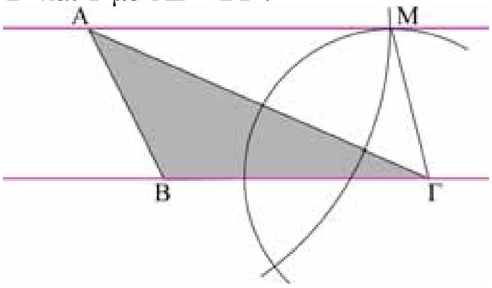
Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Παναγιώτης Ζούζιας, Χρήστος Π. Τσιφάκης - 3ο ΓΕΛ Κερατσινίου

Άσκηση 1η. Δίνεται μια ευθεία (ε) και σημείο Α εκτός αυτής. Να κατασκευάσετε ευθεία (δ) παράλληλη προς την (ε) από το σημείο Α.

Λύση: Πάνω στην ευθεία (ε) παίρνουμε δύο σημεία Β και Γ με $AB < B\Gamma$.

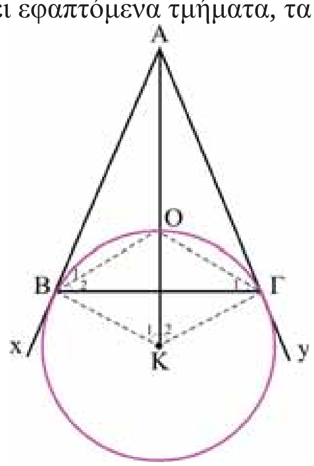


Με κέντρο το Α και ακτίνα ΒΓ γράφουμε κύκλο (C_1) και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΑΒ γράφουμε κύκλο (C_2). Επειδή η διάκεντρος $\delta = A\Gamma$ και οι ακτίνες $\rho_1 = B\Gamma$ και $\rho_2 = AB$ των (C_1), (C_2) είναι πλευρές τριγώνου δηλαδή $|\rho_1 - \rho_2| < \delta < \rho_1 + \rho_2$) οι δύο κύκλοι θα τέμνονται στο σημείο Μ΄ που ανήκει στο ημιεπίπεδο (ΑΓ, Β) και στο Μ που ανήκει στο αντικείμενο ημιεπίπεδο (δηλαδή βρίσκονται εκατέρωθεν της ΑΓ. Το ΑΒΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, άρα η ευθεία ΑΜ//(ε)*.

Μπορείτε να βρείτε άλλον τρόπο κατασκευής;

Άσκηση 2η. Δίνεται γωνία $x\hat{A}\psi$ και κύκλος με κέντρο Κ ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές Ax, $A\psi$ της γωνίας στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ο. Να δείξετε ότι το σημείο Ο είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

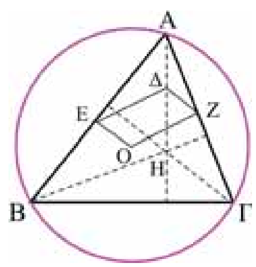
Λύση: Από το Α, εξωτερικό σημείο του κύκλου έχουμε φέρει εφαπτόμενα τμήματα, τα ΑΒ, ΑΓ.



Άρα η ΑΚ είναι διχοτόμος των γωνιών $B\hat{A}\Gamma$ και $B\hat{K}\Gamma$ (γιατί;). Έχουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (υπό χορδής και εφαπτομένης) και $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\hat{K}_1$ (ως επίκεντρη και εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο). Άρα $\hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{K}_1$ και αφού $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$, έχουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Άρα η ΒΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$. (Όμοια δείχνουμε ότι η ΓΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$). Άρα το σημείο Ο είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 3η. Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Ονομάζουμε Η το ορθόκεντρο του ΑΒΓ, Δ το μέσον του τμήματος ΑΗ, Ε το μέσον της πλευράς ΑΒ και Ζ το μέσον της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: i) $E\Delta // OZ$
ii) Το ΟΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: i) Στο τρίγωνο ΑΒΗ η ΕΔ ενώνει μέσα πλευρών, άρα $E\Delta // BH$. Αφού $BH \perp A\Gamma$ έπεται ότι $E\Delta \perp A\Gamma$ και επειδή $OZ \perp A\Gamma$ έχουμε $E\Delta // OZ$.



ii) Όμοια δείχνουμε ότι $Z\Delta // OE$. Άρα το τετράπλευρο ΟΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

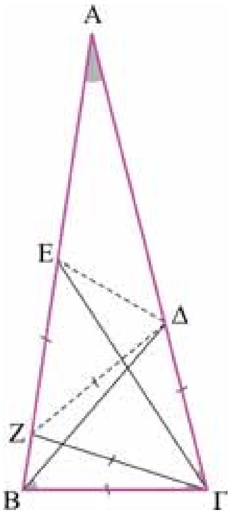
Άσκηση 4η. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία της κορυφής $\hat{A} = 20^\circ$. Πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα, ώστε $A\hat{B}\Delta = 30^\circ$ και $A\hat{\Gamma}E = 20^\circ$. Να δείξετε ότι $\Delta\hat{E}\Gamma = 30^\circ$.

Λύση: Μέσα στην γωνία $\hat{\Gamma}$ κατασκευάζουμε γωνία $B\hat{\Gamma}Z = 20^\circ$ όπου Ζ σημείο της πλευράς ΑΒ.

Τότε θα είναι: $B\hat{Z}\Gamma = \hat{B} = 80^\circ$, άρα $\Gamma Z = B\Gamma$. $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma = 50^\circ$, άρα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αφού $Z\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ$ το τρίγωνο ΖΓΔ είναι ισόπλευρο.

Άρα $\Gamma Z = B\Gamma = Z\Delta$ και αφού $A\hat{E}\Gamma = 140^\circ$ τότε $Z\hat{E}\Gamma = Z\hat{\Gamma}E = 40^\circ$ οπότε προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΖΕΓ και ΖΕΔ είναι ισοσκελή.

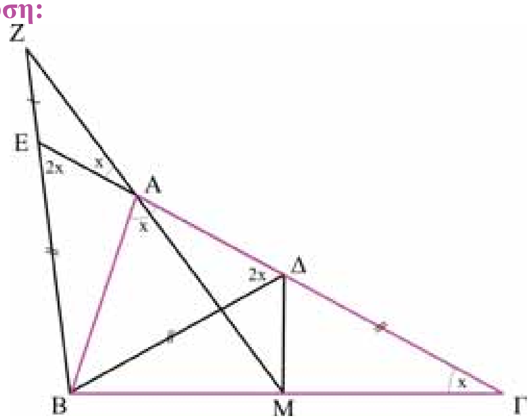
Αλλά $E\hat{Z}\Delta = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε $Z\hat{E}\Delta = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.



Άρα $\Gamma\hat{E}\Delta = 70^o - 40^o = 30^o$.

Άσκηση 5η. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^o$) με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Προεκτείνουμε την ΓΑ κατά τμήμα $AE = A\Delta$. Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓτέμνει την ΒΕ στο Ζ. Να δείξετε ότι: i) $EZ = EA$ ii) $BZ = A\Gamma$

Λύση:

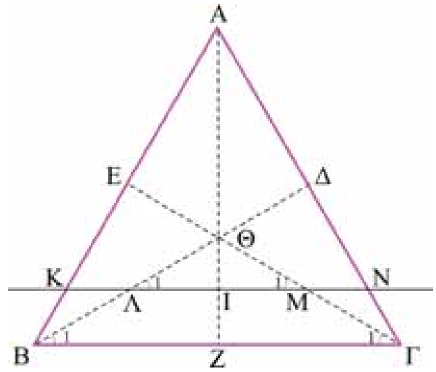


i) Ισχύει ότι $\Delta\Gamma = B\Delta = BE$ (γιατί;) οπότε $\Delta\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B = x$ και $B\hat{E}\Delta = B\hat{\Delta}E = 2x$. Επίσης έχουμε ότι $MA = MB = M\Gamma$ άρα $M\hat{A}\Gamma = x$ οπότε $\hat{A}_1 = x$ και τότε $\hat{Z} = A\hat{E}B - \hat{A}_1 = 2x - x = x$ δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{Z}$, άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

ii) Έχουμε ότι: $BZ = BE + EZ = B\Delta + EA =$
$= B\Delta + A\Delta = \Delta\Gamma + A\Delta = A\Gamma$.

Άσκηση 6η. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\left(AB = A\Gamma\right)$ και τις διαμέσους του ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία $(\varepsilon)//B\Gamma$ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Κ, τη ΒΔ στο Λ, τη ΓΕ στο Μ και την ΑΓ στο Ν. Να δείξετε ότι $K\Lambda = MN$.

Λύση: Έστω Θ το σημείο τομής των διαμέσων ΒΔ, ΓΕ. Η τρίτη διάμεσος ΑΖ διέρχεται από το Θ, είναι μεσοκάθετη στη ΒΓ και έστω ότι τέμνει την (ε) στο Ι. Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $KN//B\Gamma$ τότε το τρίγωνο ΑΚΝ είναι ισοσκελές (γιατί;) και η ΑΙ μεσοκάθετος της ΚΝ. Άρα $KI = IN$.

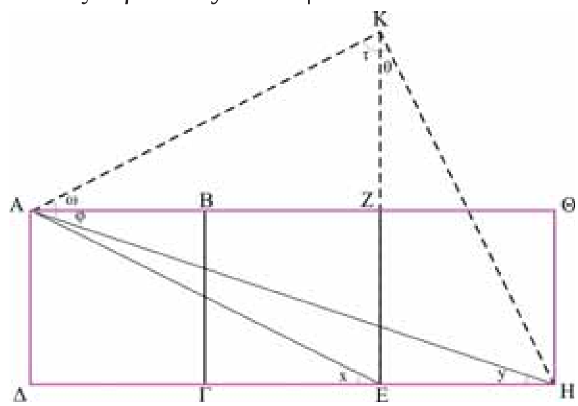


Αφού $B\Delta = \Gamma E$ (γιατί;) τότε $B\Theta = \Gamma\Theta$ (γιατί;) οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{M}_1$, δηλαδή $\hat{M}_1 = \hat{\Lambda}_1$. Συνεπώς το τρίγωνο ΘΛΜ είναι ισοσκελές, οπότε $\Lambda I = IM$ και $K\Lambda = MN$.

Άσκηση 7η. Θεωρούμε τα διαδοχικά τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΒΓΕΖ, ΖΕΘΗ. Να δείξετε ότι: $A\hat{E}\Delta + A\hat{H}\Delta = 45^o$.

Λύση: Στην προέκταση της πλευράς ΕΖ προς το Ζ παίρνουμε τμήμα ΖΚ=ΕΖ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΚΖΑ είναι ίσα γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα $\hat{x} = \hat{\omega}$. Αλλά έχουμε και $\hat{y} = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ. Άρα $\hat{x} + \hat{y} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$.



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΕΗ και ΚΖΑ είναι ίσα γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα $KA = KH$ και $\hat{\theta} = \hat{\omega}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΖΑ έχουμε $\hat{\tau} + \hat{\omega} = 90^o \Rightarrow \hat{\tau} + \hat{\theta} = 90^o \Rightarrow A\hat{K}H = 90^o$.

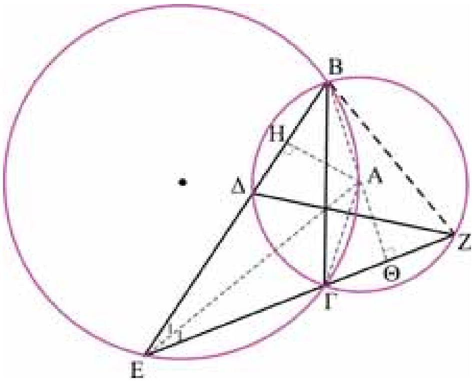
Άρα το τρίγωνο ΑΚΗ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 45^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = 45^o$ συνεπώς $A\hat{E}\Delta + A\hat{H}\Delta = 45^o$.

Άσκηση 8η. Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R) και ένα σημείο του Α. Ο κύκλος (A,ρ) με $\rho < R$, τέμνει τον κύκλο (O,R) στα σημεία Β και Γ. Στο κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ του κύκλου (A,ρ) παίρνουμε σημείο Δ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει πάλι

τον κύκλο (O,R) στο σημείο Ε και η ευθεία ΕΓ τον κύκλο (A,ρ) στο Ζ. Να δείξετε ότι:

i) $B\Delta = \Gamma Z$ **και ii)** $E\Delta = E\Gamma$.

Λύση: i) Έχουμε ότι $AB = A\Gamma = \rho$,



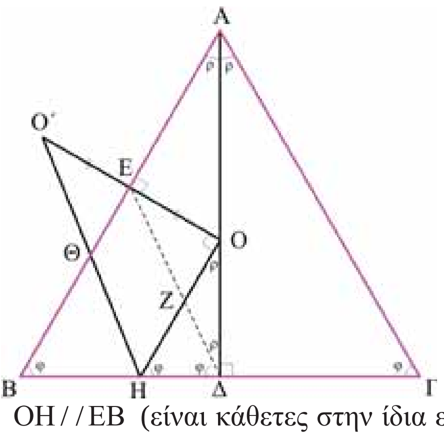
άρα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$ οπότε $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$. Άρα η ΕΑ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}$. Συνεπώς οι αποστάσεις ΑΗ και ΑΘ του σημείου Α (αποστήματα) από τις πλευρές της είναι ίσες, οπότε και οι χορδές $B\Delta = \Gamma Z$.

ii) Αφού από i) έχουμε $B\Delta = \Gamma Z \Rightarrow \overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma Z}$
$\Rightarrow \overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma Z} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} \Rightarrow \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Delta Z}$.

Άρα $B\hat{Z}\Gamma = Z\hat{B}\Delta$ οπότε το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές. Έτσι θα έχουμε: $EB = EZ \Rightarrow E\Delta + \Delta B = E\Gamma + \Gamma Z \Rightarrow E\Delta = E\Gamma$.

Άσκηση 9η. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και έστω Ε το μέσον της πλευράς ΑΒ. Από το Ε φέρνουμε κάθετη η οποία τέμνει το ύψος ΑΔ στο σημείο Ο.
Εάν Ο΄είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ΑΒ και $OH \perp OO'$, να δείξετε ότι $O'H // A\Gamma$.

Λύση: Φέρνουμε την ΕΔ η οποία είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ. Λόγω της παραλληλίας αυτής, έχουμε: $E\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}$.



Επίσης $OH // EB$ (είναι κάθετες στην ίδια ευθεία) οπότε προκύπτει $E\hat{B}H = O\hat{H}\Delta = \hat{\varphi}$.

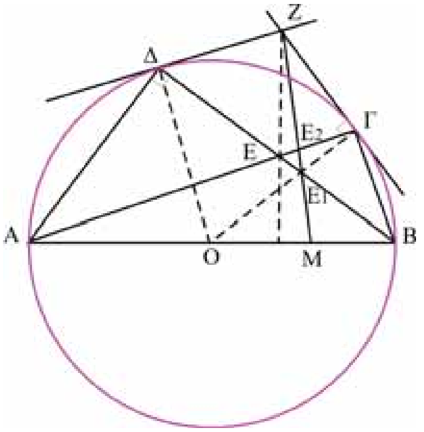
Άρα το τρίγωνο ΖΗΔ είναι ισοσκελές και αφού το τρίγωνο ΟΗΔ είναι ορθογώνιο έχουμε $ZH = Z\Delta = OZ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο Ο'ΗΟ έχουμε ότι το Ε είναι μέσον του Ο'Ο και $OH // E\Theta$, άρα $E\Theta // = \frac{OH}{2} = ZH$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΕΘΗΖ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $E\Delta // A\Gamma$ προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 10η. Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΑΒ και δύο χορδές ΑΓ, ΒΔ στο ίδιο ημιεπίπεδο που τέμνονται στο σημείο Ε. Στα σημεία Γκαι Δ φέρνουμε εφαπτόμενες που τέμνονται στο σημείο Ζ. Από το σημείο Ζ φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ. Να δείξετε ότι αυτή θα περάσει από το σημείο Ε.

Λύση: Φέρνουμε την $ZM \perp AB$ και έστω ότι αυτή δεν θα περάσει από το Ε αλλά θα τέμνει την ΑΓ στο E_2 και την ΒΔ στο E_1.

Τότε το τετράπλευρο $A\Delta E_1 M$ είναι εγγράψιμο οπότε $\Delta\hat{A}M = \Delta\hat{E}_1 Z$ (1).

Όμοια το τετράπλευρο $\Gamma E_2 MB$ είναι εγγράψιμο οπότε $\Gamma\hat{B}M = \Gamma\hat{E}_2 Z$ (2).

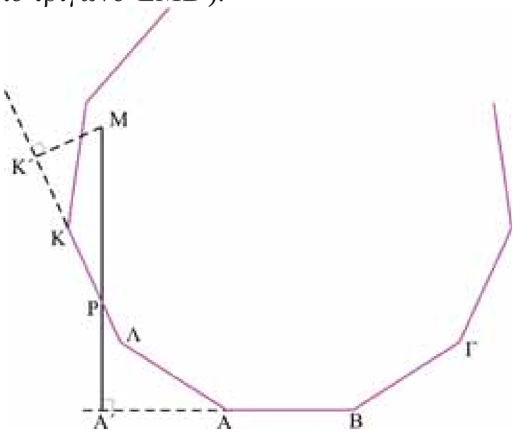


Αλλά $\Delta\hat{A}M = Z\hat{\Delta}E_1$ (3) (υπό χορδής και εφαπτομένης) και όμοια $\Gamma\hat{B}M = Z\hat{\Gamma}E_2$ (4). Από (1), (3) προκύπτει $Z\hat{E}_1\Delta = Z\hat{\Delta}E_1$, άρα $Z\Delta = ZE_1$ (5) και από (2), (4) $Z\hat{\Gamma}E_2 = Z\hat{E}_2\Gamma$ οπότε $Z\Gamma = ZE_2$ (6). Αλλά $Z\Delta = Z\Gamma$ (7) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο Ζ. Άρα έχουμε ότι $ZE_1 = ZE_2$ δηλαδή τα σημεία E_1 και E_2 ταυτίζονται και συνεπώς
το τρίγωνο EE_1E_2 δεν υπάρχει. Άρα η ΖΜ διέρχεται από το σημείο Ε.

Άσκηση 11η. Θεωρούμε ένα κυρτό πολύγωνο ΑΒΓ...ΚΛ, ένα εσωτερικό σημείο Μ και τα κάθετα τμήματα ΜΑ΄, ΜΒ΄, ΜΓ΄, …, ΜΚ΄, ΜΛ΄ αντίστοιχα, προς τις ευθείες που περιέχουν τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, …, ΚΛ, ΛΑ. Να δείξετε ότι, αν ένα από αυτά τα κάθετα τμήματα το ΜΑ΄ είναι μικρότερο ή ίσο καθενός από τα άλλα κάθετα τμήματα, τότε το σημείο Α΄ ανήκει στην πλευρά ΑΒ (ευθύγραμμο τμήμα).

Λύση: Έστω ότι το Α΄ δεν ανήκει στην πλευρά AB, οπότε το σημείο Α΄ θα ανήκει στην προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος AB και συνεπώς το Α΄ θα είναι εξωτερικό σημείο του πολυγώνου. Λόγω αυτού και επειδή το σημείο M είναι εσωτερικό σημείο του πολυγώνου, το ευθύγραμμο τμήμα ΜΑ΄ θα τέμνει μία πλευρά του πολυγώνου, έστω την ΚΛ στο σημείο Ρ.

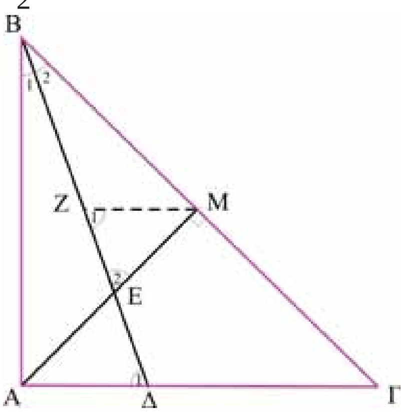
Επίσης $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$). Όμοια $\hat{E}_1 = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΜΒ).



Έτσι θα έχουμε $MA' > MP$ και επειδή προφανώς $MP \geq MK'$ θα έχουμε $MA' > MK'$, άτοπο, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι $MA' \leq MK'$. Άρα το σημείο Α΄ θα ανήκει στην πλευρά AB.

Άσκηση 12η. Έστω ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, $\hat{A} = 90^o \left(AB = A\Gamma\right)$. Η διάμεσός του AM και η διχοτόμος του $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο E. Να δείξετε ότι $\Delta\Gamma = 2 \cdot EM$.

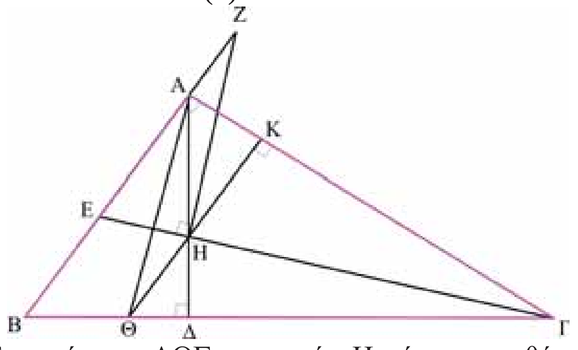
Λύση: Από το σημείο M φέρνουμε παράλληλη προς την ΓΑ η οποία τέμνει την διχοτόμο $B\Delta$ στο σημείο Z. Αφού το M είναι το μέσον της $B\Gamma$ άρα το σημείο Z είναι μέσον της $B\Delta$. Άρα έχουμε $ZM = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2 \cdot ZM$ (1).



Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{E}_1$ συνεπώς το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές, οπότε $EM = MZ$. Άρα $\Delta\Gamma = 2 \cdot EM$.

Άσκηση 13η. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^o$ και $A\Delta$ το ύψος του. Από τυχαίο σημείο E της AB φέρνουμε την EH κάθετη στο ύψος $A\Delta$. Η κάθετη επί της $H\Gamma$ στο σημείο H τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι $AZ = BE$.

Λύση: Από το σημείο Η φέρνουμε την ΘΗΚ παράλληλη προς την AB που τέμνει τις $B\Gamma$, $A\Gamma$ στα σημεία Θ, K αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο $EB\Theta H$ είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο, οπότε $EB = \Theta H$ (1).



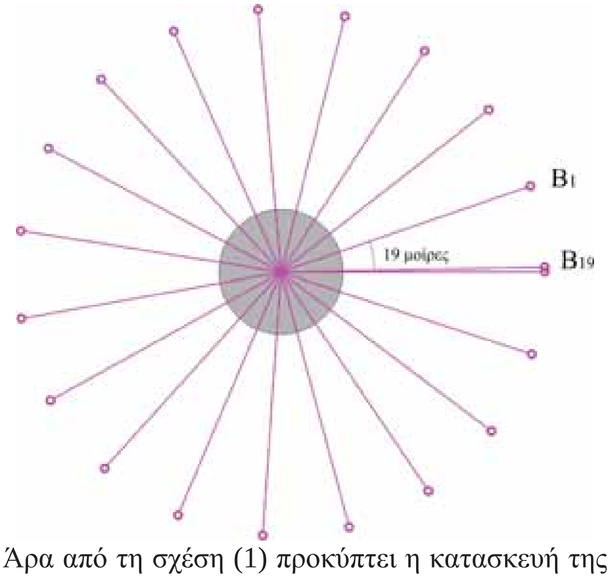
Στο τρίγωνο ΑΘΓ το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο, άρα $A\Theta \perp \Gamma H$ και αφού $ZH \perp \Gamma H$ προκύπτει ότι $A\Theta // ZH$. Αφού $AZ // \Theta H$ τότε $AZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $AZ = \Theta H$ (2). Συνεπώς $AZ = BE$.

Άσκηση 14η. Με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη να χωριστεί η γωνία των 19^o σε 19 ίσα μέρη.

Λύση: Θεωρούμε τη γωνία: $A\hat{O}B_1 = 19^o$ (Σχήμα 1)

Παρατηρούμε ότι:

$19 \cdot A\hat{O}B_1 = 19 \cdot 19^o = 361^o = 360^o + 1^o$ (1)



Άρα από τη σχέση (1) προκύπτει η κατασκευή της γωνίας της 1^o.

Κατασκευή: Λαμβάνω με χάρακα και διαβήτη δεκαεννέα φορές τη γωνία των 19^o διαδοχικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Έτσι προκύπτει η γωνία που έχει αρχική πλευρά την ΟΑ και τελική την OB_{19} και φυσικά είναι γωνία μεγαλύτερη των 360^o κατά μια μοίρα.

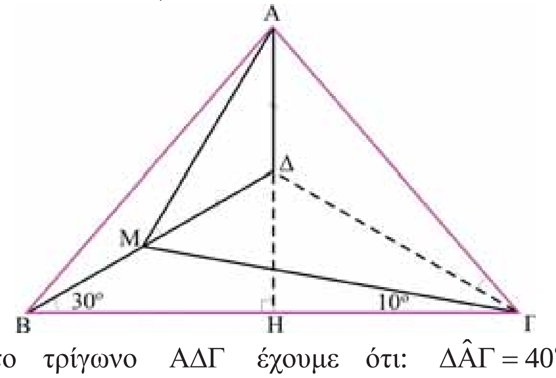
Για να χωρίσω τώρα τη γωνία των 19^o σε 19 ίσα μέρη αρκεί να τοποθετήσω τη γωνία της μια μοίρας 19 φορές μέσα στη γωνία $A\hat{O}B_1$.

2ος τρόπος (***Μαρία Ρουσούλη,*** *Μαθηματικός 3ου Γ. Λυκείου Καστοριάς*)

Με δεδομένο ότι η γωνία των 60^o κατασκευάζεται με χάρακα και διαβήτη (με τη βοήθεια του ισοπλεύρου τριγώνου), μπορούμε να λάβουμε τη γωνία των 15^o, διχοτομώντας αυτήν δύο φορές. Αφαιρώντας τώρα τη γωνία των 15^o από τη γωνία των 19^o προκύπτει η γωνία των 4^o την οποία διχοτομώντας πάλι δύο φορές πετυχαίνουμε την κατασκευή της γωνίας της μιας μοίρας. Άρα μπορούμε τώρα εύκολα με τη γωνία της μιας μοίρας, να χωρίσουμε τη γωνία των 19^o σε 19 ίσα μέρη. Περισσότερες λύσεις https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=15584

Άσκηση 15η. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, $(AB=A\Gamma)$ είναι $\hat{A}=80^o$. Θεωρούμε σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $M\hat{B}\Gamma=30^o$ και $M\hat{\Gamma}B=10^o$. Να υπολογίσετε την γωνία $A\hat{M}\Gamma$.

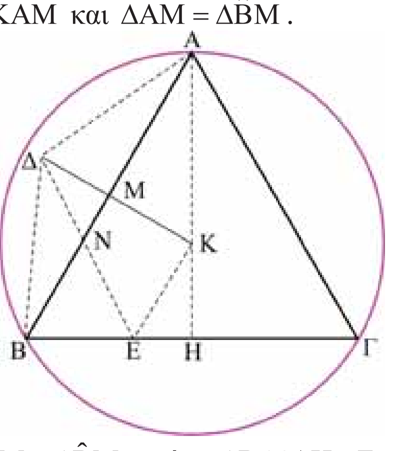
Λύση: Η διχοτόμος ΑΗ τέμνει την προέκταση της ΒΜ στο σημείο Δ. Τότε οι γωνίες του τριγώνου ΔΒΓ είναι 30^o, 30^o και 120^o.



Στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ότι: $\Delta\hat{A}\Gamma=40^o$, $\Delta\hat{\Gamma}A=50^o-30^o=20^o$ και $A\hat{\Delta}\Gamma=120^o$. Όμοια στο τρίγωνο ΔΜΓ έχουμε: $M\hat{\Gamma}\Delta=20^o$, $M\hat{\Delta}\Gamma=B\hat{\Delta}\Gamma=120^o$ και $\Delta\hat{M}\Gamma=40^o$. Από την ισότητα δε των τριγώνων έχουμε $M\Delta=A\Delta$. Άρα $A\hat{M}\Delta=\dfrac{180^o-120^o}{2}=30^o$ και τότε $A\hat{M}\Gamma=A\hat{M}\Delta+\Delta\hat{M}\Gamma=30^o+40^o=70^o$.

Άσκηση 16η. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, $(AB=A\Gamma)$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K,R) και το σημείο Δ είναι το συμμετρικό του κέντρου Κ ως προς την πλευρά ΑΒ. Φέρνουμε την ΔΝΕ παράλληλη στην πλευρά ΑΓ όπου Ν και Ε αντίστοιχα τα σημεία τομής της με τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{K}E=90^o$.

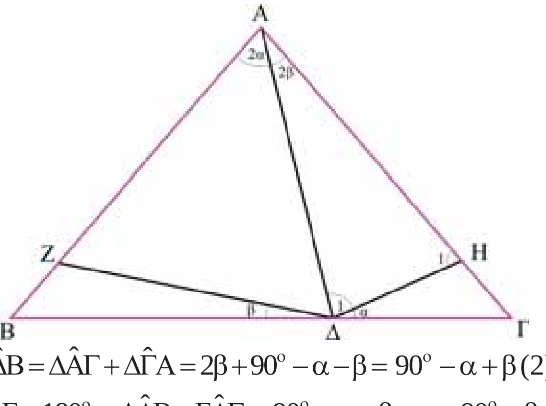
Λύση: Φέρνουμε τις ΑΔ και ΔΒ οπότε έχουμε ότι: $\Delta\hat{A}M=K\hat{A}M$ και $\Delta\hat{A}M=\Delta\hat{B}M$.



Άρα $K\hat{A}M=\Delta\hat{B}M$ οπότε $\Delta B//AH$. Συνεπώς το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ορθογώνιο. Αφού $\Delta NE//A\Gamma$ έχουμε ότι $\Delta\hat{E}B=\hat{\Gamma}=A\hat{B}\Gamma$. Άρα η ΒΝ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΕ. Συνεπώς στο τρίγωνο ΔΚΕ η ΜΝ ενώνει μέσα πλευρών, άρα $MN//KE$ και αφού $\Delta\hat{M}N=90^o$ έχουμε $\Delta\hat{K}E=90^o$.

Άσκηση 17η. Στη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, $(AB=A\Gamma)$ παίρνουμε σημείο Δ. Στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}B=2\cdot\Gamma\hat{\Delta}E$ και $\Delta\hat{A}\Gamma=2\cdot B\hat{\Delta}Z$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

Λύση: Έστω ότι $E\hat{\Delta}\Gamma=\alpha$ και $Z\hat{\Delta}B=\beta$. Τότε έχουμε: $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^o-\hat{A}}{2}=90^o-(\alpha+\beta)$ (1).



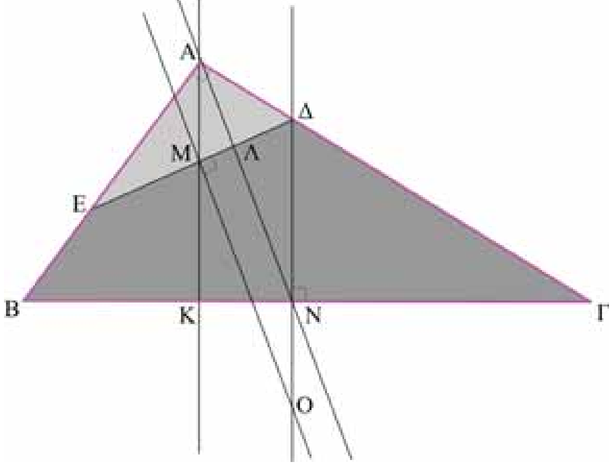
$A\hat{\Delta}B=\Delta\hat{A}\Gamma+\Delta\hat{\Gamma}A=2\beta+90^o-\alpha-\beta=90^o-\alpha+\beta$ (2).

$A\hat{\Delta}E=180^o-A\hat{\Delta}B-E\hat{\Delta}\Gamma=90^o+\alpha-\beta+\alpha=90^o-\beta$

$A\hat{E}\Delta=E\hat{\Delta}\Gamma+E\hat{\Gamma}\Delta=\alpha+90^o-\alpha-\beta=90^o-\beta$ Άρα $A\hat{\Delta}E=A\hat{E}\Delta=90-\beta$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Συνεπώς $A\Delta=AE$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι $A\Delta = AZ$, άρα τελικά $AE = AZ$.

Άσκηση 18η. Στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογωνίου και μη ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Εκαι Δ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\hat{E}\Delta = A\hat{\Gamma}B$. Συμβολίζουμε Μ το μέσον του ΕΔ, Ν το μέσον της ΒΓ και Ο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ΕΔ και ΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΟΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση: Αφού έχουμε ότι $E\Delta \perp OM$ και $ON \perp B\Gamma$, αρκεί να δείξουμε ότι $AM \perp B\Gamma$ και $E\Delta \perp A\Lambda$.



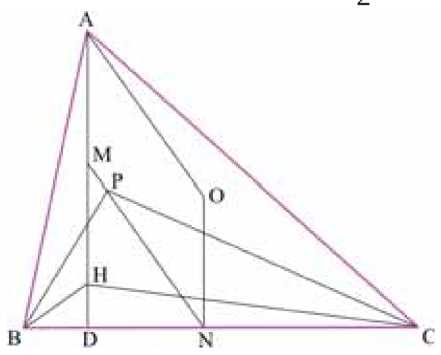
Στο τρίγωνο ΑΚΒ έχουμε ότι: $K\hat{B}A = 90^o - A\hat{\Gamma}B$. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $A\hat{E}\Delta = A\hat{\Gamma}B$, άρα $K\hat{B}A = 90^o - A\hat{E}\Delta$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΕ έχουμε ότι $A\hat{E}\Delta = B\hat{A}K$, συνεπώς. Άρα $AM \perp B\Gamma$ οπότε $AM // NO$. Επίσης $A\hat{\Delta}E + \Delta\hat{A}K = \Gamma\hat{B}A + A\hat{\Gamma}B = 90^o$. Άρα $A\Lambda // MO$, συνεπώς το ΑΜΟΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 19η. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ABC και H το ορθόκεντρό του. Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των τμημάτων AH και BC αντίστοιχα. Εάν οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{B}H$ και $A\hat{C}H$ τέμνονται στο σημείο P να αποδείξετε ότι:

i) $B\hat{P}C = 90^o$

ii) τα σημεία M, N, P είναι συνευθειακά.

Λύση: **i)** Έχουμε ότι: $P\hat{B}H = \dfrac{90^o - \hat{A}}{2}$ και $H\hat{B}C = 90^o - \hat{C}$, άρα $P\hat{B}C = 135^o - \dfrac{\hat{A}}{2} - \hat{C}$.



Τότε $P\hat{C}B = 135^o - \dfrac{\hat{A}}{2} - \hat{B}$ οπότε $P\hat{B}C + P\hat{C}B = $
$= 270^o - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} = 90^o$. Άρα $B\hat{P}C = 90^o$.

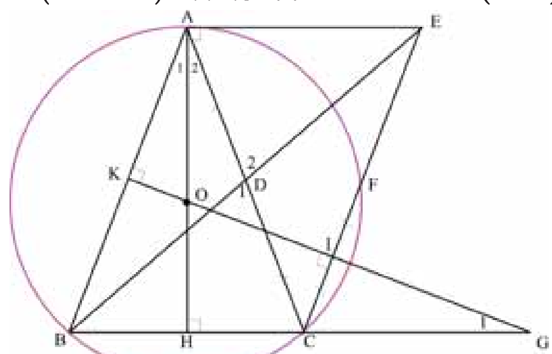
ii) Έστω Dτο ίχνος του ύψους πάνω στην BC και O το περίκεντρο του τριγώνου ABC. Τότε το AMNO είναι παραλληλόγραμμο. (γιατί;)

Άρα $D\hat{M}N = D\hat{A}O$ και τότε έχουμε: $D\hat{A}O = B\hat{A}C - 2B\hat{A}D = \hat{A} - 2\left(90^o - \hat{B}\right)$ οπότε

$D\hat{N}M = 90^o - D\hat{M}N = 270^o - \hat{A} - 2\hat{B} = 2B\hat{C}P = D\hat{N}P$.

Άρα τα σημεία M, N, P είναι συνευθειακά.

Άσκηση 20η. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABC\left(AB = AC\right)$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $\left(O,R\right)$.



Προεκτείνουμε την διάμεσό του BD και παίρνουμε τμήμα $BD = DE$. Φέρνουμε την EC που τέμνει τον κύκλο στο σημείο F. Να δείξετε ότι:

i) $AE // BC$ και το AECB είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Εάν το σημείο I είναι το μέσον του FC και η OI τέμνει την προέκταση της BC στο σημείο G να δείξετε ότι: $B\hat{A}C = 2 \cdot B\hat{G}O$.

Λύση

i) Τα τρίγωνα ADE και CBD είναι ίσα, άρα $E\hat{A}D = B\hat{G}D$ οπότε $AE // BC$ και $AE = BC$ συνεπώς το AECB είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Αφού το σημείο I είναι το μέσον του FC έχουμε ότι $OI \perp FC$ και τότε $OI \perp AB$ στο σημείο Κ.

Άρα οι γωνίες $\hat{G}$ και $\hat{A}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2}$ είναι ίσες οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Βιβλιογραφία:

Αντώνης Κυριακόπουλος: Ασκήσεις Γεωμετρίας Α' (1978)
Καλοπίσης – Τασσόπουλος: Επίπεδη Γεωμετρία Οικονομικού (1977)
Στέλιος Παχής: Ασκήσεις Γεωμετρίας Γ΄ Γυμνασίου, Α΄
Βαγγέλης Σταματιάδης: Σημειώσεις Επιπεδομετρίας.
Ηλίας Λούβης: Ευκλείδια Γεωμετρία Α Λυκείου
Κώστας Δόρτσιος – Η στήλη των Μαθηματικών, έτος 2007
Περιοδικό Θεαίτητος,
Παλαιοδημόπουλος Νίκος, Σύνθετες Ασκήσεις Γεωμετρίας Α
Μπάμπης Στεργίου, Θαλής Γ Γυμνασίου. Παγκύπριος Διαγωνισμός Α Λυκείου 2010
Vietnam, Ασκήσεις Γεωμετρίας

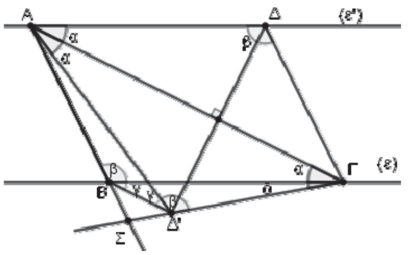
*ΜΙΑ ΕΥΧΑΡΙΣΤΗ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

(από τον **Γιώργο Τασσόπουλο**)

Την κατασκευή αυτή (ομολογουμένως συντομότατη), πρωτάκουσα από τον δάσκαλό μου Ποθητό Σταυρόπουλο το 1966 και την συμπεριέλαβα, με την άδειά του, στο βιβλίο «Γεωμετρία Οικονομικού κύκλου» σελίδα 165 που συνέγραψα με τον Τάσο Καλοπίση το 1977. Με την ευκαιρία της επαναφοράς της στη μνήμη μου από τους δύο εκλεκτούς συναδέλφους, μου γεννήθηκαν δύο ενδιαφέροντα ερωτήματα που μπορούν άνετα να τεθούν ως ανοικτό πρόβλημα (δραστηριότητα) σε μαθητές της Α Λυκείου.

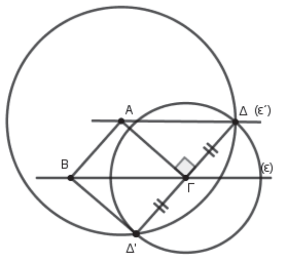
α) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $AB\Delta'\Gamma$;

β) Τα σημεία Δ, Δ' είναι πάντοτε εκατέρωθεν της (ε) ;



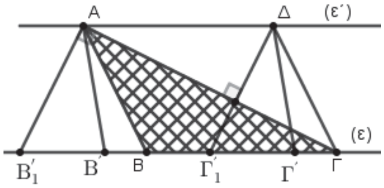
Για το πρώτο ερώτημα αρκεί να γνωρίζουμε το άθροισμα των γωνιών τριγώνου. Πράγματι τα τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓΔ΄, ΑΓΒ είναι ίσα (έχουν τρεις πλευρές ίσες μια προς μία). Άρα $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}'\Gamma = A\hat{B}\Gamma = \hat{\beta}$, $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta' = A\hat{\Gamma}B = \hat{\alpha}$ και $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta' = \Gamma\hat{A}B$. Άρα τα τρίγωνα $AB\Delta'$, $\Gamma\Delta'B$ είναι για τον ίδιο λόγο ίσα, οπότε $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}'$. Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta'$ έχουμε $2\hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\beta} = 180^o$ (1) και στο $B\Gamma\Delta'$ επίσης $2\hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\beta} = 180^o$ από τις οποίες προκύπτει $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$, άρα $A\Gamma // B\Delta'$.

- Αν η ΓΔ΄ τέμνει την ΓΔ τότε θα τέμνει και την παράλληλό της ΑΒ οπότε το ΑΒΔ΄Γ θα είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού ΓΔ΄=ΓΔ=ΑΒ.

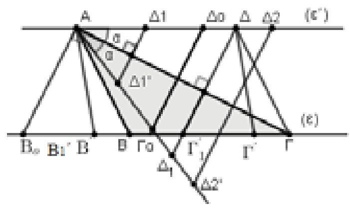


(Το ισοσκελές τραπέζιο προκύπτει και από το γεγονός ότι $A\hat{\Delta}'\Gamma = A\hat{B}\Gamma = \hat{\beta}$ οπότε το ΑΒΔ΄Γ εγγράψιμο).

- Αν τα Δ, Γ, Δ΄ είναι συνευθειακά, δηλαδή η ΔΔ΄ είναι διάμετρος του κύκλου (Γ, ΑΒ) τότε οι ΔΔ΄ και ΑΒ είναι κάθετες στην ΑΓ οπότε το ΑΒΔ΄Γ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



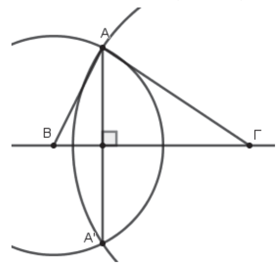
(*Αν στον ορισμό του τραπεζίου είχαμε θεωρήσει πως έχει δύο πλευρές παράλληλες και* ***όχι μόνο*** *δύο πλευρές παράλληλες, τότε θα μπορούσαμε το παραλληλόγραμμο να το θεωρήσουμε ως ειδική περίπτωση τραπεζίου. Ένας τέτοιος ορισμός είναι κατά την γνώμη μας προτιμότερος διότι έτσι δεν θα αναγκαζόμαστε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις κάθε φορά.*) Καλό είναι για την συνέχεια να παρατηρήσουμε ότι το ίδιο σημείο Δ προκύπτει



και αν ως αφετηρία θεωρήσουμε οποιοδήποτε ζεύγος σημείων B', Γ' της (ε), όπου $\overrightarrow{B'\Gamma'} = \overrightarrow{B\Gamma}$ με ειδική περίπτωση την $AB_1', \Delta\Gamma_1' \perp A\Gamma$. Η τελευταία παρατήρηση μας βοηθά να απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα. Το συμμετρικό κάθε σημείου Δ της (ε') ανήκει στην (ε''), συμμετρική της (ε') ως προς την ΑΓ, με αντίστοιχο παραλληλόγραμμο το $A\Delta\Gamma_1 B_1'$ που προαναφέραμε. Το σημείο τομής Γ_o των (ε), (ε'') θα είναι συμμετρικό του σημείου Δ_o της (ε') με $\Gamma_o\Delta_o \perp A\Gamma$ και αντίστοιχο παραλληλόγραμμο το $A\Delta_o\Gamma_o B_o$.

- Αν λοιπόν $\Delta \equiv \Delta_1$ όπου Δ_1 σημείο μεταξύ των A, Δ_o, τότε το Δ_1' συμμετρικό του Δ_1 ως προς την ΑΓ θα είναι μεταξύ των A, Γ_o, δηλαδή θα ανήκει στο ημιεπίπεδο $((\varepsilon), A)$, όπως και το Δ_1.
- Αν όμως $\Delta \equiv \Delta_2$ με το Δ_o μεταξύ των A, Δ_2, τότε το Δ_2' συμμετρικό του Δ_2 ως προς την ΑΓ θα ανήκει στο αντικείμενο ημιεπίπεδο του $((\varepsilon), A)$.

Προσοχή: Αντιλαμβανόμαστε πλέον ότι δεν είναι σωστό να πούμε πως για την κατασκευή της παραλλήλου ενώνουμε το Α με το σημείο τομής των κύκλων που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $((\varepsilon), A)$, αλλά με το σημείο που βρίσκεται στο αντικείμενο ημιεπίπεδο του $(A\Gamma, B)$.



- Εξίσου απλά πλέον, μπορεί να γίνει και η κατασκευή της καθέτου στην (ε), από το σημείο $A \notin (\varepsilon)$ ως κοινής χορδής ΑΑ΄ των κύκλων (B, BA) και $(\Gamma, \Gamma A)$, όπου Β, Γ τυχαία σημεία της (ε), ενώ όταν $A \in (\varepsilon)$ ως χορδής AB' τυχαίου κύκλου που διέρχεται από το Α και τέμνει την (ε) στο σημείο Β, όπου Β΄ είναι το αντιδιαμετρικό του Β.