

Χρησιμοποιώντας τις αναλογίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής

Ρίζος Γιώργος

Ορισμοί – Έννοιες

Σ τον διεθνή Μαθηματικό Διαγωνισμό TIMSS δόθηκε η παρακάτω άσκηση:

Μία τάξη έχει 28 μαθητές. Αν ο λόγος

$\frac{\text{κορίτσια}}{\text{αγόρια}}$ είναι $\frac{4}{3}$, πόσα αγόρια και πόσα

κορίτσια έχει η τάξη;

Η άσκηση απευθυνόταν σε μαθητές από όλον τον κόσμο, που έχουν τελειώσει την Α' Γυμνασίου. Για να τη λύσουμε πρέπει να έχουμε κατανοήσει τις βασικές έννοιες που αφορούν τα **Ανάλογα Ποσά**.

Όταν, λοιπόν, η εκφώνηση λέει **λόγος** των κοριτσιών προς τα αγόρια εννοεί το πηλίκο του αριθμού των κοριτσιών της τάξης προς τον αριθμό των αγοριών της τάξης.

Γενικότερα, ως **λόγο** δύο ομοειδών μεγεθών (δηλαδή μεγεθών που μετριοούνται με την ίδια μονάδα μέτρησης), λέμε το πηλίκο του μέτρου (του μεγέθους) τους.

Για παράδειγμα, ο **λόγος** ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το πηλίκο των μηκών των δύο τμημάτων, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Έτσι, αν το AB έχει μήκος 5cm και το ΓΔ έχει μήκος 0,8 dm, τότε ο λόγος του ΓΔ προς το AB είναι

$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{0,8\text{dm}}{5\text{cm}} = \frac{8\text{cm}}{5\text{cm}} = \frac{8}{5}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο **λόγος** δύο τμημάτων είναι **ανεξάρτητος** από τη μονάδα μέτρησης των τμημάτων, αφού, όμως, τα τμήματα έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Στη συνέχεια η άσκηση λέει: "... ο λόγος κορίτσια προς αγόρια είναι ίσος με $\frac{4}{3}$."

Η ισότητα δύο κλασμάτων (λόγων) λέγεται **Αναλογία**.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Θεωρούμε **πάντα** τους παρονομαστές **διάφορους** του μηδενός.

Π.χ. για τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha = 2\text{ cm}$, $\beta = 8\text{ cm}$, $\gamma = 3\text{ m}$ και $\delta = 12\text{ m}$, είναι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{3}{12} = \frac{\cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{1}{4} \quad \text{άρα} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Λέμε τότε ότι τα ευθ. τμήματα α , γ είναι **ανάλογα** προς τα β και δ αντίστοιχα.

- Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν κάνουμε απα-

λοιφή παρονομαστών:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ή} \quad \beta \cdot \delta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \beta \cdot \delta \cdot \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ή} \quad \cancel{\beta} \cdot \delta \cdot \frac{\alpha}{\cancel{\beta}} = \beta \cdot \cancel{\delta} \cdot \frac{\gamma}{\cancel{\delta}}$$

προκύπτει το "**χιαστί**" γινόμενο **$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$** .

- Ο απλούστερος τρόπος για να λυθούν εξισώσεις σε μορφή αναλογίας είναι να κάνουμε το "**χιαστί**" γινόμενο μέσων - άκρων. Στη συνέχεια λύνουμε ως προς τον άγνωστο. Π.χ. $\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$ ή $1 \cdot 8 = 2 \cdot x$ ή $x = 4$.

Έτσι η άσκηση του Διαγωνισμού TIMSS θα μπορούσε να λυθεί ως εξής:

1^η Λύση (Αλγεβρική):

$$\text{Είναι} \quad \frac{\kappa}{\alpha} = \frac{4}{3} \quad \text{άρα} \quad \kappa = \frac{4}{3}\alpha$$

Οπότε η ισότητα $\alpha + \kappa = 28$ γράφεται:

$$\alpha + \frac{4}{3}\alpha = 28 \quad \text{ή} \quad \frac{7}{3}\alpha = 28 \quad \text{ή} \quad \alpha = 12,$$

άρα $\kappa = 16$.

Πιστεύουμε ότι ιδιαίτερη διδακτική αξία για την κατανόηση των **Αναλογιών** και η λεγόμενη "πρακτική" λύση του προβλήματος:

2^η Λύση (Γραφική):

Σε κάθε 4 κορίτσια αντιστοιχούν 3 αγόρια. Άρα, σε κάθε 7 μαθητές έχουμε 4 κορίτσια και 3 αγόρια.

Είναι $28 : 7 = 4$.

Χωρίζουμε τους 28 μαθητές σε 4 ομάδες των 7, οπότε θα έχουμε: $4 \cdot 4 = 16$ κορίτσια και $4 \cdot 3 = 12$ αγόρια.

	κορίτσια	αγόρια
1η ομάδα:	4	3
2η ομάδα:	4	3
3η ομάδα:	4	3
4η ομάδα:	4	3
Σύνολο:	16	12

Κλίμακες

- Πολλά προβλήματα λύνονται με τη βοήθεια των **αναλογιών**, όπως π.χ. προβλήματα που αναφέρονται στη μεγένθυση ή σμίκρυνση αντικειμένων υπό κλίμακα. Οι αποστάσεις σε ένα χάρτη είναι ανάλογες με τις πραγματικές αποστάσεις.
- Κλίμακα** λέγεται ο σταθερός λόγος των αποστάσεων δύο σημείων σε ένα χάρτη ως προς την πραγματική απόσταση των δύο αυτών σημείων.
- Αν ο λόγος $\frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{πραγματική απόσταση}}$ είναι μεγαλύτερος της μονάδας έχουμε **μεγένθυση** του σχήματος. Αν είναι μικρότερος, έχουμε **σμίκρυνση**.

Π.χ. σε ένα χάρτη υπολογίζουμε ότι η απόσταση των πόλεων Κέρκυρα-Θεσ-

σαλονίκη είναι 29 cm.

Αν γνωρίζουμε ότι η κλίμακα του χάρτη είναι 1: 1.000.000, τότε η κανονική απόσταση θα είναι ίση με 29.000.000 cm ή 290.000 m ή 290 Km.



Ανάλογα Ποσά

Ακούμε πολλές φορές φράσεις, όπως: «Θα του απαντήσω **ανάλογα** με το τι θα μου πει» ή «Θα δω και θα πράξω **ανάλογως**» ή «Θα ανταμοιφθείς **ανάλογα** με τη δουλειά σου.». Καταλαβαίνουμε ότι η λέξη "Ανάλογα" δηλώνει κάποια συσχέτιση μεταξύ εννοιών ή ποσοτήτων.

Στα Μαθηματικά αυτή η συσχέτιση καθορίζεται με ακρίβεια:

Δύο **ποσά** λέγονται **ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται αντίστοιχα και οι τιμές του άλλου.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν είναι ο σωστός ο "απλοϊκός ορισμός": «*Ανάλογα ποσά είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι όταν αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και το άλλο*». Π.χ. το βάρος και το ύψος ενός παιδιού αυξάνονται όπως μεγαλώνει το παιδί, αλλά τα ποσά βάρος (ή το ύψος) και ηλικία δεν είναι ανάλογα.

Για παράδειγμα **ανάλογα ποσά** είναι ο αριθμός των κιλών μήλων που αγοράζουμε με τα χρήματα που πληρώνουμε.

Έστω ότι τα μήλα κοστίζουν 0,80 € το κιλό. Τότε, αν ονομάσουμε x το αριθμό των κιλών και y τα ευρώ που πληρώνουμε, θα είναι:

x Κιλά μήλα	1	2	5	8,2
y Ευρώ	0,80 €	1,60 €	4,00 €	6,56 €

Παρατηρούμε ότι το πηλίκο δύο ανάλογων ποσών είναι **σταθερό**. Πράγματι στο παραπάνω παράδειγμα ισχύει:

$$\frac{y}{x} = \frac{0,80}{1} = \frac{1,60}{2} = \frac{4,00}{5} = \frac{6,56}{8,2} = 0,80$$

Είναι, δηλαδή $y = 0,80 \cdot x$.

Λέμε, λοιπόν ότι τα **ανάλογα ποσά** συνδέονται με μία εξίσωση της μορφής $y = ax$.

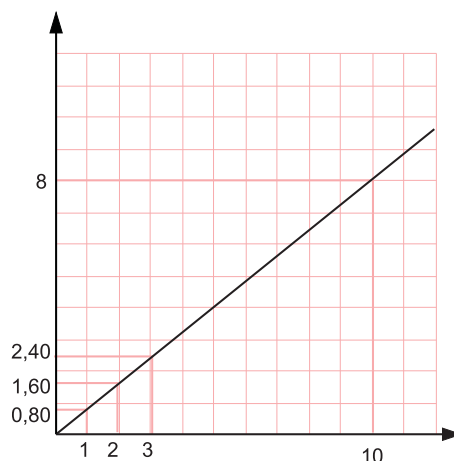
Γραφική παράσταση Ανάλογων ποσών

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε τη σχέση αναλογίας που συνδέει τον αριθμό των κιλών μήλων που αγοράζουμε με τα χρήματα που πληρώνουμε.



- 1 κιλό μήλα κοστίζει 0,80 €.
- 2 κιλά μήλα κοστίζουν $2 \cdot 0,80 = 1,60$ €.
- 5 κιλά μήλα κοστίζουν $5 \cdot 0,80 = 4,00$ €.
-

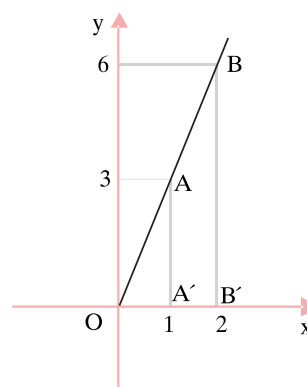
Αν παραστήσουμε γραφικά τα σημεία με συντεταγμένες τα παραπάνω ζεύγη τιμών, θα παρατηρήσουμε ότι αυτά τα σημεία βρίσκονται σε ημιευθεία που έχει αρχή την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.



- Η **γραφική παράσταση** της σχέσης $y = ax$, με $x \geq 0$ και $y \geq 0$, είναι **ημιευθεία**, που έχει αρχή την αρχή των αξόνων.

Π.χ. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης αναλογίας $y = 3x$ με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	1	2	3
y	0	3	6	9



Εφαρμογές – Προβλήματα

Παραθέτουμε παρακάτω μερικές εφαρμογές και προβλήματα που χρησιμοποιούν τις Αναλογίες σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Τα θέματα αυτά θα μπορούσαν να δοθούν μετά τη διδασκαλία της ενότητας, ως συμπληρωματικές ασκήσεις ή εργασίες κι αφού οι μαθητές έχουν γνωρίσει κι εξοικειωθεί με την έννοια των Ανάλογων Ποσών.

1. Πατατάκια

Στη συσκευασία από πατατάκια, διαβάζουμε ότι τα 100 gr αντιστοιχούν σε 2.250 kcal (θερμίδες).



Θέλουμε να υπολογίσουμε πόσες θερμίδες αντιστοιχούν σε διαφορετικές συσκευασίες. Γι' αυτό ας συμπληρώσουμε τον πίνακα:

gr	50	75	100	125	150	200
kcal			2.250			

2. Κόστος κλήσης

Στον παρακάτω τιμοκατάλογο μιας τηλεφωνικής εταιρείας αναγράφεται το κόστος σε σχέση με τα λεπτά ομιλίας.

Χρόνος (σε min)	100	200	300	400	500	600
Κόστος (σε €)	12,5	19,4	27,6	34,0	40,0	45,0

Τα ποσά χρόνος και κόστος είναι ανάλογα ή όχι; Πώς το εξηγείτε;

3. Cheesecake

Σε ένα περιοδικό βρήκαμε την παρακάτω συνταγή για Cheesecake για 6 άτομα.

450 gr μπισκότα κανέλας θρυμματισμένα

150 gr βούτυρο

30 gr μαύρη ζάχαρη

300 gr ζάχαρη άχνη

6 κρόκους αυγού

600 gr τυρί κρέμα ή mascarpone

300 gr γιαούρτι

600 gr κρέμα γάλακτος

3 φύλλα ζελατίνης

480 gr φράουλες φρέσκιες

Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα τις ποσότητες υλικών για



να φτιάξουμε το ίδιο γλυκό για 4, 8 και 12 άτομα.

Υλικά	4 άτομα	6 άτομα	8 άτομα	12 άτομα
Μπισκότα κανέλας θρυμματισμένα		450 gr		
Βούτυρο		150 gr		
Μαύρη ζάχαρη		30 gr		
Ζάχαρη άχνη		300 gr		
Κρόκοι αυγού		6 τεμ.		
Τυρί κρέμα ή mascarpone		600 gr		
Γιαούρτι		300 gr		
Κρέμα γάλακτος		600 gr		
Φύλλα ζελατίνης		3 τεμ.		
Φράουλες		480 gr		

4. Μετρώντας δυσπρόσιτα ύψη

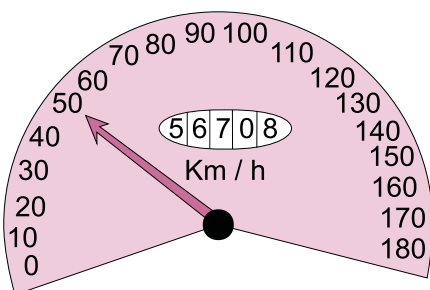
Θέλουμε να μετρήσουμε το ύψος ενός κτηρίου ή ενός μνημείου, όπως για παράδειγμα το άγαλμα του Αχιλλέα στο Αχίλλειο της Κέρκυρας.



Ο καθηγητής μας ισχυρίζεται ότι δεν χρειάζομαστε σκαλωσιές ή γερανούς, μετροταινίες κ.λπ. απλά μάς χρειάζεται μια ψηφιακή φωτογραφική μηχανή, ένας καλός εκτυπωτής, ένας χάρακας και ... να έχουμε πρόσφατα μετήσει το ύψος μας! Πώς μπορεί να γίνει ο υπολογισμός;

5. Οδηγώντας στην Αγγλία

Σε ένα ταξίδι που θα κάνουμε με το αυτοκίνητό μας στην Αγγλία πρέπει να σημειώσουμε πάνω στο ταχύμετρο (κοντέρ) την αντιστοιχία χιλιομέτρων - μιλίων, για να μην υπερβούμε το όριο ταχύτητας.



Γνωρίζουμε ότι 80 km/h αντιστοιχούν σε 50 μίλια/h . Αν τα όρια σε διάφορους δρόμους είναι 40 μίλια/h , 55 μίλια/h και 65 μίλια/h , ποια είναι τα όρια αυτά σε km/h ; Τοποθετήστε τα όρια αυτά στο διπλανό κοντέρ.

6. Να πώς τρελάθηκε ο μανάβης!

Ένας μανάβης πουλάει μπανάνες στη λαϊκή αγορά. Την πρώτη μέρα πουλάει 30 κιλά Α' ποιότητας σε σακούλες των δύο κιλών προς 3€ και 30 κιλά Β' ποιότητας σε σακούλες των τριών κιλών επίσης προς 3€. Υπολογίστε το ποσό που εισέπραξε ο μανάβης από την πώληση και των 60 κιλών.

Τη δεύτερη μέρα αποφάσισε να συσκευάσει ανακατεμένα 30 κιλά από κάθε ποιότητα σε σακούλες των πέντε κιλών και να τις πουλά προς 6€. Πουλάει και πάλι και τα 60 κιλά, αλλά όταν μέτρησε τα χρήματα που

εισέπραξε, βρέθηκε μπροστά σε μία δυσάρεστη έκπληξη.



Υπολογίστε τα χρήματα που εισέπραξε ο μανάβης τη δεύτερη μέρα.

Τι παρατηρείτε;

Μπορείτε, μήπως, να ερμηνεύσετε την παρατήρησή σας αυτή;

*Η άσκηση βασίζεται σε ένα πρόβλημα από το βιβλίο του **Martin Gardner**:*

"Η μαγεία των παραδόξων", εκδόσεις Τροχαλία.

7. Άδικες εκπτώσεις

Σε ένα μαγαζί διαβάζουμε σε μια διαφημιστική επιγραφή: Για αγορές άνω των 100 € γίνεται έκπτωση 10%. Ένας πελάτης αγοράζει προϊόντα αξίας 102 € και ένας άλλος 98 €. Τι το "παράξενο" θα συμβεί;

8. Ο "άδικος" βιβλιοπώλης

Σε ένα βιβλιοπωλείο υπάρχει μια σειρά λογοτεχνικών βιβλίων που στοιχίζουν 16€ το καθένα. Αν όμως αγοράσουμε 10 και άνω, η τιμή μειώνεται σε 13€ ανά βιβλίο.

Ένας πελάτης ισχυρίζεται ότι η προσφορά αυτή δεν είναι δίκαιη!

Ισχυρίζεται, για την ακρίβεια, ότι: "υπάρχει ένας παραλογισμός στην προσφορά αυτή!"



Τι εννοεί ο πελάτης; Πώς θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί η "αδικία";

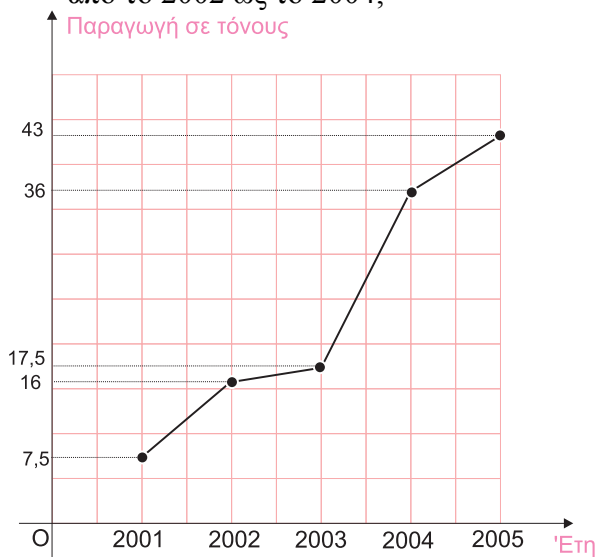
9. Ο σταφυλοπαραγωγός

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η εξέλιξη της παραγωγής (σε τόνους) ενός σταφυλοπαραγωγού.

Μία χρονιά αγόρασε νέα κτήματα και είχε τη μεγαλύτερη αύξηση στην παραγωγή του.

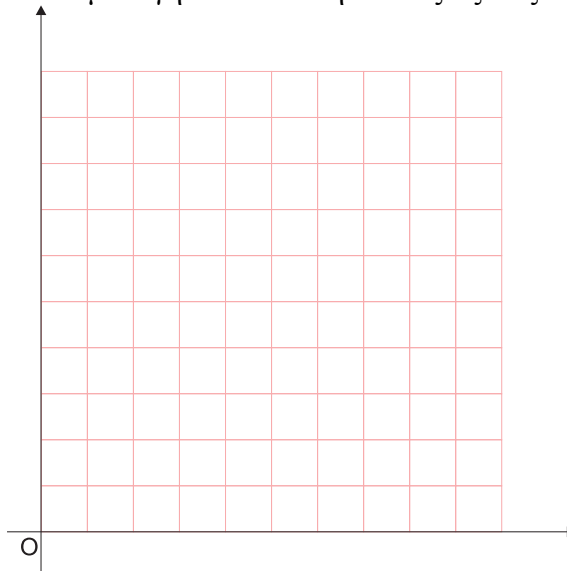
α) Ποια χρονιά συνέβη αυτό;

β) Πόσο το ποσοστό αύξησης της παραγωγής από το 2002 μέχρι το 2003 και πόσο από το 2002 ως το 2004;



10. Μεγαλώνω και ψηλώνω...

Σχεδιάστε στο διπλανό γράφημα μία καμπύλη που θα μπορούσε να παριστάνει τη μεταβολή του ύψους ενός ανθρώπου από τη γέννησή του ως την ηλικία των 30 ετών. Βαθμολογήστε κατάλληλα τους άξονες.



Σε επόμενο τεύχος του Ευκλείδη Α' θα δοθούν επιπλέον σχόλια και απαντήσεις στα προτεινόμενα προβλήματα

Βιβλιογραφία

- [1] **Ι. Βανδουλάκης κ.α.**, *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου*, ΥΠΕΠΘ, Π.Ι., Αθήνα 2007
- [2] **Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας**, *Θέματα αλφαριθμητισμού προγράμματος PISA*, Αθήνα 2005.
- [3] **OECD**, (2010), *PISA 2012 Mathematics Framework*, <http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf>
- [4] **Ρίζος Γ.**, *Στο δρόμο για τον PISA, Τα μαθηματικά στο διεθνή διαγωνισμό PISA*, Εκδ. ΜΑΥΡΙΔΗ, Θεσσαλονίκη, 2009

Η Συντακτική Επιτροπή του Ευκλείδη Α' σας εύχεται καλή επιτυχία στις εξετάσεις σας και καλό καλοκαίρι