

# Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Γ. Κατσούλης

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## Ασκήσεις στις ανισότητες

Κωνσταντίνος Γιατράς, Κυριάκος Καμπούκος, Βασίλης Καρκάνης, Μιχάλης Πατσαλιάς  
2<sup>ο</sup> Πειραματικό ΓΕΛ Αθηνών

Τα θέματα που ακολουθούν αναφέρονται στις ανισότητες, ένα αρκετά ενδιαφέρον κεφάλαιο που αποτελεί πρόκληση για μαθητές και συναδέλφους.

Υπάρχουν παραδείγματα που αντιμετωπίζονται μόνο με τη χρήση των ιδιοτήτων των ανισοτήτων και άλλα που βασίζονται σε κάποιες γνωστές ή λιγότερο γνωστές σχέσεις τις οποίες προτάξαμε των λύσεων όπου αυτό θεωρήθηκε απαραίτητο.

### Άσκηση 1

Αν  $x, y, z$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί και  $a, \beta, \gamma, \mu, M$  πραγματικοί αριθμοί ώστε οι αριθμοί  $\frac{a}{x}, \frac{\beta}{y}, \frac{\gamma}{z}$  να ανήκουν στο διάστημα  $[\mu, M]$ , να

αποδείξετε ότι και ο αριθμός  $\frac{a+\beta+\gamma}{x+y+z}$  ανήκει στο  $[\mu, M]$ .

### Λύση

Έχουμε  $\mu \leq \frac{a}{x} \leq M, \mu \leq \frac{\beta}{y} \leq M, \mu \leq \frac{\gamma}{z} \leq M$  και

επειδή  $x, y, z > 0$  έπεται

$$\mu x \leq a \leq Mx, \mu y \leq \beta \leq My, \mu z \leq \gamma \leq Mz.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε  $\mu(x+y+z) \leq a + \beta + \gamma \leq M(x+y+z)$  και επειδή  $x+y+z > 0$  έπεται

$$\mu \leq \frac{a+\beta+\gamma}{x+y+z} \leq M$$

### Άσκηση 2

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $a, \beta, \gamma, x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$(ax + \beta y + \gamma z)^2 \leq (a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Αν  $a, \beta, \gamma$  θετικοί αριθμοί με  $a + \beta + \gamma = 1$  να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 9$$

γ) Αν  $x^2 + y^2 + z^2 = 56$  (2), τότε να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης  $A = x + 2y + 3z$ .

### Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(ax)^2 + (\beta y)^2 + (\gamma z)^2 + 2a\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\gamma\alpha zx \leq a^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 + 2\beta x^2 + 2\beta^2 y^2 + 2\beta^2 z^2 + 2\gamma^2 x^2 + 2\gamma^2 y^2 + 2\gamma^2 z^2, \text{ ή αρκεί:}$$

$0 \leq (a\gamma - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - a z)^2$ , το οποίο ισχύει.

Η ισότητα προφανώς ισχύει όταν και μόνο  $a\gamma = \beta x, \beta z = \gamma y, \gamma x = a z$  (i). Στην περίπτωση  $a\beta\gamma \neq 0$

οι σχέσεις (i) παίρνουν την ευκολομνημόνευτη

$$\text{μορφή: } \frac{x}{a} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \quad (\text{ii}).$$

β) Λόγω του (α) έχουμε:

$$\left( \sqrt{a} \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{\beta} \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\gamma} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 \leq$$

$$\leq (a + \beta + \gamma) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right),$$

$$\text{δηλαδή } 9 \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

### Β΄ Τρόπος

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{a+\beta+\gamma}{a} + \frac{a+\beta+\gamma}{\beta} + \frac{a+\beta+\gamma}{\gamma}$$

$$= 1 + \frac{\beta}{a} + \frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + 1 =$$

$$= 3 + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9,$$

διότι το άθροισμα αντιστρόφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

- Άλλη μια λύση μπορεί να δοθεί άμεσα με τη βοήθεια της ανισότητας αριθμητικού - αρμονικού μέσου, δηλαδή τη σχέση:
 
$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}}.$$

γ) Προφανώς σύμφωνα με την (1) έχουμε:

$$A^2 = (x + 2y + 3z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \cdot 56 = 2^4 \cdot 7^2 = 28^2$$

οπότε  $|A| \leq 28$ , δηλαδή  $-28 \leq A \leq 28$ .

Το ίσον ισχύει μόνο όταν  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \lambda$ , δηλαδή

$$x = 2\lambda, y = 2\lambda, z = 3\lambda, \text{ οπότε}$$

$$(2) \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda^2 = 56 \Leftrightarrow 14\lambda^2 = 56 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Για  $\lambda = 2$ , δηλαδή  $x = 2, y = 4, z = 6$  έχουμε  $A = 28$  (μέγιστη τιμή) και για  $\lambda = -2$ , δηλαδή  $x = -2, y = -4, z = -6$  έχουμε  $A = -28$  (ελάχιστη τιμή).

### Άσκηση 3

Έστω  $x, y, z, \omega$  θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις  $2x > y, y^2 = x^2 + xz, yz = x\omega + xy$ .

Να δείξετε ότι  $\frac{3\omega}{4} < z < \frac{3y}{2}$  (I)

### Λύση

Από την  $2x > y$  υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε  $x^2 > \frac{y^2}{4}$ , οπότε σε συνδυασμό με την

$$y^2 = x^2 + xz \text{ έπεται } y^2 > \frac{y^2}{4} + xz, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{3y^2}{4} > xz.$$

Πολλαπλασιάζοντας την  $2x > y$  με  $z$  παίρνουμε

$$2xz > yz, \text{ οπότε } \frac{3y^2}{4} > \frac{yz}{2}. \text{ Άρα } \frac{3y}{2} > z.$$

Από τις σχέσεις  $2xz > yz$  και  $yz = x\omega + xy$  έπεται  $2xz > x\omega + xy$ , οπότε  $2z > \omega + y$ .

Αποδείχθηκε προηγουμένως ότι  $y > \frac{2}{3}z$ .

Άρα  $2z > \omega + \frac{2}{3}z$ , οπότε  $\frac{4}{3}z > \omega$ , δηλαδή  $z > \frac{3\omega}{4}$ .

- Άμεση συνέπεια των σχέσεων (I) είναι η σχέση  $y > \frac{1}{3}\omega$  (II) Θα μπορούσε άραγε η (II) να προκύψει απ' ευθείας, χωρίς δηλαδή τη χρήση των σχέσεων (I);;

### Άσκηση 4

Για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι

$$\frac{|\alpha + \beta + \gamma|}{1 + |\alpha + \beta + \gamma|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} + \frac{|\gamma|}{1 + |\gamma|}$$

### Λύση

Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , τότε προφανώς ισχύει.

Αν  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , θα βασιστούμε προφανώς στη γνωστή σχέση  $|\alpha + \beta + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$  (1)

Με βάση την (1) όμως, καταλήγουμε στην

$$\frac{|\alpha + \beta + \gamma|}{1 + |\alpha + \beta + \gamma|} \geq \frac{|\alpha + \beta + \gamma|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|}, \text{ ενώ θέλαμε το } \alpha'$$

μέλος να είναι μικρότερο από το αντίστοιχο  $\beta'$  μέλος. Ενδείκνυται λοιπόν να κατασκευάσουμε πρώτα το αντίστροφο του  $\alpha'$  μέλους δηλαδή το  $\frac{1 + |\alpha + \beta + \gamma|}{|\alpha + \beta + \gamma|} = \frac{1}{|\alpha + \beta + \gamma|} + 1$  το οποίο προφανώς θέλουμε να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το αντίστοιχο  $\beta'$  μέλος.

$$\text{Πράγματι: (1)} \Rightarrow \frac{1}{|\alpha + \beta + \gamma|} \geq \frac{1}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\alpha + \beta + \gamma|} + 1 \geq \frac{1}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1 + |\alpha + \beta + \gamma|}{|\alpha + \beta + \gamma|} \geq \frac{1 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha + \beta + \gamma|}{1 + |\alpha + \beta + \gamma|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|} =$$

$$= \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|} + \frac{|\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|} + \frac{|\gamma|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|}$$

$$\leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} + \frac{|\gamma|}{1 + |\gamma|}, \text{ αφού}$$

$$\frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|}$$

$$\frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} \leq \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}$$

$$\frac{|\gamma|}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} \leq \frac{|\gamma|}{1 + |\gamma|}$$

### Β΄ Τρόπος

Μπορούμε να γράψουμε απ' ευθείας:

$$\frac{|\alpha + \beta + \gamma|}{1 + |\alpha + \beta + \gamma|} = \frac{1}{1 + \frac{1}{|\alpha + \beta + \gamma|}}, \text{ για να έχουμε το}$$

$|\alpha + \beta + \gamma|$  μόνο σε μια θέση στον παρονομαστή.

Τότε θα έχουμε άμεσα ...

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{|\alpha + \beta + \gamma|} \geq \frac{1}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{|\alpha + \beta + \gamma|} \geq 1 + \frac{1}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{|\alpha + \beta + \gamma|}} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}} = \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{1 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma|}$$

κ.λ.π.

- Και στις δύο περιπτώσεις βέβαια θεωρήσαμε το  $\alpha'$  μέλος κ ως αντίστροφο του  $\frac{1}{\kappa}$  και κατασκευάσαμε πρώτα το  $\frac{1}{\kappa}$ .

### Γ΄ Τρόπος

Μια άμεση λύση μπορεί να δοθεί με βάση τη συνάρτηση  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ ,  $t \neq -1$  η οποία έχει την ιδιότητα  $-1 < x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ , αν θέσουμε  $x = |\alpha + \beta + \gamma|$ ,  $y = |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ .

### Άσκηση 5

**α)** Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι  $\alpha - \alpha^2 \leq \frac{1}{4}$

**β)** Έστω  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τέτοιοι ώστε

$$9\alpha^2 + 8\alpha\beta + 7\beta^2 \leq 6.$$

Να αποδείξετε ότι  $7\alpha + 5\beta + 12\alpha\beta \leq 9$

### Λύση

**α)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $0 \leq \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4}$  ή

$0 \leq (\alpha - \frac{1}{4})^2$  το οποίο ισχύει.

**β)** Από το (α) έχουμε  $\alpha \leq \alpha^2 + \frac{1}{4}$  και  $\beta \leq \beta^2 + \frac{1}{4}$ ,

$$\text{οπότε } 7\alpha + 5\beta \leq 7\alpha^2 + \frac{7}{4} + 5\beta^2 + \frac{5}{4},$$

$$\text{δηλαδή } 7\alpha + 5\beta \leq 7\alpha^2 + 5\beta^2 + 3$$

$$\text{Επίσης } 4\alpha\beta \leq 2\alpha^2 + 2\beta^2.$$

$$\text{Άρα } 7\alpha + 5\beta + 4\alpha\beta \leq 7\alpha^2 + 5\beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 3$$

$$\text{δηλαδή } 7\alpha + 5\beta + 4\alpha\beta \leq 9\alpha^2 + 7\beta^2 + 3$$

Προσθέτοντας  $8\alpha\beta$  στα δυο μέλη παίρνουμε

$$7\alpha + 5\beta + 12\alpha\beta \leq 9\alpha^2 + 7\beta^2 + 8\alpha\beta + 3 \leq 9$$

### Άσκηση 6

**α)** Για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$$

**β)** Έστω  $x, y, z$  θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$x + y + z = 1$ . Να αποδείξετε ότι

$$(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2 + (z + \frac{1}{z})^2 \geq \frac{100}{3}$$

### Λύση

**α)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha, \text{ ή}$$

$$\text{αρκεί } 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha \geq 0,$$

ή αρκεί

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha \geq 0, \text{ ή}$$

$$\text{αρκεί } (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει.

**β)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$3[(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2 + (z + \frac{1}{z})^2] \geq 100$$

Έχουμε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα

$$3[(x + \frac{1}{x})^2 + (y + \frac{1}{y})^2 + (z + \frac{1}{z})^2] \geq (x + \frac{1}{x} + y +$$

$$\frac{1}{y} + z + \frac{1}{z})^2 = (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})^2$$

Από την άσκηση 2 έχουμε  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$  οπότε

έπεται το ζητούμενο.

# Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

## 2 ακόμη Ασκήσεις Άλγεβρας

Κ. Κούστας

### Άσκηση 1

Έστω η εξίσωση  $\frac{\lambda x - 1}{3} + \frac{3 - x}{2} = \frac{2\lambda^2 - 1}{3}$  (1)

όπου η παράμετρος  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να λυθεί και να διερευνηθεί η (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

#### Λύση

$$(1) \Leftrightarrow 2(\lambda x - 1) + 3(3 - x) = 2(2\lambda^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$2\lambda x - 2 + 9 - 3x = 4\lambda^2 - 2 \Leftrightarrow (2\lambda - 3)x = 4\lambda^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda - 3)x = (2\lambda - 3)(2\lambda + 3).$$

α) Για  $\lambda \neq \frac{3}{2}$  έχουμε:  $(1) \Leftrightarrow x = \frac{(2\lambda - 3)(2\lambda + 3)}{2\lambda - 3} \Leftrightarrow x = 2\lambda + 3,$

μοναδική λύση.

β) Για  $\lambda = \frac{3}{2}$  έχουμε:  $(1) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ , αόριστη.

### Άσκηση 2

Σε ένα σημείο ενός δρόμου ( $\Sigma_1$ ) στις 12 το μεσημέρι, περνά το όχημα Α που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_A = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Τρεις ώρες αργότερα απ' το ίδιο σημείο περνά το όχημα Β που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_B \frac{\text{km}}{\text{h}}$  προς την ίδια κατεύθυνση με το όχημα Α.

i) Ποιά ώρα το όχημα Β θα συναντήσει το όχημα Α; (Ονομάστε  $\Sigma_2$  το σημείο συνάντησης και  $t_A, t_B$  τους χρόνους που θα χρειαστούν τα οχήματα Α, Β αντιστοίχως για να διανύσουν την απόσταση  $\Sigma_1 \Sigma_2$ ).

ii) Ας θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ταχύτητας  $v_B$  (με μονάδα τα  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  στον οριζόντιο άξονα) – χρόνου  $t_B$  (με μονάδα την  $\frac{1}{2} \text{h}$  στον κατακόρυφο άξονα). Τη στιγμή της συνάντησης, το σημείο  $\Sigma_2(x_{\Sigma_2}, y_{\Sigma_2})$  ανήκει στη διχοτόμο  $1^{\text{ου}}, 3^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου. Να βρείτε τι ώρα θα συναντηθούν τα οχήματα Α και Β.

iii) Σε συνέχεια του ερωτήματος (ii) εάν υποδιπλασιαστούν οι ταχύτητες των δυο οχημάτων πώς επηρεάζεται η απόσταση  $\Sigma_1 \Sigma_2$  και οι χρόνοι που απαιτούνται για να διανυθεί αυτή η απόσταση από τα οχήματα Α και Β;

#### Λύση

i) Είναι  $t_A = t_B + 3$ . Επιπλέον  $\Sigma_1 \Sigma_2 = 50 \cdot t_A$  και  $\Sigma_1 \Sigma_2 = v_B \cdot t_B$ , οπότε:  $50 \cdot t_A = v_B \cdot t_B \Rightarrow$   
 $50 \cdot (t_B + 3) = v_B \cdot t_B \Rightarrow \dots \Rightarrow t_B = \frac{150}{v_B - 50}$  (1).

Άρα η ώρα συνάντησης είναι:  $12 + 3 + \frac{150}{v_B - 50}$ .

ii) Αφού το  $\Sigma_2$  είναι σημείο της διχοτόμου 1ου, 3ου τεταρτημορίου θα έχουμε:

$$x_{\Sigma_2} = y_{\Sigma_2} \Rightarrow v_B = x_{\Sigma_2} \cdot 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ και } t_B = y_{\Sigma_2} \cdot \frac{1}{2} \text{h. Α-}$$

ντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει

$$y_{\Sigma_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{150}{x_{\Sigma_2} \cdot 50 - 50} \Rightarrow x_{\Sigma_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{x_{\Sigma_2} - 1} \Rightarrow$$

$$x_{\Sigma_2}^2 - x_{\Sigma_2} - 6 = 0 \Rightarrow x_{\Sigma_2} = 3, \text{ αφού } x_{\Sigma_2} > 0.$$

Οπότε:  $t_B = 3 \cdot \frac{1}{2} \text{h} = 1,5 \text{h}$ . Άρα η ώρα συνάντησης είναι 16 και 30.

iii) Σύμφωνα με το ερώτημα (ii) έχουμε:

$$v_A = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad v_B = 3 \cdot 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ και}$$

$$\Sigma_1 \Sigma_2 = 1,5 \text{h} \cdot 150 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 225 \text{km}.$$

Στο ερώτημα (iii) έχουμε  $v'_A = 25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  και

$$v'_B = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ και νέο σημείο συνάντησης το } \Sigma'_2.$$

Επομένως έχουμε την σχέση  $25 \cdot (t'_B + 3) = 75 \cdot t'_B \Rightarrow t'_B + 3 = 3 \cdot t'_B \Rightarrow 3 = 2 \cdot t'_B$

$\Rightarrow t'_B = 1,5 \text{h}$  και  $t'_A = t'_B + 3 = 4,5 \text{h}$  (Δεν μεταβλήθηκαν οι χρόνοι). Εξάλλου

$$\Sigma_1 \Sigma'_2 = v'_B \cdot t'_B = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{h} = 112,5 \text{km} \text{ (η από-}$$

σταση μειώθηκε στο μισό).