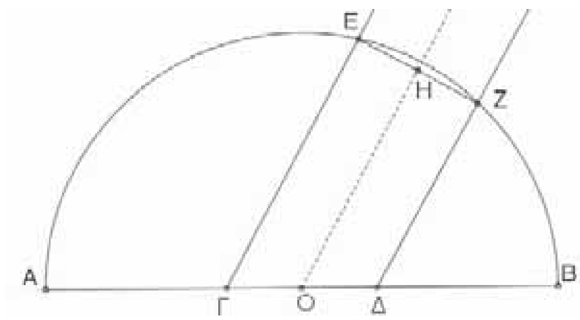
$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΔΑ} = 180^o$

(εφ'όσον το αρχικό τετρά-πλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές).

Αποδείξαμε ότι $\widehat{ΘΕΖ} + \widehat{ΘΗΖ} = 180^o$, δηλαδή, οι δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ είναι παραπληρωματικές, οπότε αυτό είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 5

Σε ημικύκλιο κέντρου Ο παίρνουμε πάνω στη διάμετρο ΑΒ δύο σημεία Γ και Δ ώστε ΓΟ=ΟΔ. Δύο παράλληλες ημιευθείες με αρχές τα Γ, Δ τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι 1 το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στα ΓΕ και ΔΖ.



Λύση

Από το κέντρο Ο του ημικυκλίου φέρουμε ημιευθεία παράλληλη προς τις ΓΕ και ΔΖ, που τέμνει το τμήμα ΕΖ στο Η.

Το τετράπλευρο ΓΔΖΕ είναι τραπέζιο και η ΟΗ είναι παράλληλη προς τις βάσεις από το μέσο της πλευράς ΓΔ, άρα είναι διάμεσος του τραπεζίου.

Συνεπώς το Η είναι μέσο του ΕΖ. Αφού το Η μέσο της χορδής ΕΖ, το ΟΗ είναι απόστημά της, δηλαδή ΟΗ κάθετη στο ΕΖ.

Εφ' όσον οι ΓΕ και ΔΖ παράλληλες της ΟΗ θα είναι και αυτές κάθετες στο ΕΖ.