ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 20ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(-1)=-\dfrac{1}{e^2}$
- $xf'(x)=f(x)+x^2\left(2e^{2x}-1\right)$, **για κάθε** $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{2x}-x^2-x$, $x\in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στο επίπεδο χωρίο Ω και για τις συντεταγμένες του ισχύουν οι σχέσεις:

$$0\le x\le 1 \quad \text{και} \quad -x^2-3x\le y\le f(x)$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει το σημείο Μ.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$xf'(x)-f(x)=x^2\left(2e^{2x}-1\right) \quad (1)$$

Για $x\neq 0$ η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2e^{2x}-1\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{2x}-x\right)'\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} e^{2x}-x+c_1\ , & x<0 \\ e^{2x}-x+c_2\ , & x>0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} xe^{2x}-x^2+c_1x\ , & x<0 \\ xe^{2x}-x^2+c_2x\ , & x>0\end{cases} \quad (2)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f(0)=0$, οπότε είναι:

$$f(x)=\begin{cases} xe^{2x}-x^2+c_1x\ , & x<0 \\ 0 & , x=0 \\ xe^{2x}-x^2+c_2x\ , & x>0\end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad (3)$$

Είναι:

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{xe^{2x}-x^2+c_1x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{2x}-x+c_1\right)=1+c_1$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{2x}-x^2+c_2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{2x}-x+c_2\right)=1+c_2$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$1+c_1=1+c_2 \Leftrightarrow c_1=c_2$$

Για $x=-1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(-1)=-1e^{-2}-(-1)^2+c_1(-1)\Leftrightarrow -\frac{1}{e^2}=-\frac{1}{e^2}-1-c_1\Leftrightarrow c_1=-1, \text{ άρα και } c_2=-1$$

Επομένως:

$$f(x)=\begin{cases} xe^{2x}-x^2-x\ , & x<0 \\ 0\ , & x=0 \\ xe^{2x}-x^2-x\ , & x>0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=xe^{2x}-x^2-x\ ,\ x\in R$$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\left(xe^{2x}-x^2-x\right)'=e^{2x}+2xe^{2x}-2x-1=e^{2x}-1+2x\left(e^{2x}-1\right)=\left(e^{2x}-1\right)\left(2x+1\right)$$

Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{2x}-1\right)\left(2x+1\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}e^{2x}-1=0\\2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{2x}=1\\2x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$e^{2x}-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_1=-\frac{1}{2}$ με τιμή $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2e}$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_2=0$ με τιμή $f(0)=0$

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f''(x) = \left[\left(e^{2x}-1\right)\left(2x+1\right)\right]' = \left(e^{2x}-1\right)'\left(2x+1\right) + \left(e^{2x}-1\right)\left(2x+1\right)' =$$

$$= 2e^{2x}\left(2x+1\right) + 2\left(e^{2x}-1\right) = 2\left(2xe^{2x} + e^{2x} + e^{2x} - 1\right) =$$

$$= 2e^{2x}\left(2x+2-e^{-2x}\right) = 2e^{2x}g(x)$$

όπου $g(x) = 2x+2-e^{-2x}$, $x \in R$

Είναι φανερό ότι το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της $g(x)$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 2 + 2e^{-2x} > 0$$

Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R

Θα αποδείξουμε ότι η $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Για τη συνάρτηση g στο διάστημα $\left[-1, 0\right]$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $\left[-1, 0\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ $g(-1)g(0) = -e^2 \cdot 1 = -e^2 < 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-1, 0\right]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια ρίζα $\rho \in (-1, 0)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι, έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(\rho) \overset{g\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x = \rho$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(\rho) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x > \rho$ και
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\rho) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x < \rho$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $A\left(\rho, f(\rho)\right)$.

δ) Το χωρίο Ω είναι εκείνο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = xe^{2x} - x^2 - x$, $h(x) = -x^2 - 3x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$

Για κάθε $x \in \left[0, 1\right]$ είναι:

$$f(x) - h(x) = \left(xe^{2x} - x^2 - x\right) - (-x^2 - 3x) = xe^{2x} + 2x \geq 0,$$

οπότε:

$$E(\Omega) = \int_0^1 \left(f(x) - h(x)\right)dx = \int_0^1 \left(xe^{2x} + 2x\right)dx = \int_0^1 xe^{2x}\,dx + \int_0^1 2x\,dx \qquad (6)$$

Είναι:

- $$\int_0^1 xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(e^{2x})'\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[xe^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2+1}{4}$$
- $$\int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

Από τη σχέση (6) έχουμε:

$$E(\Omega) = \frac{e^2+1}{4} + 1 = \frac{e^2+5}{4}$$

ΘΕΜΑ 21ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+e}{x} = 1$
- $f(x+y) = e^{2xy}\left(e^{y^2}f(x) + e^{x^2}f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1}\right) - e$, **για κάθε** $x, y \in R$ **(1)**

Να αποδείξετε ότι

α) $f'(0)=1$

β) $f'(x) = 2xf(x) + e^{x^2} + 2ex$, $x \in R$

γ) $f(x) = xe^{x^2} - e$, $x \in R$

δ) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} την ευθεία $x=-2e$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΛΥΣΗ

α) Για $x=y=0$ έχουμε:

$$f(0) = e^0\cdot\left(e^0f(0) + e^0f(0) + e^1 + e^1\right) - e \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) + e \Leftrightarrow f(0) = -e \quad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+e}{x} = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \quad (3)$$

β) Για κάθε $x, y \in R$ είναι:

$$f(x+y) = e^{2xy}\left(e^{y^2}f(x) + e^{x^2}f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1}\right) - e$$

Θεωρώντας το x ως μεταβλητή παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left(f(x+y)\right)' = \left[e^{2xy}\left(e^{y^2}f(x) + e^{x^2}f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1}\right) - e\right]' \Rightarrow$$

$$f'(x+y)\cdot(x+y)' = 2ye^{2xy}\left(e^{y^2}f(x) + e^{x^2}f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1}\right) + e^{2xy}\left(e^{y^2}f'(x) + 2xe^{x^2}f(y) + 2xe^{x^2+1}\right)$$

Για $x=0$ από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$f'(y)\cdot 1 = 2y\cdot 1\cdot\left(e^{y^2}f(0)+1\cdot f(y)+e^1+e^{y^2+1}\right)+1\cdot\left(e^{y^2}f'(0)+0+0\right)\overset{(2),(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(y)=-2ye^{y^2+1}+2yf(y)+2ye+2ye^{y^2+1}+e^{y^2}\Rightarrow f'(y)=2yf(y)+e^{y^2}+2ye,\ \text{για κάθε } y\in R$$

Επομένως για κάθε $x\in R$ είναι $f'(x)=2xf(x)+e^{x^2}+2ex$

γ) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=2xf(x)+e^{x^2}+2ex \Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=e^{x^2}+2ex \overset{\cdot e^{-x^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)e^{-x^2}-2xe^{-x^2}f(x)=1+2exe^{-x^2}\Leftrightarrow f'(x)e^{-x^2}+\left(e^{-x^2}\right)'f(x)=1-e\cdot e^{-x^2}(-2x)\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{-x^2}\right)'=\left(x-e\cdot e^{-x^2}\right)'\Leftrightarrow f(x)e^{-x^2}=x-e\cdot e^{-x^2}+c\overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow} f(x)=xe^{x^2}-e+ce^{x^2}\quad (6)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (6) έχουμε:

$$f(0)=0-e+c\cdot 1\overset{(2)}{\Leftrightarrow}-e=-e+c\Leftrightarrow c=0$$

Επομένως από τη σχέση (6) έχουμε:

$$f(x)=xe^{x^2}-e\ ,\ \text{για κάθε } x\in R$$

δ) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\left(xe^{x^2}-e\right)'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}=\left(1+2x^2\right)e^{x^2}>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι «$1-1$», οπότε αντιστρέφεται.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\displaystyle\int_{-2e}^{0}\left|f^{-1}(x)\right|dx\quad (7)$

Θέτουμε $u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(u)=x$, οπότε $dx=f'(u)du$. Επίσης είναι:

- $x=-2e\Leftrightarrow f(u)=-2e\Leftrightarrow f(u)=f(-1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=-1$, $\left(\text{αφού } f(-1)=-2e\right)$
- $x=0\Leftrightarrow f(u)=0\Leftrightarrow f(u)=f(1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=1$, $\left(\text{αφού } f(1)=0\right)$

Άρα έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{1}|u|f'(u)du=\int_{-1}^{0}-uf'(u)du+\int_{0}^{1}uf'(u)du=-I_1+I_2\qquad (7)\ ,\ \text{όπου}$$

$$I_1=\int_{-1}^{0}uf'(u)du\quad \text{και}\quad I_2=\int_{0}^{1}uf'(u)du$$

Είναι:

- $$I_1=\int_{-1}^{0}uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}f(u)du=f(-1)-\int_{-1}^{0}\left(ue^{u^2}-e\right)du=$$

$$=-2e-\int_{-1}^{0}ue^{u^2}du+\int_{-1}^{0}edu=-2e-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}2ue^{u^2}du+e\left[0-(-1)\right]=$$

$$=-2e-\frac{1}{2}\left[e^{u^2}\right]_{-1}^{0}+e=-e-\frac{1}{2}(1-e)=-e-\frac{1}{2}+\frac{e}{2}=-\frac{e}{2}-\frac{1}{2}$$

- $I_2 = \int_0^1 u f'(u)du = \left[u f(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - \int_0^1 (ue^{u^2} - e)du =$

$$= 0 - \int_0^1 ue^{u^2}du + \int_0^1 edu = -\frac{1}{2}\int_0^1 2ue^{u^2}du + e\cdot(1-0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{u^2}\right]_0^1 + e = -\frac{1}{2}(e-1) + e = -\frac{e}{2} + \frac{1}{2} + e = \frac{e}{2} + \frac{1}{2}$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$E(\Omega) = -I_1 + I_2 = -\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2}\right) = e + 1$$

ΘΕΜΑ 22ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\mathbf{f(1) = -1}$
- $\mathbf{2f'(x)\big(f(x) - 2x\big) = 1 + 4f(x)}$, **για κάθε $x \in R$**

Να αποδείξετε ότι

α) $\mathbf{f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + x + 4}}$, $x \in R$

β) **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\eta\mu(\pi x)$, $x \in R^*$, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1, +\infty)$**

γ) $\mathbf{3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x)}$, **για κάθε $x \in R$**

δ) **Αν $\alpha > \frac{7}{4}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:**

$$\mathbf{(x+3)f(x-\alpha+1) = f(x-\alpha+3) + 2f(x-\alpha)}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \alpha)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$2f'(x)\big(f(x) - 2x\big) = 1 + 4f(x) \Rightarrow 2f'(x)f(x) - 4xf'(x) = 1 + 4f(x) \Rightarrow$$

$$2f(x)f'(x) - 4\big(xf'(x) + f(x)\big) = 1 \Rightarrow \big(f^2(x)\big)' - 4\big(xf(x)\big)' = (x)' \Rightarrow$$

$$\big(f^2(x) - 4xf(x)\big)' = (x)' \Rightarrow f^2(x) - 4xf(x) = x + c \quad (1)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(1) - 4\cdot 1\cdot f(1) = 1 + c \overset{f(1)=-1}{\Leftrightarrow} 1 + 4 = 1 + c \Leftrightarrow c = 4$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(x) - 4xf(x) = x + 4 \Leftrightarrow f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2 = 4x^2 + x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\big(f(x) - 2x\big)^2 = 4x^2 + x + 4 \Leftrightarrow g^2(x) = 4x^2 + x + 4 \quad (2),$$

όπου

$$g(x) = f(x) - 2x,\ x \in R \quad (3)$$

Το τριώνυμο $4x^2 + x + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -63 < 0$, οπότε για κάθε $x \in R$ είναι $4x^2 + x + 4 > 0$ και από τη σχέση (2) προκύπτει ότι για κάθε $x \in R$ είναι $g^2(x) > 0$, άρα $g(x) \neq 0$

Η συνάρτηση λοιπόν g δεν μηδενίζεται στο R και είναι συνεχής στο R ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων f και $2x$, (η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R ως παραγωγίσιμη).

Άρα η συνάρτηση g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R με $g(1)=f(1)-2=-1-2=-3<0$, οπότε για κάθε $x\in R$ είναι $g(x)<0$, επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

$$g(x)=-\sqrt{4x^2+x+4} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)-2x=-\sqrt{4x^2+x+4}$$

Άρα

$$f(x)=2x-\sqrt{4x^2+x+4}\ ,\quad x\in R$$

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_h λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=h(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=h(x) \\ y=f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-h(x)=0 \\ y=f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)=0 \\ y=f(x)\end{cases} \quad (\Sigma)$$

όπου $\varphi(x)=f(x)-h(x)=2x-\sqrt{4x^2+x+4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}\eta\mu(\pi x)$, $x\in[1,+\infty)$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ με

- $\varphi(1)=2-3+\frac{1}{3}-0=-\frac{2}{3}<0$ και
- $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=4-\sqrt{\frac{29}{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}-\sqrt{\frac{29}{2}}>0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$. Επομένως το σύστημα (Σ) έχει μία τουλάχιστον λύση (x_0,y_0), δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $M(x_0,y_0)$ με $x_0\in(1,+\infty)$

Παρατήρηση

Αντί της τιμής $f\left(\frac{3}{2}\right)$ θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\frac{1}{12}>0$ και να προσαρμόσουμε κατάλληλα τη συνέχεια της λύσης.

γ) Έστω τυχαίο $x\in R$, τότε είναι $x<x+1<x+3$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x\,,\,x+1]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[x\,,\,x+1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(x\,,\,x+1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=2-\frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+4}}$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(x\,,\,x+1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x) \quad (4)$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x+1, x+3]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[x+1, x+3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(x+1, x+3)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2 - \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+4}}$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x+1, x+3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+3)-f(x+1)}{(x+3)-(x+1)} = \frac{f(x+3)-f(x+1)}{2} \qquad (5)$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f''(x) = \left(2 - \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+4}}\right)' = -\frac{8 \cdot 2\sqrt{4x^2+x+4} - (8x+1)\left(2\sqrt{4x^2+x+4}\right)'}{\left(2\sqrt{4x^2+x+4}\right)^2} =$$

$$= -\frac{16\sqrt{4x^2+x+4} - (8x+1)\dfrac{2\cdot(8x+1)}{2\sqrt{4x^2+x+4}}}{4\left(4x^2+x+4\right)} = -\frac{16\left(4x^2+x+4\right) - (8x+1)^2}{4\left(4x^2+x+4\right)\sqrt{4x^2+x+4}} =$$

$$= -\frac{16\left(4x^2+x+4\right) - (8x+1)^2}{4\left(4x^2+x+4\right)\sqrt{4x^2+x+4}} = -\frac{63}{4\left(4x^2+x+4\right)\sqrt{4x^2+x+4}} < 0$$

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Είναι:

$$x < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+3 \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$f(x+1) - f(x) > \frac{f(x+3)-f(x+1)}{2} \Rightarrow$$

$$2f(x+1) - 2f(x) > f(x+3) - f(x+1) \Rightarrow$$

$$3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x), \text{ για κάθε } x \in R$$

δ) Έχουμε:

$$(x+3)f(x-\alpha+1) = f(x-\alpha+3) + 2f(x-\alpha) \Leftrightarrow w(x) = 0$$

όπου

$$w(x) = (x+3)f(x-\alpha+1) - f(x-\alpha+3) - 2f(x-\alpha),\ x \in [0, \alpha]$$

Η συνάρτηση w είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $w(0) = 3f(-\alpha+1) - f(-\alpha+3) - 2f(-\alpha)$

Όμως από το (γ) ερώτημα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x) \overset{x=-\alpha}{\Rightarrow} 3f(-\alpha+1) > f(-\alpha+3) + 2f(-\alpha) \Rightarrow$$

$$3f(-\alpha+1) - f(-\alpha+3) - 2f(-\alpha) > 0 \Rightarrow w(0) > 0 \quad (6)$$

- $w(\alpha) = (\alpha+3)f(1) - f(3) - 2f(0) = (\alpha+3)\cdot(-1) - \left(6-\sqrt{43}\right) - 2\cdot(-2) =$

  $= -\alpha - 3 - 6 + \sqrt{43} + 4 = -\alpha - 5 + \sqrt{43} = -\left(\alpha + 5 - \sqrt{43}\right) < 0 \Rightarrow w(\alpha) < 0 \quad (7),$

  διότι $\alpha > \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow \alpha + 5 > \dfrac{27}{4}$

  Αρκεί λοιπόν $\dfrac{27}{4} > \sqrt{43} \Leftrightarrow 27 > 4\sqrt{43} \Leftrightarrow 729 > 688$ που ισχύει.

Η συνάρτηση w ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, \alpha]$, αφού είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και λόγω των σχέσεων (6) και (7) ισχύει $w(0)\cdot w(\alpha) < 0$

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $w(\rho) = 0$, δηλαδή η εξίσωση

$$(x+3)f(x-\alpha+1) = f(x-\alpha+3) + 2f(x-\alpha)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (0, \alpha)$

ΘΕΜΑ 23ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\mathbf{f(0) = 0}$
- $|f'(x)| \le 1$ **για κάθε** $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $-2 \le f(2) \le 2$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ **έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

γ) Αν $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in R$

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y = x^2$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)} - 1\right)\left(f(x) - 2\ln x\right)$

iii) Αν $g: R \to R$ **είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο M(1, 0) και για κάθε** $x \in R$ **ικανοποιεί τη σχέση** $g''(x) = \dfrac{8x}{e^{f(x^2)}}$, **να αποδείξετε ότι** $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = f(1)$

ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 2]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[0, 2]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} f'(\xi) = \frac{f(2)}{2}$$

Επειδή $|f'(x)|\le 1$ για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$|f'(\xi)|\le 1 \Rightarrow \frac{|f(2)|}{2}\le 1 \Rightarrow |f(2)|\le 2 \Rightarrow -2\le f(2)\le 2$$

β) Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=x^2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες x_1, x_2 στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ με $x_1<x_2$

τότε έχουμε: $f(x_1)=x_1^2$ (1) και $f(x_2)=x_2^2$ (2)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^2,\ x\in[x_1, x_2]$

Για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $h'(x)=f'(x)-2x$
- $h(x_1)=h(x_2)$, αφού $h(x_1)=f(x_1)-x_1^2 \overset{(1)}{=} 0$ και $h(x_2)=f(x_2)-x_2^2 \overset{(2)}{=} 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(x_o)=0 \Rightarrow f'(x_o)=2x_o \Rightarrow f'(x_o)>1,\ \text{αφού } x_o>x_1>\frac{1}{2}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $|f'(x)|\le 1 \Leftrightarrow -1\le f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in R$

Επομένως, η εξίσωση $f(x)=x^2$ έχει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ το πολύ μια ρίζα.

γ) **i)** Οι τετμημένες των κοινών σημείων προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=x^2$
Είναι:

$$f(x)=x^2 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)=x^2 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)-x^2=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln(x^2+1)-x^2,\ x\in R$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$\varphi'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-2x=\frac{2x}{x^2+1}\left(1-(x^2+1)\right)=-\frac{2x^3}{x^2+1}$$

Είναι:

- $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow -2x^3=0 \Leftrightarrow x=0$
- $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow -2x^3>0 \Leftrightarrow x<0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης φ είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Μέγιστο

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty, 0)$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
Επομένως για κάθε $x<0$ είναι $\varphi(x)<\varphi(0)\Rightarrow \varphi(x)<0\Rightarrow f(x)<x^2$

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $\varphi'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$
  Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $\varphi(x)<\varphi(0)\Rightarrow\varphi(x)<0\Rightarrow f(x)<x^2$
- Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ με μέγιστη τιμή $\varphi(0)=0$
  Επομένως η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x^2$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0. Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y=x^2$ είναι το $O(0,0)$

ii) Για $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\left(e^{f(x)}-1\right)\left(f(x)-2\ln x\right)=\left(e^{\ln(x^2+1)}-1\right)\left(\ln(x^2+1)-2\ln x\right)=$$

$$=\left(x^2+1-1\right)\left(\ln(x^2+1)-\ln x^2\right)=x^2\cdot\ln\frac{x^2+1}{x^2}=x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}-1\right)\left(f(x)-2\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)\overset{+\infty\cdot 0}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\underset{u\to1}{\overset{1+\frac{1}{x^2}=u}{=}}\lim_{u\to1}\frac{\ln u}{u-1}=\left.\frac{d(\ln u)}{du}\right|_{u=1}=1$$

iii) Η γραφική παράσταση της συνάρτηση g εφάπτεται στον άξονα $x΄x$ στο σημείο $M(1,0)$, επομένως είναι $g(1)=0$ και $g'(1)=0$

Για κάθε $x\in R$ είναι $g''(x)=\dfrac{8x}{e^{f(x^2)}}=\dfrac{8x}{e^{\ln(x^4+1)}}=\dfrac{8x}{x^4+1}$. Αν εφαρμόσουμε διαδοχικά τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x'g(x)\,dx=\left[xg(x)\right]_0^1-\int_0^1 xg'(x)\,dx=$$

$$=g(1)-\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'g'(x)dx=0-\left(\left[\frac{x^2}{2}g'(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}g''(x)dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}g'(1)+\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{8x}{x^4+1}\right)dx=0+\int_0^1\frac{4x^3}{x^4+1}dx=$$

$$=\int_0^1\left[\ln(x^4+1)\right]'dx=\left[\ln(x^4+1)\right]_0^1=\ln2-\ln1=\ln2=f(1)$$

ΘΕΜΑ 24ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$ με $f(x) = x^4 + 4x + 8$ και $g(x) = συν x + x$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\dfrac{2}{x}\right) = 5$

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $4(2α^4 + 2α^3 + 4)(β^4 + 4β + 8) = 25α^4$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 g(x)}{f(x)}$

ε) Θεωρούμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$h(1) = 8$**
- **$h'(3) = 6$**
- **$h(g(x)) \le f(x)$ για κάθε $x \in R$**

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $h''(ξ) = 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1)$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	5	$\nearrow$	

Ελάχιστο

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ με ελάχιστη τιμή $f(-1) = 5$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) \ge 5$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -1$. Έτσι, για $x \ne 0$ έχουμε:

$$f\left(\frac{2}{x}\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -2$$

γ) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $α \ne 0$

Αν υποθέσουμε ότι $α = 0$, τότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$16(β^4 + 4β + 8) = 0 \Rightarrow f(β) = 0$$

που είναι άτοπο διότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι ίση με 5

Άρα $\alpha \neq 0$, οπότε αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας εξίσωσης με $\alpha^4 \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{4(2\alpha^4+2\alpha^3+4)(\beta^4+4\beta+8)}{\alpha^4}=25 \Leftrightarrow \left(8+\frac{8}{\alpha}+\frac{16}{\alpha^4}\right)(\beta^4+4\beta+8)=25 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{2}{\alpha}\right)f(\beta)=25 \underset{f(\beta)\geq 5}{\overset{f\left(\frac{2}{\alpha}\right)\geq 5}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} f\left(\frac{2}{\alpha}\right)=5 \\ f(\beta)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\alpha}=-1 \\ \beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

δ) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(\sigma\upsilon\nu x+x)}{x^4+4x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\sigma\upsilon\nu x+x^4}{x^4+4x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+1}{1+\frac{4}{x^3}+\frac{8}{x^4}}=1$$

διότι

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x^4}=0$ και
- $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}\Rightarrow -\frac{1}{|x|}\leq\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0$, οπότε από το

  Κριτήριο Παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

ε) **i)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=h(\sigma\upsilon\nu x+x)-x^4-4x-8$, $x\in R$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$h(g(x))\leq f(x)\Leftrightarrow h(\sigma\upsilon\nu x+x)\leq x^4+4x+8\Leftrightarrow h(\sigma\upsilon\nu x+x)-x^4-4x-8\leq 0\Leftrightarrow$$

$$H(x)\leq 0\Leftrightarrow H(x)\leq H(0)\text{, αφού } H(0)=h(1)-8=8-8=0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση H παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο R με $H'(x)=h'(\sigma\upsilon\nu x+x)(-\eta\mu x+1)-4x^3-4$, οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$ με $H'(0)=h'(1)-4$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$H'(0)=0\Rightarrow h'(1)-4=0\Rightarrow h'(1)=4$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1,h(1))$ είναι:

$$y-h(1)=h'(1)(x-1)\Rightarrow y-8=4(x-1)\Rightarrow y=4x+4$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=h'(x)-x$, $x\in[1,3]$

Για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $[1,3]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[1,3]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $\varphi'(x)=h''(x)-1$
- $\varphi(1)=\varphi(3)$, αφού $\varphi(1)=h'(1)-1=4-1=3$ και $\varphi(3)=h'(3)-3=6-3=3$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varphi'(\xi)=0\Rightarrow h''(\xi)-1=0\Rightarrow h''(\xi)=1$$

ΘΕΜΑ 25ο :

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x + 1 \text{, για κάθε } x \in R \quad (1)$$

α) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για $x = -1$ και $x = 1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 1 + \frac{1}{\alpha}$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\eta\mu x + 2)}{e^x - 1} = \frac{f(x)}{x + 2}$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

στ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{5}{4}$

ΛΥΣΗ

α) Αν θέσουμε $x = -1$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(-1) + f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1)\left(f^2(-1) + 1\right) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0 \text{, αφού } f^2(-1) + 1 \neq 0$$

Αν θέσουμε $x = 1$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow f^3(1) + f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f^3(1) - 1 + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(1)-1\right)\left(f^2(1)+f(1)+1\right)+\left(f(1)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(f(1)-1\right)\underbrace{\left(f^2(1)+f(1)+2\right)}_{>0}=0 \Leftrightarrow f(1)=1$$

β) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 \Rightarrow \left(3f^2(x)+1\right)f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1} > 0 \quad (2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Με δεδομένο ότι $f(-1) = 0$ έχουμε:

- Για $x < -1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > -1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(-1) \Rightarrow f(x) > 0$

γ) Από την ισότητα (2) προκύπτει ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f''(x) = \frac{-1}{\left(3f^2(x)+1\right)^2} \cdot 6f(x)f'(x) = \frac{-6f'(x)}{\left(3f^2(x)+1\right)^2} \cdot f(x)$$

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται από εκείνο των τιμών της $f(x)$, οπότε έχουμε:

- Αν $x < -1$ τότε $f''(x) > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- Αν $x > -1$ τότε $f''(x) < 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $[-1, +\infty)$

δ) Αν $\alpha > 1$ τότε είναι $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{\alpha}, 1\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{1 - \frac{1}{\alpha}} \overset{f(1)=1}{=} \frac{\alpha - \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - 1}$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[1, \alpha]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (1, \alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha) - f(1)}{\alpha - 1} \overset{f(1)=1}{=} \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$$

Είναι:

$$\frac{1}{\alpha} < \xi_1 < 1 < \xi_2 < \alpha \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \underset{f'\downarrow}{\overset{f\cap}{\Rightarrow}} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{\alpha - \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - 1} > \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} \overset{\alpha - 1 > 0}{\Rightarrow}$$

$$\alpha - \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right) > f(\alpha) - 1 \overset{\alpha > 0}{\Rightarrow} \frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 1 + \frac{1}{\alpha}$$

ε) Στο διάστημα $(-2, 0)$ η εξίσωση $\frac{f(\eta\mu x + 2)}{e^x - 1} = \frac{f(x)}{x + 2}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$(x + 2) f(\eta\mu x + 2) - (e^x - 1) f(x) = 0 \quad (3)$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (3) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (x + 2) f(\eta\mu x + 2) - (e^x - 1) f(x), \; x \in [-2, 0]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως αποτέλεσμα πράξεων και συνθέσεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον έχουμε:

- $g(-2) = (-2 + 2) f(-\eta\mu 2 + 2) - (e^{-2} - 1) f(-2) = \underbrace{(1 - e^{-2})}_{>0} \underbrace{f(-2)}_{<0} < 0$,

  διότι $-2 < -1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(-2) < f(-1) \Rightarrow f(-2) < 0$
- $g(0) = 2 f(\eta\mu 0 + 2) - (e^0 - 1) f(2) = 2 f(2) > 0$,

  διότι $-1 < 2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(-1) < f(2) \Rightarrow f(2) > 0$

Άρα $g(-2)g(0) < 0$

Επομένως, για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-2, 0]$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

στ) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και $f(-1)=0$, για κάθε $x \geq -1$ είναι $f(x) \geq 0$
Το χωρίο του οποίου ζητείται το εμβαδόν, οριοθετείται από τις ευθείες $x=-1$, $x=1$, $y=0$ και και τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

. Από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x)>0$ για κάθε $x \in R$, οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$f^3(x)+f(x)=x+1 \Rightarrow f^3(x)f'(x)+f(x)f'(x)=(x+1)f'(x) \Rightarrow$$
$$\int_{-1}^{1} f^3(x)f'(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)f'(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)f'(x)dx \Rightarrow$$
$$\left[\frac{1}{4}f^4(x)\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]_{-1}^{1}=\left[(x+1)f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\frac{1}{4}-0+\frac{1}{2}-0=2-0-E(\Omega) \Rightarrow E(\Omega)=2-\frac{3}{4} \Rightarrow E(\Omega)=\frac{5}{4}$$

ΘΕΜΑ 26ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$ και $g(x)=1+x(1-\ln x)$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g που να είναι παράλληλες. Στη συνέχεια να βρείτε σημεία της C_g με τετμημένες αντίστροφες στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους κάθετες.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho>1$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x=\rho$ και επιπλέον ισχύει $f(\rho)=\dfrac{1}{\rho}$

δ) Θεωρούμε επίσης την εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{2\rho}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β με $0<\alpha<\beta$

ii) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)+f'(\xi)=\dfrac{1}{2\rho}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $g'(x)=1-\ln x-x\dfrac{1}{x}=-\ln x$

Είναι:

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow -\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln 1 \Leftrightarrow x=1$
- $g'(x)<0 \Leftrightarrow -\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \Leftrightarrow x>1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας– ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	2	↘	

Μέγιστο

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0\ ,\ 1]$ και $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(0\ ,\ 1)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\ ,\ 1]$
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1\ ,+\infty)$ και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(1\ ,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1\ ,+\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$ με μέγιστη τιμή $g(1)=2$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+x(1-\ln x)\right)=1+\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x(1-\ln x)\right)=1+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}1+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=1+\lim\limits_{x\to 0^+}x=1+0=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x(1-\ln x)\right)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\ln x)=-\infty$

♦ Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0\ ,\ 1]$, οπότε είναι

$$g(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}g(x)\ ,\ g(1)\right]=(1,\ 2]$$

♦ Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1\ ,+\infty)$, οπότε είναι

$$g(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}g(x)\ ,\ g(1)\right]=(-\infty\ ,\ 2]$$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g\left((0,+\infty)\right)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)=(-\infty,\ 2]$$

β) Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει παράλληλες εφαπτόμενες στα σημεία της με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1<x_2$, τότε έχουμε:

$$g'(x_1)=g'(x_2)\Rightarrow-\ln x_1=-\ln x_2\Rightarrow\ln x_1=\ln x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

που είναι άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχουν σημεία της C_g στα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

Θεωρούμε δύο σημεία της C_g με τετμημένες x_3, x_4 με $x_3<x_4$ και $x_4=\dfrac{1}{x_3}$, τότε προφανώς είναι $0<x_3<1$. Οι εφαπτόμενες στα x_3, x_4 είναι κάθετες μεταξύ τους, μόνο όταν:

$$g'(x_3)\cdot g'(x_4)=-1\Leftrightarrow\ln x_3\cdot\ln x_4=-1\overset{\ln x_4=-\ln x_3}{\Leftrightarrow}\left(\ln x_3\right)^2=1\overset{0<x_3<1}{\Leftrightarrow}\ln x_3=-1\Leftrightarrow x_3=\frac{1}{e}\quad\text{και}\quad x_4=e$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(\dfrac{1}{e}\ ,\ \dfrac{2}{e}+1\right)$ και $B(e,\ 1)$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0\ ,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

οπότε το πρόσημα της f' είναι ίδιο με εκείνο της συνάρτησης g

Επομένως:

- Αν $x\in\Delta_1$ τότε $f'(x)>0$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1
- Αν $x\in\Delta_2$ τότε δεδομένου ότι $g(\Delta_2)=(-\infty,\ 2]$, υπάρχει $\rho>1$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0$ με τις τιμές της συνάρτησης g να αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν του ρ

Συγκεκριμένα αν $x \in (1, \rho)$ τότε $g(x) > 0$, ενώ αν $x > \rho$ τότε $g(x) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \rho]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho, +\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \rho$. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι ίση με

$$f(\rho) = \frac{\ln \rho}{\rho + 1} \quad (1)$$

Όμως $g(\rho) = 0 \Rightarrow \rho(1 - \ln\rho) = -1 \Rightarrow \ln\rho - 1 = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \ln\rho = \frac{\rho+1}{\rho}$,

οπότε η (1) γράφεται $f(\rho) = \dfrac{\frac{\rho+1}{\rho}}{\rho+1} = \dfrac{1}{\rho}$

δ) i) Θεωρούμε τα διαστήματα $D_1 = (0, \rho]$ και $D_2 = [\rho, +\infty)$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $D_1 = (0, \rho]$, οπότε είναι:

$$f(D_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(\rho)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{\rho}\right],$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot \ln x\right) = -\infty$ και $f(\rho) = \dfrac{1}{\rho}$

Ο αριθμός $\dfrac{1}{2\rho}$ ανήκει στο διάστημα $f(D_1) = \left(-\infty, \dfrac{1}{\rho}\right]$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{2\rho}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα α στο διάστημα $D_1 = (0, \rho]$ με $\alpha \neq \rho$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $D_2 = [\rho, +\infty)$, οπότε είναι:

$$f(D_2) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(\rho)\right] = \left(0, \frac{1}{\rho}\right],$$

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ και $f(\rho) = \dfrac{1}{\rho}$

Ο αριθμός $\dfrac{1}{2\rho}$ ανήκει στο διάστημα $f(D_2) = \left(0, \dfrac{1}{\rho}\right]$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{2\rho}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα β στο διάστημα $D_2 = [\rho, +\infty)$ με $\beta \neq \rho$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Επομένως εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β με $0 < \alpha < \beta$

ii) 1[ος] Τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) + f'(x) - \dfrac{1}{2\rho}$, $x \in [\alpha, \beta]$

Για τη συνάρτηση Φ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $\Phi(\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha) - \dfrac{1}{2\rho} = f'(\alpha) > 0$ αφού $0 < \alpha < \rho$ και $f'(x) > 0$ στο διάστημα $(0, \rho)$

  $\Phi(\beta) = f(\beta) + f'(\beta) - \dfrac{1}{2\rho} = f'(\beta) < 0$ αφού $\rho < \beta$ και $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(\rho, +\infty)$

  Επομένως $\Phi(\alpha)\Phi(\beta) < 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) - \frac{1}{2\rho} = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = \frac{1}{2\rho}$$

2^{ος} Τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x\left(f(x) - \frac{1}{2\rho}\right),\ x \in [\alpha, \beta]$

Για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $h'(x) = e^x\left(f(x) - \frac{1}{2\rho}\right) + e^x f'(x)$
- $h(\alpha) = h(\beta)$, αφού $h(\alpha) = e^\alpha\left(f(\alpha) - \frac{1}{2\rho}\right) \overset{(\delta)(i)}{=} 0$ και $h(\beta) = e^\beta\left(f(\beta) - \frac{1}{2\rho}\right) \overset{(\delta)(i)}{=} 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow e^\xi\left(f(\xi) - \frac{1}{2\rho} + f'(\xi)\right) = 0 \Rightarrow f(\xi) + f'(\xi) = \frac{1}{2\rho}$$

ΘΕΜΑ 27ο :

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f'(1) = 1$ και $f'(-1) = -1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2\left(xf'(x) - 4\right) = 1 - 2x^2 f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και την ευθεία $x = \alpha$ με $\alpha > 1$, τότε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3\left(f(x) - 2\right) - x + 1}{3\eta\mu^2(x-1) - \left(f(x) - 2\right)^2}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$x^2\left(xf'(x) - 4\right) = 1 - 2x^2 f(x) \Rightarrow x^3 f'(x) - 4x^2 = 1 - 2x^2 f(x) \Rightarrow$$

$$x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) = 4x^2 + 1 \overset{\div x \neq 0}{\Rightarrow} x^2 f'(x) + 2x f(x) = 4x + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\left(x^2 f(x)\right)' = \left(2x^2 + \ln|x|\right)' \Rightarrow x^2 f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \ln|x| + c_1, & x < 0 \\ 2x^2 + \ln|x| + c_2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{\ln|x|}{x^2}+\dfrac{c_1}{x^2}\ ,\ x<0 \\ 2+\dfrac{\ln|x|}{x^2}+\dfrac{c_2}{x^2}\ ,\ x>0 \end{cases} \qquad (2)$$

- Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$1^2\cdot\left(1\cdot f'(1)-4\right)=1-2\cdot 1^2\cdot f(1)\overset{f'(1)=1}{\Leftrightarrow}-3=1-2f(1)\Leftrightarrow$$

$$2f(1)=4\Leftrightarrow f(1)=2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2+\frac{\ln 1}{1^2}+\frac{c_2}{1^2}=2\Leftrightarrow c_2=0$$

- Για $x=-1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(-1)^2\cdot\left(-1\cdot f'(-1)-4\right)=1-2\cdot(-1)^2\cdot f(-1)\overset{f'(-1)=-1}{\Leftrightarrow}-(-1)-4=1-2f(-1)\Leftrightarrow$$

$$2f(-1)=4\Leftrightarrow f(-1)=2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2+\frac{\ln|-1|}{(-1)^2}+\frac{c_1}{(-1)^2}=2\Leftrightarrow c_1=0$$

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{\ln|x|}{x^2}\ ,\ x<0 \\ 2+\dfrac{\ln|x|}{x^2}\ ,\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow\ f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2}+2\ ,\ x\in R^*$$

β) Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln|x|}{x^2}+2\right)'=\frac{\left(\ln|x|\right)'\cdot x^2-\left(x^2\right)'\cdot\ln|x|}{x^4}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot\ln|x|}{x^4}=$$

$$=\frac{x-2x\cdot\ln|x|}{x^4}=\frac{1-2\ln|x|}{x^3}$$

Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-2\ln|x|=0\Leftrightarrow \ln|x|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow |x|=e^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{e}$
- Για το πρόσημο της $f'(x)$ ελέγχουμε το πρόσημο αριθμητή και παρονομαστή:
  - $1-2\ln|x|>0\Leftrightarrow \ln|x|<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow |x|<e^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow |x|<\sqrt{e}\Leftrightarrow -\sqrt{e}<x<\sqrt{e}$
  - $x^3>0\Leftrightarrow x>0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		$-\sqrt{e}$		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$1-2\ln\|x\|$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
x^3		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↗		↘	
			Τ.Μ.				Τ.Μ.		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $x_1=-\sqrt{e}$ και $x_2=\sqrt{e}$ με τιμή

$$f\left(\pm\sqrt{e}\right)=\frac{\ln\left|\pm\sqrt{e}\right|}{e}+2=\frac{\ln\sqrt{e}}{e}+2=\frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e}+2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln e}{e}+2=\frac{1}{2e}+2$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln|x|}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\ln|x|)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

Οπότε έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\ln|x|}{x^2}+2\right)=0+2=2$

- $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln|x|}{x^2}+2\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln|x|\cdot\frac{1}{x^2}+2\right)=-\infty$, αφού

  $\lim\limits_{x\to0}(\ln|x|)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(R^*)=\left(-\infty,\ \frac{1}{2e}+2\right]$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=2$, οπότε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ την ευθεία $\varepsilon: y=2$

Επίσης έχουμε:

$$f(x)=2\Leftrightarrow\frac{\ln|x|}{x^2}+2=2\Leftrightarrow\frac{\ln|x|}{x^2}=0\Leftrightarrow\ln|x|=0\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=\pm1,$$

οπότε η C_f τέμνει την ευθεία (ε) στα σημεία $A(-1,\ 2)$ και $B(1,\ 2)$

Για το εμβαδόν $E(\alpha)$ έχουμε:

$$E(\alpha)=\int_1^\alpha|f(x)-2|\,dx=\int_1^\alpha\left|\frac{\ln|x|}{x^2}\right|dx=\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}\,dx\ ,$$

αφού για κάθε $x\geq1$ είναι $\frac{\ln|x|}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}\geq0$

Άρα έχουμε:

$$E(\alpha)=\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\int_1^\alpha\left(-\frac{1}{x}\right)'\cdot\ln x\,dx=\left[-\frac{1}{x}\cdot\ln x\right]_1^\alpha-\int_1^\alpha-\frac{1}{x}\cdot(\ln x)'\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\cdot\ln\alpha+0-\int_1^\alpha-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\int_1^\alpha-\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^\alpha=$$

$$=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)=1-\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}$$

Είναι:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(1+\ln\alpha)'}{(\alpha)'}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}}{1}=0=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}=0,$$

οπότε:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(1-\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}\right)=1-0=1$$

δ) Για κάθε x κοντά στο 1 έχουμε:

$$\frac{x^3\left(f(x)-2\right)-x+1}{3\eta\mu^2(x-1)-\left(f(x)-2\right)^2}\overset{x>0}{=}\frac{x^3\cdot\frac{\ln x}{x^2}-x+1}{3\eta\mu^2(x-1)-\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2}=\frac{x\ln x-x+1}{3\eta\mu^2(x-1)-\frac{\ln^2 x}{x^4}}=$$

$$=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2\left(3\left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right)^2-\frac{1}{x^4}\cdot\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{3\left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right)^2-\frac{1}{x^4}\cdot\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2}\quad(1)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{\omega=x-1}{=}\lim\limits_{\omega\to0}\frac{\eta\mu\omega}{\omega}=1$

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}=1\qquad(2)$

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{x-1}\right)\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

Επομένως από (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3\left(f(x)-2\right)-x+1}{3\eta\mu^2(x-1)-\left(f(x)-2\right)^2}=\lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{3\left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right)^2-\frac{1}{x^4}\cdot\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot1^2-1\cdot1^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ 28ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=x-1+\ln x$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x$

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1}, την ευθεία με εξίσωση $y=x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=e$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}>0,$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $A=(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-1+\ln x)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1+\ln x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$

Επομένως:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και «1−1», οπότε συνεπώς αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A_f=(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών $f(A_f)=R$, οπότε η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}}=R$ και σύνολο τιμών $f^{-1}(A_{f^{-1}})=(0,+\infty)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x\leq0$ και δεδομένου ότι $f^{-1}(x)\in(0,+\infty)$, δηλαδή $f^{-1}(x)>0$ η ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x$ αληθεύει.
- Αν $x>0$, τότε έχουμε:

$$f^{-1}(x)\geq x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x>0\\ f\left(f^{-1}(x)\right)\geq f(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\geq x-1+\ln x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x\leq1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>0\\ \ln x\leq\ln e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\leq e\end{cases}\Leftrightarrow\ 0<x\leq e$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty,0]\cup(0,e]=(-\infty,e]$

γ) Επειδή $f^{-1}(x)\geq x$, για κάθε $x\in[0,e]$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E=\int_0^e\left(f^{-1}(x)-x\right)dx=\int_0^e f^{-1}(x)dx-\int_0^e x\,dx\quad(1)$$

Για το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^e f^{-1}(x)dx$, θέτουμε:

$$f^{-1}(x) = u \text{ οπότε } x = f(u) \text{ και } dx = f'(u)du$$

Η συνάρτηση f είναι «1−1», οπότε έχουμε:

- Για $x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$
- Για $x = e \Leftrightarrow f(u) = e \Leftrightarrow f(u) = f(e) \Leftrightarrow u = e$

Επομένως:

$$I_1 = \int_0^e f^{-1}(x)dx = \int_1^e uf'(u)du = \int_1^e u\left(1+\frac{1}{u}\right)du =$$

$$= \int_1^e (u+1)\,du = \left[\frac{u^2}{2}+u\right]_1^e = \frac{e^2}{2}+e-\frac{3}{2}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_0^e xdx$

Είναι:

$$I_2 = \int_0^e xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e = \frac{e^2}{2}$$

οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$E = I_1 - I_2 = \frac{e^2}{2}+e-\frac{3}{2}-\frac{e^2}{2} = e-\frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ 29ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{8}}$, $x \in [0,+\infty)$ και $g(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x$, $x \in (0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) = 2\sqrt{2\ln\frac{2}{x}}$, $x \in (0,2]$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 f'(x)dx$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,2)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{x^2}{8}} < 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(0,+\infty)$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, άρα είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$, $x\in[0,+\infty)$ και έχουμε διαδοχικά:

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2e^{-\frac{x^2}{8}}=y \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{8}}=\frac{y}{2} \quad (1)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $y\le 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη
- Αν $y>0$ η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$-\frac{x^2}{8}=\ln\frac{y}{2} \Leftrightarrow x^2=-8\ln\frac{y}{2} \Leftrightarrow x^2=8\ln\frac{2}{y} \quad (2)$$

Πρέπει $\ln\frac{2}{y}\ge 0 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{y}\ge \ln 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y}-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2-y}{y}\ge 0 \Leftrightarrow 0<y\le 2$

Από την υπόθεση έχουμε $x\ge 0$, οπότε η σχέση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$x=2\sqrt{2\ln\frac{2}{y}} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=2\sqrt{2\ln\frac{2}{y}},\ 0<y\le 2$$

Επομένως:

$$f^{-1}:(0,2]\to \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x)=2\sqrt{2\ln\frac{2}{x}}$$

β) Είναι:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^2 f'(x)dx=\left[x^2 f(x)\right]_0^{\sqrt{2}}-\int_0^{\sqrt{2}} 2xf(x)dx=2f(\sqrt{2})-\int_0^{\sqrt{2}} 2x\cdot 2e^{-\frac{x^2}{8}}dx=$$

$$=2\cdot 2e^{-\frac{1}{4}}-4\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-\frac{x^2}{8}}dx=4e^{-\frac{1}{4}}-4\cdot(-4)\int_0^{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{8}}\left(-\frac{x^2}{8}\right)'dx=$$

$$=4e^{-\frac{1}{4}}+16\left[e^{-\frac{x^2}{8}}\right]_0^{\sqrt{2}}=4e^{-\frac{1}{4}}+16\left(e^{-\frac{1}{4}}-1\right)=20e^{-\frac{1}{4}}-16=4\left(5e^{-\frac{1}{4}}-4\right)$$

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g'(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-4}{4x}$$

Είναι:

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{4x}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=2$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{4x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2>4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>2$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας– ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$		↘	$\frac{1}{2}-\ln 2$	↗	

Ελάχιστο

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0\ ,\ 2]$ και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(0\ ,\ 2)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\ ,\ 2]$
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2\ ,+\infty)$ και $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(2\ ,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2\ ,+\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=2$ με ελάχιστη τιμή $g(2)=\frac{1}{2}-\ln 2$

δ) 1^ος^ Τρόπος:

Στο διάστημα $(0\ ,\ 2)$ έχουμε:

$$\frac{x^2}{4}+\ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right)=-\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$2\ln\frac{2}{x}=e^{-\frac{x^2}{4}}\Leftrightarrow\sqrt{2\ln\frac{2}{x}}=e^{-\frac{x^2}{8}}\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2\ln\frac{2}{x}}=2e^{-\frac{x^2}{8}}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=f(x)$$

οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} επιλύουμε το σύστημα (Σ): $\begin{cases}y=f(x)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases}$ με $x,y\in(0\ ,\ 2)$

Είναι:

$$\begin{cases}y=f(x)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ f(y)=f\left(f^{-1}(x)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ x=f(y)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=2e^{-\frac{x^2}{8}}\\ x=2e^{-\frac{y^2}{8}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2e^{-\frac{x^2}{8}}=y & (3)\\ e^{\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{8}}=\frac{y}{x} & (4)\end{cases}$$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{8}=\ln\frac{y}{x}\Leftrightarrow\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{8}=\ln y-\ln x\Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{8}-\ln x=\frac{y^2}{8}-\ln y\Leftrightarrow g(x)=g(y)\Leftrightarrow x=y\quad(5)$$

γιατί η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,\ 2)$ άρα είναι και «1 – 1»

Η εξίσωση (3) λόγω της (5) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$2e^{-\frac{x^2}{8}}=x\Leftrightarrow 2e^{-\frac{x^2}{8}}-x=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2e^{-\frac{x^2}{8}}-x,\ x\in(0,2]$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0\ ,\ 2)$

Βρίσκουμε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης h:

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι:

$$h'(x) = -\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{8}} - 1 < 0$$

Επίσης η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = (0,2]$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (0, 2]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (0, 2]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα:

$$h(\Delta) = \left[h(2), \lim_{x\to 0^+} h(x) \right) = \left[\frac{2}{\sqrt{e}} - 2, \ 2 \right)$$

Παρατηρούμε ότι το $0 \in h(\Delta)$ και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα Δ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0, 2)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

$2^{ος}$ Τρόπος:

Στο διάστημα $(0, 2)$ έχουμε:

$$\frac{x^2}{4} + \ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right) = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$2\ln\frac{2}{x} = e^{-\frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow 2\ln 2 - 2\ln x - e^{-\frac{x^2}{4}} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \quad (6),$$

όπου $\varphi(x) = 2\ln 2 - 2\ln x - e^{-\frac{x^2}{4}}, \ x \in (0, 2]$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι:

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} - 4}{2x} \quad (7)$$

Για $x \in (0, 2)$ έχουμε:

$$-\frac{x^2}{4} < 0 \Rightarrow 0 < e^{-\frac{x^2}{4}} < 1 \quad \text{και} \quad 0 < x^2 < 4$$

Οπότε

$$0 < x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} < 4 \Rightarrow x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} - 4 < 0 \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε ότι $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και επειδή η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = (0, 2]$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση φ έχει σύνολο τιμών το $\varphi(\Delta) = \left[\varphi(2), \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) \right)$, όπου $\varphi(2) = -\frac{1}{e}$ και $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$. Άρα $\varphi(\Delta) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right)$

Παρατηρούμε ότι το $0 \in \varphi(\Delta)$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα Δ, άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0, 2)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

ΘΕΜΑ 30ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f_\alpha : R \to R$ με $f_\alpha(x) = \dfrac{3\alpha}{e^x + \alpha}$, $\alpha > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f_α ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0,+\infty)$ η γραφική παράσταση C_α της συνάρτησης f_α έχει ένα μόνο σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη της C_α έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E_\alpha(\lambda)$, $\lambda > 0$, του χωρίου που περικλείεται από την C_α, την ευθεία $y=3$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$ είναι $E_\alpha(\lambda) = 3\ln\left(\dfrac{e^\lambda + \alpha}{e^{-\lambda} + \alpha}\right)$

δ) i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_4 βρίσκεται πάνω από την καμπύλη C_1

ii) Αν $\zeta(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_1, C_4 και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$, να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \zeta(\lambda)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'_\alpha(x) = \frac{(3\alpha)'(e^x+\alpha) - 3\alpha(e^x+\alpha)'}{(e^x+\alpha)^2} = \frac{-3\alpha e^x}{(e^x+\alpha)^2} < 0$$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή είναι και συνεχής στο R, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $f_\alpha(R) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x)\right)$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\alpha}{e^x+\alpha} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\alpha) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\alpha}{e^x+\alpha} = \dfrac{3\alpha}{0+\alpha} = \dfrac{3\alpha}{\alpha} = 3$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Επομένως:

$$f_\alpha(R) = \left(\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x), \lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)\right) = (0,3)$$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'_\alpha(x) = \frac{-3\alpha e^x}{(e^x+\alpha)^2}$$

$$f''_\alpha(x) = \frac{(-3\alpha e^x)'(e^x+\alpha)^2 - (-3\alpha e^x)\left((e^x+\alpha)^2\right)'}{(e^x+\alpha)^4} =$$

$$= \frac{-3\alpha e^x(e^x+\alpha)^2 + 6\alpha e^x(e^x+\alpha)(e^x+\alpha)'}{(e^x+\alpha)^4} =$$

$$= \frac{-3\alpha e^x(e^x+\alpha) + 6\alpha e^x \cdot e^x}{(e^x+\alpha)^3} = \frac{-3\alpha e^{2x} - 3\alpha^2 e^x + 6\alpha e^{2x}}{(e^x+\alpha)^3} =$$

$$=\frac{3\alpha e^{2x}-3\alpha^2 e^x}{(e^x+\alpha)^3}=\frac{3\alpha e^x(e^x-\alpha)}{(e^x+\alpha)^3}$$

Είναι:

- $f_\alpha''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3\alpha e^x(e^x-\alpha)}{(e^x+\alpha)^3}=0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} e^x-\alpha=0 \Leftrightarrow e^x=\alpha \Leftrightarrow x=\ln\alpha$
- $f_\alpha''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{3\alpha e^x(e^x-\alpha)}{(e^x+\alpha)^3}>0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} e^x-\alpha>0 \Leftrightarrow e^x>\alpha \Leftrightarrow x>\ln\alpha$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$\ln\alpha$	$+\infty$
$f_\alpha''(x)$	$-$	0	$+$
$f_\alpha(x)$	$\frown$		$\smile$
		Σ.Κ.	

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f_α έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $M_\alpha\left(\ln\alpha\,,\, f_\alpha(\ln\alpha)\right)$

Είναι:

$$f_\alpha(\ln\alpha)=\frac{3\alpha}{e^{\ln\alpha}+\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha+\alpha}=\frac{3\alpha}{2\alpha}=\frac{3}{2},$$

οπότε το σημείο καμπής είναι το $M_\alpha\left(\ln\alpha\,,\,\dfrac{3}{2}\right)$

Είναι:

$$f_\alpha'(\ln\alpha)=\frac{-3\alpha e^{\ln\alpha}}{(e^{\ln\alpha}+\alpha)^2}=\frac{-3\alpha\cdot\alpha}{(\alpha+\alpha)^2}=\frac{-3\alpha^2}{4\alpha^2}=-\frac{3}{4}$$

Άρα η εφαπτομένη της C_α στο σημείο M_α έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Από το (α) ερώτημα έχουμε $0<f_\alpha(x)<3$, για κάθε $x\in R$, επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E_\alpha(\lambda)=\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(3-f_\alpha(x)\right)dx=\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(3-\frac{3\alpha}{e^x+\alpha}\right)dx=$$

$$=\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{3e^x+3\alpha-3\alpha}{e^x+\alpha}dx=\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{3e^x}{e^x+\alpha}dx=$$

$$=3\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{e^x}{e^x+\alpha}dx=3\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{1}{e^x+\alpha}(e^x+\alpha)'dx=$$

$$=3\cdot\left[\ln\left(e^x+\alpha\right)\right]_{-\lambda}^{\lambda}=3\cdot\left(\ln\left(e^\lambda+\alpha\right)-\ln\left(e^{-\lambda}+\alpha\right)\right)=$$

$$=3\cdot\ln\left(\frac{e^\lambda+\alpha}{e^{-\lambda}+\alpha}\right)$$

δ) i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f_4(x) > f_1(x) \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 4}{e^x + 4} > \frac{3 \cdot 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow 12(e^x + 1) > 3 \cdot (e^x + 4) \Leftrightarrow$$

$$12e^x + 12 > 3e^x + 12 \Leftrightarrow 12e^x > 3e^x \Leftrightarrow 12 > 3$$, που είναι αληθής.

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_1, C_4 και τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = -\lambda$ είναι:

$$\zeta(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(f_4(x) - f_1(x)\right)dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\left(3 - f_1(x)\right) - \left(3 - f_4(x)\right)\right)dx =$$

$$= \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(3 - f_1(x)\right)dx - \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(3 - f_4(x)\right)dx \overset{(\gamma)}{=} E_1(\lambda) - E_4(\lambda) =$$

$$= 3 \cdot \ln\left(\frac{e^{\lambda} + 1}{e^{-\lambda} + 1}\right) - 3 \cdot \ln\left(\frac{e^{\lambda} + 4}{e^{-\lambda} + 4}\right) = 3\left(\ln\frac{e^{\lambda} + 1}{\frac{1}{e^{\lambda}} + 1} - \ln\frac{e^{\lambda} + 4}{\frac{1}{e^{\lambda}} + 4}\right) =$$

$$= 3\left(\ln e^{\lambda} - \ln\frac{e^{\lambda}(e^{\lambda} + 4)}{4e^{\lambda} + 1}\right) = 3\ln\frac{e^{\lambda}}{\frac{e^{\lambda}(e^{\lambda} + 4)}{4e^{\lambda} + 1}} = 3\ln\frac{4e^{\lambda} + 1}{e^{\lambda} + 4}$$

Επομένως:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \zeta(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty}\left(3\ln\frac{4e^{\lambda} + 1}{e^{\lambda} + 4}\right) = \lim_{\lambda \to +\infty}\left(3\ln\frac{4 + \frac{1}{e^{\lambda}}}{1 + \frac{4}{e^{\lambda}}}\right) = 3\ln\frac{4 + 0}{1 + 0} = 3\ln 4$$

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f_\alpha : R \to R$ με $f_\alpha(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1}\right)$, $\alpha \in R$

α) Θέτουμε $I(\alpha) = \int_0^1 e^{x + f_\alpha(x)}dx$. Αν ισχύει $I(\alpha) = e - 1$, να βρείτε το α.

β) Να αποδείξετε ότι $f_\alpha(\alpha - x) = \alpha - f_\alpha(x)$, για κάθε $x \in R$

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$, με $\alpha > 0$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_α της συνάρτησης f_α, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \alpha$ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$I(\alpha) = \int_0^1 e^{x + f_\alpha(x)}dx = \int_0^1 e^x \cdot e^{f_\alpha(x)}dx = \int_0^1 e^x \cdot e^{\ln\left(\frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1}\right)}dx = \int_0^1 e^x \cdot \frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1}dx$$

Θέτουμε $u = e^x$, οπότε $du = e^x dx$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$, ενώ για $x = 1$ είναι $u = e$ και έχουμε:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1} \cdot e^x\,dx = \int_1^e \frac{u + e^\alpha}{u + 1}du = \int_1^e \frac{(u+1) + (e^\alpha - 1)}{u + 1}du =$$

$$= \int_1^e \frac{u+1}{u+1}du + \int_1^e \frac{(e^\alpha - 1)}{u+1}du = \int_1^e 1\,du + (e^\alpha - 1)\int_1^e \frac{1}{u+1}du =$$

$$= 1\cdot(e-1) + (e^\alpha - 1)\int_1^e \frac{1}{u+1}\cdot(u+1)'du = e - 1 + (e^\alpha - 1)\left[\ln|u+1|\right]_1^e =$$

$$= e - 1 + (e^\alpha - 1)\big(\ln(e+1) - \ln 2\big) = e - 1 + (e^\alpha - 1)\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

Είναι:

$$I(\alpha) = e - 1 \Leftrightarrow e - 1 + (e^\alpha - 1)\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = e - 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^\alpha - 1)\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f_\alpha(\alpha - x) = \ln\left(\frac{e^{\alpha-x} + e^\alpha}{e^{\alpha-x} + 1}\right) = \ln\left(\frac{e^\alpha \cdot e^{-x} + e^\alpha}{e^\alpha \cdot e^{-x} + 1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{e^\alpha\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)}{e^\alpha \cdot \frac{1}{e^x} + 1}\right) = \ln\left(e^\alpha \cdot \frac{e^x + 1}{e^x + e^\alpha}\right) =$$

$$= \ln e^\alpha + \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x + e^\alpha}\right) = \alpha - \ln\left(\frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1}\right) =$$

$$= \alpha - f_\alpha(x)$$

γ) Για $\alpha > 0$ είναι $e^\alpha > 1$, οπότε για κάθε $x \in R$ έχουμε $\dfrac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1} > \dfrac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1$

Επομένως:

$$f_\alpha(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1}\right) > \ln 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f_\alpha(x)dx$

Για κάθε $x \in R$ ισχύει $f_\alpha(\alpha - x) = \alpha - f_\alpha(x)$

Επειδή τα μέλη της ισότητας είναι συνεχείς συναρτήσεις έχουμε:

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \int_0^\alpha \alpha dx - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \alpha(\alpha - 0) - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \alpha^2 - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx$, θέτουμε $t = \alpha - x \Leftrightarrow x = \alpha - t$, οπότε $dx = -dt$

Για $x = 0$ είναι $u = \alpha$, ενώ για $x = \alpha$ είναι $u = 0$ και έχουμε:

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \int_\alpha^0 f_\alpha(t)(-dt) = -\int_\alpha^0 f_\alpha(t)dt = \int_0^\alpha f_\alpha(t)dt$$

Επομένως η σχέση (1) γράφεται:

$$\int_0^\alpha f_\alpha(x)dx = \alpha^2 - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \Rightarrow E(\alpha) = \alpha^2 - E(\alpha) \Rightarrow 2E(\alpha) = \alpha^2 \Rightarrow E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$$

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : R \to R$, με $f\big(f(x)\big) = f(x) - \frac{x}{4}$ (1), για κάθε $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R$, να αποδείξετε:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f\big(f(x)\big)}{x} = \lambda^2$

ii) $\lambda = \frac{1}{2}$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) > \frac{1}{4}$, για κάθε $x \in R$, να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ με $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{f(4) - f(3)}{f(2)}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f από υπόθεση είναι γνησίως μονότονη στο R. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f\left(f(x_1)\right) < f\left(f(x_2)\right) \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f\left(f(x_1)\right) - f(x_1) < f\left(f(x_2)\right) - f(x_2) \Rightarrow -\frac{x_1}{4} < -\frac{x_2}{4} \Rightarrow x_1 > x_2$$, που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) i) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(f(x)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f\left(f(x)\right)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right) = \lambda\cdot\lambda = \lambda^2 \quad (2),$$

αφού $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(f(x)\right)}{f(x)} \overset{f(x)=u}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u} = \lambda$

ii) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(f(x)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\frac{x}{4}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{\frac{x}{4}}{x}\right) = \lambda - \frac{1}{4} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\lambda^2 = \lambda - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Έστω $x<0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x,0]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x,0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0)-f(x)}{0-x}$$

Από τη σχέση (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f\left(f(0)\right) = f(0) \overset{f \text{ «1-1»}}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$$

Οπότε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x}$$

Όμως $\displaystyle f'(\xi_1) > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{4} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} f(x) < \frac{x}{4}$

Επειδή $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{4} = -\infty$ έχουμε και $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

> Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$ και $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, τότε θα είναι $f(x) \le g(x) < 0$ σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$ με $\beta < \alpha$, οπότε
>
> $$\frac{1}{g(x)} \le \frac{1}{f(x)} < 0$$
>
> Είναι:
>
> - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 0 = 0$
> - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)} = 0$
>
> Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε:
>
> $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$ και επειδή $\displaystyle\frac{1}{f(x)} < 0$
>
> συμπεραίνουμε ότι: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Έστω $x>0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0,x\right]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(0,x\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Από τη σχέση (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f\left(f(0)\right)=f(0)\overset{f\,\text{«1–1»}}{\Leftrightarrow} f(0)=0$$

Οπότε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x)}{x}$$

Όμως $\quad f'(\xi_2)>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}>\frac{1}{4}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)>\frac{x}{4}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{4}=+\infty$ έχουμε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$

Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, τότε θα είναι $f(x)\geq g(x)>0$ σε διάστημα της μορφής $(\beta,+\infty)$ με $\beta>\alpha$, οπότε

$$0<\frac{1}{f(x)}\leq\frac{1}{g(x)}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ και επειδή $\frac{1}{f(x)}>0$ συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f\left(R\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(-\infty,+\infty\right)=R$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(2)(x+1)(x-1)+f(3)x(x-1)+f(4)x(x+1)$, $x\in R$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-1,0\right]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$g(-1)=2f(3)>0\text{ , αφού }3>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(3)>f(0)\Leftrightarrow f(3)>0$$

$$g(0)=-f(2)<0\text{ , αφού }2>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(2)>f(0)\Leftrightarrow f(2)>0\Leftrightarrow -f(2)<0$$

Άρα

$$g(-1)g(0)<0$$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-1,0\right]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_1)=0$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,1\right]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$g(1)=2f(4)>0\text{ , αφού }4>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(4)>f(0)\Rightarrow f(4)>0$$

$$g(0)=-f(2)<0\text{ , αφού }2>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(2)>f(0)\Rightarrow f(2)>0\Rightarrow -f(2)<0$$

Άρα

$$g(0)g(1)<0$$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[0,1\right]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_2)=0$

Δηλαδή η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$

Όμως η εξίσωση:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow f(2)(x+1)(x-1)+f(3)x(x-1)+f(4)x(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$f(2)\left(x^2-1\right)+f(3)\left(x^2-x\right)+f(4)\left(x^2+x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(2)+f(3)+f(4)\right)x^2+\left(f(4)-f(3)\right)x-f(2)=0$$

είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού, άρα έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες τις ρ_1,ρ_2 στο διάστημα $(-1,1)$

Είναι:

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{-\beta}{\gamma}=\frac{-\left(f(4)-f(3)\right)}{-f(2)}=\frac{f(4)-f(3)}{f(2)}$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\ln 2}$ και $f(e)=\frac{1}{e}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$**
- **$f'(x)=-\left(\ln x+1\right)\cdot f^2(x)$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\left(e,f(e)\right)$ και την ευθεία $x=4$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=-\left(\ln x+1\right)f^2(x)\Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\ln x+1\Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=(x)'\ln x+x(\ln x)'\Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(x\ln x\right)'\Rightarrow \frac{1}{f(x)}=\begin{cases} x\ln x+c_1\,, & 0<x<1\\ x\ln x+c_2\,, & x>1\end{cases}$$

Όμως:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\ln 2}\Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=-\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+c_1=-\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow c_1=0 \quad \text{και}$$

$$f(e)=\frac{1}{e}\Leftrightarrow \frac{1}{f(e)}=e\Leftrightarrow e\ln e+c_2=e\Leftrightarrow c_2=0$$

Άρα:

$$\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}x\ln x\,,\ 0<x<1\\ x\ln x\,,\ x>1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=x\ln x\,,\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Επομένως:

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}\,,\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

β) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=-\left(\ln x+1\right)f^2(x)$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow-(\ln x+1)f^2(x)=0\overset{f(x)\neq0}{\Leftrightarrow}\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow-(\ln x+1)f^2(x)>0\overset{f^2(x)>0}{\Leftrightarrow}\ln x+1<0\Leftrightarrow\ln x<-1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x<e^{-1}\Leftrightarrow0<x<\frac{1}{e}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	‖	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0\,,\,\frac{1}{e}\right]$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\frac{1}{e}\,,1\right)$ και $\left(1,+\infty\right)$

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$$f''(x)=\left(-\left(\ln x+1\right)f^2(x)\right)'=-\frac{1}{x}f^2(x)-\left(\ln x+1\right)2f(x)f'(x)=$$

$$=-\frac{1}{x}f^2(x)+2\left(\ln x+1\right)^2f^3(x)=f^2(x)\left(-\frac{1}{x}+2\left(\ln x+1\right)^2f(x)\right)=$$

$$=f^2(x)\left(-\frac{1}{x}+2\left(\ln x+1\right)^2\frac{1}{x\ln x}\right)=f^2(x)\cdot\frac{2\left(\ln x+1\right)^2-\ln x}{x\ln x}=$$

$$=f^2(x)\cdot\frac{2\ln^2x+3\ln x+2}{x\ln x}\neq0,$$

αφού $f^2(x)>0$ (από υπόθεση είναι $f(x)\neq0$) και $2\ln^2x+3\ln x+2>0$, διότι το αντίστοιχο τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta<0$ και $\alpha=2>0$

Είναι:

- $f''(x)>0\Leftrightarrow f^2(x)\cdot\frac{2\ln^2x+3\ln x+2}{x\ln x}>0\Leftrightarrow x\ln x>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>0\Leftrightarrow x>1$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow f^2(x)\cdot\frac{2\ln^2x+3\ln x+2}{x\ln x}<0\Leftrightarrow x\ln x<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<0\Leftrightarrow0<x<1$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0 1	1 +∞
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,1)$ και κυρτή στο διάστημα $(1,+\infty)$

γ) Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\ln x} = +\infty,$$

αφού $\lim_{x\to 1^+}(x\ln x) = 0$ και $x\ln x > 0$ για $x>1$

Άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0,$$

αφού $\lim_{x\to +\infty}(x\ln x) = +\infty$

Άρα η ευθεία $y=0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$

δ) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$$f'(x) = -(\ln x+1)f^2(x),$$

οπότε

$$f'(e) = -(\ln e+1)f^2(e) = -2\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^2 = -\frac{2}{e^2}$$

και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$ είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x-e) \Leftrightarrow y - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e^2}(x-e) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(1,+\infty)$ έχουμε:

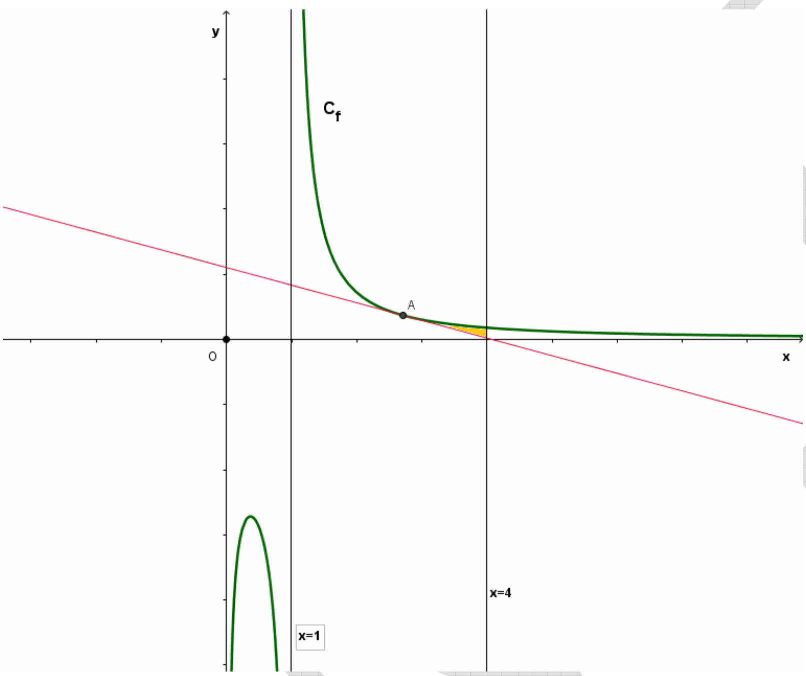
$$f(x) - y \ge 0 \Leftrightarrow f(x) + \frac{2}{e^2}x - \frac{3}{e} \ge 0 \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty)$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$ και την ευθεία $x=4$ είναι:

$$E(\Omega)=\int_e^4\left(f(x)+\frac{2}{e^2}x-\frac{3}{e}\right)dx=\int_e^4\frac{1}{x\ln x}dx+\frac{2}{e^2}\int_e^4 x\,dx-\frac{3}{e}\int_e^4 1\,dx=$$

$$=\int_e^4(\ln x)'\frac{1}{\ln x}dx+\frac{2}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^4-\frac{3}{e}[x]_e^4=$$

$$=\left[\ln|\ln x|\right]_e^4+\frac{16}{e^2}-1-\frac{12}{e}+3=\ln(\ln 4)+\frac{16}{e^2}-\frac{12}{e}+2$$



ΘΕΜΑ 34ο :

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(1)=e$ και $f'(1)=0$, η οποία για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $x^3f''(x)=e^{\frac{1}{x}}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$, $x\in(0,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}}\le \alpha e^{\frac{1}{\alpha}}+\beta e^{\frac{1}{\beta}}$ για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x)=\frac{f(x)}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$

ε) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{f(x)}, & x\in(0,+\infty)\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{x}}, & x\in(0,+\infty)\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι μία αρχική της h στο διάστημα $(0,+\infty)$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^e h(x)dx$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x f''(x) + f'(x) - f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$\left(x f'(x) - f(x)\right)' = \left(-e^{\frac{1}{x}}\right)' \Rightarrow x f'(x) - f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + c_1$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$1 \cdot f'(1) - f(1) = -e + c_1 \Leftrightarrow 0 - e = -e + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$x f'(x) - f(x) = -e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow$$

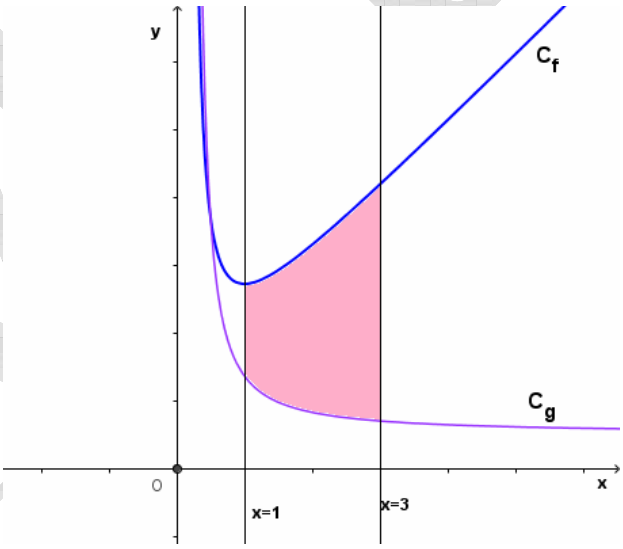
$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} + c_2$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$\frac{f(1)}{1} = e + c_2 \Leftrightarrow e = e + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = x e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (0,+\infty)$$



β) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας– ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0\ ,\ 1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0\ ,\ 1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\ ,\ 1]$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[1,+\infty\right)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(1,+\infty\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[1,+\infty\right)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f''(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}>0$, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left(0,+\infty\right)$

γ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $0<\alpha=\beta$, τότε ισχύει η ισότητα.
- Αν $0<\alpha\neq\beta$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha<\beta$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., αφού είναι παραγωγίσιμη, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., αφού είναι παραγωγίσιμη, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Είναι:

$$\alpha<\xi_1<\frac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta\Rightarrow\xi_1<\xi_2\underset{f'\uparrow}{\overset{f\cup}{\Rightarrow}}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\overset{\beta-\alpha>0}{\Rightarrow}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta)\Rightarrow$$

$$2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}}<\alpha e^{\frac{1}{\alpha}}+\beta e^{\frac{1}{\beta}}\Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}}<\alpha e^{\frac{1}{\alpha}}+\beta e^{\frac{1}{\beta}}$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει:

$$(\alpha+\beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}}\leq\alpha e^{\frac{1}{\alpha}}+\beta e^{\frac{1}{\beta}}$$

δ) Για κάθε $x \in [1, 3]$ είναι:

$$f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(x)}{2x}=f(x)\left(1-\frac{1}{2x}\right)=f(x)\left(\frac{2x-1}{2x}\right)>0$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x)=\frac{f(x)}{2x}$, $x \in (0,+\infty)$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$, είναι:

$$E=\int_1^3 \left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_1^3\left(xe^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{\frac{1}{x}}dx-\frac{1}{2}\int_1^3 e^{\frac{1}{x}}dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^3-\int_1^3\frac{x^2}{2}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx-\frac{1}{2}\int_1^3 e^{\frac{1}{x}}dx=$$

$$=\frac{9}{2}e^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}\int_1^3 e^{\frac{1}{x}}dx-\frac{1}{2}\int_1^3 e^{\frac{1}{x}}dx=\frac{9\sqrt[3]{e}-e}{2}$$

ε) i) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$h(x)=\frac{x+1}{f(x)}=\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

Η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0=h(0),$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}\underset{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0$

Επομένως η συνάρτηση h είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε η συνάρτηση h είναι συνεχής.

ii) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $H'(x)=\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right)'=(x)'e^{-\frac{1}{x}}+x\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'=e^{-\frac{1}{x}}+xe^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)'=$

$$=e^{-\frac{1}{x}}+xe^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{x+1}{xe^{\frac{1}{x}}}=\frac{x+1}{f(x)}=h(x)$$

Επίσης $H'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{H(x)-H(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0=h(0)$

Άρα μια αρχική της συνάρτησης h στο $(0,+\infty)$ είναι η συνάρτηση $H(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Επομένως:

$$I=\int_0^e h(x)dx=\int_0^e H'(x)dx=\left[H(x)\right]_0^e=H(e)-H(0)=e\cdot e^{-\frac{1}{e}}-0=e^{1-\frac{1}{e}}=e^{\frac{e-1}{e}}$$

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x)+2f(x)=3e^x \quad \text{για κάθε } x\in R \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι :

i) $e^{\frac{x}{3}} \le f(x) \le \dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}e^{\frac{x}{2}}$ **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}}=\sqrt[3]{3}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

στ) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^{\ln 4} f(x)dx+\int_1^2\frac{4}{x^2+2}dx=3$

ΛΥΣΗ

α) Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(0)+2f(0)=3e^0 \Leftrightarrow f^3(0)+2f(0)-3=0 \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**2**	**–3**	**1**
///	**1**	**1**	**3**	
1	**1**	**3**	**0**	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(0)-1\right)\underbrace{\left(f^2(0)+f(0)+3\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(0)=1$$

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=x^3+2x$, $x\in R$ και $h(x)=3e^x$, $x\in R$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g'(x)=\left(x^3+2x\right)'=3x^2+2>0 \quad \text{και} \quad h'(x)=\left(3e^x\right)'=3e^x>0$$

Άρα οι συναρτήσεις g, h είναι γνησίως αύξουσες στο R

Για κάθε $x\in R$ είναι η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$g\left(f(x)\right)=h(x) \Leftrightarrow \left(g\circ f\right)(x)=h(x)$$

Επειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R, συμπεραίνουμε ότι και η συνάρτηση $g\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε για κάθε $x_1,x_2\in R$ με

$$x_1<x_2 \Rightarrow \left(g\circ f\right)(x_1)<\left(g\circ f\right)(x_2) \Rightarrow g\left(f(x_1)\right)<g\left(f(x_2)\right) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

γ) i) Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι:

- $x\ge 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)\ge f(0) \Rightarrow f(x)\ge 1>0$
- $3f^3(x)=f^3(x)+2f(x)\cdot f^2(x) \overset{f^2(x)\ge 1}{\ge} f^3(x)+2f(x)\cdot 1=f^3(x)+2f(x)=3e^x$

Οπότε:

$$3f^3(x)\ge 3e^x \Leftrightarrow f^3(x)\ge e^x \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)\ge e^{\frac{x}{3}} \qquad (3)$$

Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, οπότε αξιοποιώντας τη γνωστή ανισότητα:

$$\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$,που ισχύει, για κάθε $\alpha,\beta\geq 0$

έχουμε:

$$f^3(x)+2f(x)\geq 2\sqrt{f^3(x)\cdot 2f(x)}\Leftrightarrow$$

$$f^3(x)+2f(x)\geq 2\sqrt{2f^4(x)}\Leftrightarrow$$

$$f^3(x)+2f(x)\geq 2\sqrt{2}\cdot f^2(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$3e^x\geq 2\sqrt{2}\cdot f^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)\leq\frac{3e^x}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$$f^2(x)\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}e^x\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)\leq\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}e^{\frac{x}{2}}\quad(4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$e^{\frac{x}{3}}\leq f(x)\leq\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}e^{\frac{x}{2}}\quad(5)$$

ii) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f^3(x)+2f(x)=3e^x\Leftrightarrow f^3(x)=3e^x-2f(x)\overset{:e^x}{\Leftrightarrow}\frac{f^3(x)}{e^x}=3-2\frac{f(x)}{e^x}\quad(6)$$

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της σχέσης (5) με το e^x έχουμε:

$$\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^x}\leq\frac{f(x)}{e^x}\leq\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x}\Leftrightarrow e^{-\frac{2x}{3}}\leq\frac{f(x)}{e^x}\leq\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{2x}{3}}\overset{t=-\frac{2x}{3}}{=}\lim_{t\to-\infty}e^t=0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right)\overset{u=-\frac{x}{2}}{=}\lim_{u\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}\cdot e^u\right)=\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}\cdot 0=0$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)=0$

Επομένως από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3-2\frac{f(x)}{e^x}\right)=3-2\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)=3-2\cdot 0=3$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{f^3(x)}{e^x}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)}{e^x}}=\sqrt[3]{3}$$

δ) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε τυχαίο $x_0\in R$, δηλαδή ότι $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Από τη σχέση (1) για $x=x_0$ έχουμε:

$$f^3(x_0)+2f(x_0)=3e^{x_0}\quad(7)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (7) έχουμε:

$$f^3(x)+2f(x)-\left(f^3(x_0)+2f(x_0)\right)=3e^x-3e^{x_0} \Leftrightarrow$$

$$f^3(x)+2f(x)-f^3(x_0)-2f(x_0)=3(e^x-e^{x_0}) \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right)+2\left(f(x)-f(x_0)\right)=3(e^x-e^{x_0}) \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-f(x_0)\right)\cdot\underbrace{\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\right)}_{\neq 0}=3(e^x-e^{x_0}) \Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{3(e^x-e^{x_0})}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$$

Είναι:

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\frac{3(e^x-e^{x_0})}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\right|=$$

$$=\frac{3\left|e^x-e^{x_0}\right|}{\left|\underbrace{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)}_{\geq 0}+2\right|}\leq\frac{3\left|e^x-e^{x_0}\right|}{2}$$

Οπότε έχουμε:

$$-\frac{3}{2}\left|e^x-e^{x_0}\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq\frac{3}{2}\left|e^x-e^{x_0}\right| \Leftrightarrow$$

$$f(x_0)-\frac{3}{2}\left|e^x-e^{x_0}\right|\leq f(x)\leq f(x_0)+\frac{3}{2}\left|e^x-e^{x_0}\right|$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)-\frac{3}{2}\left|e^x-e^{x_0}\right|\right)=f(x_0)-\frac{3}{2}\left|e^{x_0}-e^{x_0}\right|=f(x_0)-0=f(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0)+\frac{3}{2}\left|e^x-e^{x_0}\right|\right)=f(x_0)+\frac{3}{2}\left|e^{x_0}-e^{x_0}\right|=f(x_0)+0=f(x_0)$

Από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0\in R$, οπότε η f είναι συνεχής στο R

ε) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι και «$1-1$», επομένως αντιστρέφεται. Η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή το R

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$f^3(x)+2f(x)=3e^x \Leftrightarrow f(x)\cdot\left(f^2(x)+2\right)=3e^x \Leftrightarrow f(x)=\frac{3e^x}{f^2(x)+2}$$

Είναι:

$$\left|f(x)\right|=\left|\frac{3e^x}{f^2(x)+2}\right|=\frac{3e^x}{f^2(x)+2}\leq\frac{3e^x}{2}$$

Οπότε έχουμε:

$$|f(x)| \le \frac{3}{2}e^x \Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^x \le f(x) \le \frac{3}{2}e^x$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{2}e^x\right) = -\frac{3}{2}\cdot 0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}e^x\right) = \frac{3}{2}\cdot 0 = 0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}}\cdot e^{\frac{x}{3}}\right) = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}}\right) = \sqrt[3]{3} > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{3}} = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(R) = (0, +\infty)$

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),\ y > 0$$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^3 + 2y = 3e^{f^{-1}(y)} \Leftrightarrow e^{f^{-1}(y)} = \frac{y\left(y^2+2\right)}{3} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \ln\frac{y\left(y^2+2\right)}{3}$$

Οπότε:

$$f^{-1} : (0,+\infty) \to R \ \text{ με } \ f^{-1}(x) = \ln\frac{x\left(x^2+2\right)}{3}$$

στ) Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\ln 4} f(x)dx$ και δεδομένου ότι δεν γνωρίζουμε τον τύπο της συνεχούς στο R συνάρτησης f κάνουμε τα εξής:

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = \ln\frac{y\left(y^2+2\right)}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(y^3+2y\right) - \ln 3$$

Είναι:

$$dx = \left(\ln(y^3+2y) - \ln 3\right)' dy \Rightarrow dx = \frac{3y^2+2}{y^3+2y}dy$$

Για $x=0$ από το (α) ερώτημα έχουμε $f(0)=1$ και για $x=\ln 4$ είναι $f(\ln 4)=2$, αφού $f^{-1}(2)=\ln 4$

Επομένως έχουμε:

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = \int_1^2 y\cdot\frac{3y^2+2}{y^3+2y}dy = \int_1^2 \frac{3y^2+2}{y^2+2}dy = \int_1^2 \frac{3(y^2+2)-4}{y^2+2}dy =$$

$$= \int_1^2 \left(3 - \frac{4}{y^2+2}\right)dy = \int_1^2 3dy - \int_1^2 \frac{4}{y^2+2}dy =$$

$$= 3\cdot(2-1) - \int_1^2 \frac{4}{x^2+2}dx = 3 - \int_1^2 \frac{4}{x^2+2}dx$$

Δείξαμε ότι:

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = 3 - \int_1^2 \frac{4}{x^2+2}dy \Leftrightarrow \int_0^{\ln 4} f(x)dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2+2}dx = 3$$

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, με $f(e)=1$, η οποία για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)>0$
- $xf'(x)+f^2(x)=0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=εφx$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$

γ) Ένα υλικό σημείο $M(α,f(α))$, $α>1$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα $4α$ cm/sec

Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο Α, τότε:

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Α, τη χρονική στιγμή t_0, που το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $(e,f(e))$

ii) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $θ'(t_0)=\dfrac{12e}{e^2+1}$ rad/sec

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)+f^2(x)=0 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (\ln x)' \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \ln x + c$$

Για $x=e$ είναι:

$$\frac{1}{f(e)} = \ln e + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$\frac{1}{f(x)} = \ln x \text{, για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}\ ,\ x \in (1, +\infty)$$

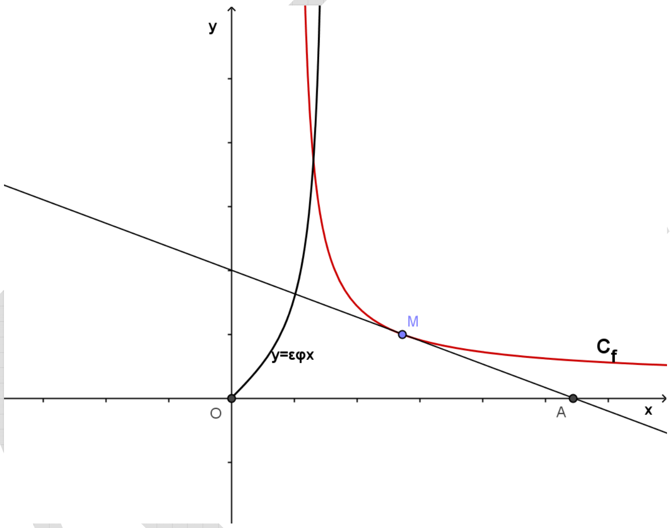
β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x) = f(x) - εφx$**,** $x \in A = \left(1\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο A ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$g'(x) = f'(x) - (εφx)' = -\frac{1}{x\ln^2 x} - \frac{1}{συν^2 x} < 0$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = \left(1\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$



Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(A) = \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)\,,\,\lim_{x\to 1^+} g(x)\right) = R \text{ , διότι:}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\ln x} - εφx\right) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - εφx\right) = +\infty$$

Επειδή το $0 \in g(A)$, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $A = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι και μοναδική αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο A.

γ) **i)** Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln^2 x}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο M είναι:

$$y - f(α) = f'(α)(x - α)$$

Για $y = 0$ έχουμε:

$$-f(α) = f'(α)(x - α) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\ln α} = -\frac{1}{α\ln^2 α}(x - α) \Leftrightarrow$$

$$α\ln α = x - α \Leftrightarrow x = α(1 + \ln α)$$

Την τυχαία χρονική στιγμή t η τετμημένη του σημείου M είναι $α(t)$

Η τετμημένη του σημείου A είναι $β(t) = α(t)(1 + \ln α(t))$ και ισχύει $α'(t) = 4α(t)$ (1)

Οπότε:

$$\beta'(t)=\alpha'(t)\big(1+\ln\alpha(t)\big)+\alpha(t)\frac{1}{\alpha(t)}\alpha'(t)\Leftrightarrow$$

$$\beta'(t)=\alpha'(t)+\alpha'(t)\ln\alpha(t)+\alpha'(t)\Leftrightarrow$$

$$\beta'(t)=2\alpha'(t)+\alpha'(t)\ln\alpha(t)\Leftrightarrow$$

$$\beta'(t)=\alpha'(t)\big(2+\ln\alpha(t)\big)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\beta'(t)=4\alpha(t)\big(2+\ln\alpha(t)\big)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0)=e$ (2), οπότε:

$$\beta'(t_0)=4\alpha(t_0)\big(2+\ln\alpha(t_0)\big)\overset{(2)}{=}4e\big(2+\ln e\big)=12e\ \text{cm/sec}$$

ii) Είναι:

$$\varepsilon\varphi\theta(t)=f'\big(\alpha(t)\big)=-\frac{1}{\alpha(t)\ln^2\alpha(t)}$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)\ln^2\alpha(t)+2\alpha'(t)\ln\alpha(t)}{\alpha^2(t)\ln^4\alpha(t)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)\ln\alpha(t)\big(\ln\alpha(t)+2\big)}{\alpha^2(t)\ln^4\alpha(t)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{\alpha'(t)\big(\ln\alpha(t)+2\big)}{\alpha^2(t)\ln^3\alpha(t)}\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{4\alpha(t)\big(\ln\alpha(t)+2\big)}{\alpha^2(t)\ln^3\alpha(t)}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{4\big(\ln\alpha(t)+2\big)}{\alpha(t)\ln^3\alpha(t)}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\theta'(t_0)=\frac{4\big(\ln\alpha(t_0)+2\big)}{\alpha(t_0)\ln^3\alpha(t_0)}\overset{(2)}{=}\frac{4(\ln e+2)}{e\ln^3 e}=\frac{12}{e}\quad(3)$$

Όμως:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)=1+\big(f'(\alpha(t_0))\big)^2=1+\big(f'(e)\big)^2=1+\left(-\frac{1}{e}\right)^2=\frac{e^2+1}{e^2}\quad(4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{e^2+1}{e^2}\theta'(t_0)=\frac{12}{e}\Rightarrow\theta'(t_0)=\frac{12}{e}\cdot\frac{e^2}{e^2+1}\Rightarrow\theta'(t_0)=\frac{12e}{e^2+1}$$

ΘΕΜΑ 37ο :

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

α) Για τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f :

i) Να αποδείξετε ότι έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της με τον άξονα $x'x$. Σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τρεις θέσεις τοπικών ακροτάτων με δύο τιμές.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2, 2)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοιοι, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) + f(x_1)f(x_2) = 0$

ΛΥΣΗ

α) i) Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f^3(-x) + f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 8 \Leftrightarrow f^3(-x) + f(-x) = x^4 - 2x^2 - 8 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = f^3(-x) + f(-x) \Leftrightarrow f^3(x) - f^3(-x) + f(x) - f(-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x) - f(-x)\right)\left(f^2(x) + f(x)f(-x) + f^2(-x)\right) + f(x) - f(-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x) - f(-x)\right)\left(f^2(x) + f(x)f(-x) + f^2(-x) + 1\right) = 0$$

Είναι:

$$f^2(x) + f(x)f(-x) + f^2(-x) + 1 = \frac{1}{2}\left[f^2(x) + \left(f(x) + f(-x)\right)^2 + f^2(-x)\right] + 1 \geq 1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) - f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in R$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$

ii) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x) + 1\right) = (x^2 - 4)(x^2 + 2) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2)}{f^2(x) + 1}, \text{ αφού } f^2(x) + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Επειδή $x^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in R$ είναι:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

  Άρα η γραφική παράστασης C_f της συνάρτησης f έχει με τον άξονα $x'x$ δύο κοινά σημεία τα $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$
- Η γραφική παράστασης C_f της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν:

  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

Έστω τυχαίο $x_0 \in R$. Για $x = x_0$ από τη σχέση έχουμε:

$$f^3(x_0) + f(x_0) = x_0^4 - 2x_0^2 - 8 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) , (3) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x^4-x_0^4-2\left(x^2-x_0^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right)=\left(x^2-x_0^2\right)\left(x^2+x_0^2-2\right)\quad (4)$$

Είναι:

$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1=\frac{1}{2}\left[f^2(x)+\left(f(x)+f(x_0)\right)^2+f^2(x_0)\right]+1\ge 1$$

Επομένως από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\left|x^2-x_0^2\right|\cdot\left|x^2+x_0^2-2\right|=\left|f(x)-f(x_0\right|\cdot\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|\ge\left|f(x)-f(x_0\right|\Rightarrow$$

$$-\left|x^2-x_0^2\right|\cdot\left|x^2+x_0^2-2\right|\le f(x)-f(x_0)\le\left|x^2-x_0^2\right|\cdot\left|x^2+x_0^2-2\right|$$

Είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\left(-\left|x^2-x_0^2\right|\cdot\left|x^2+x_0^2-2\right|\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\left|x^2-x_0^2\right|\cdot\left|x^2+x_0^2-2\right|\right)=0$$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, άρα η f είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $x_0\in R$, οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R

γ) Έστω τυχαίο $x_0\in R$. Για κάθε x κοντά στο x_0 από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{(x+x_0)\left(x^2+x_0^2-2\right)}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\quad (5)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right)=3f^2(x_0)+1$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\left[(x+x_0)\left(x^2+x_0^2-2\right)\right]=2x_0\left(2x_0^2-2\right)=4x_0\left(x_0^2-1\right)$$

Οπότε από τη σχέση (5) έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{4x_0\left(x_0^2-1\right)}{3f^2(x_0)+1}\in R$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0\in R$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, με:

$$f'(x)=\frac{4x\left(x^2-1\right)}{3f^2(x)+1}\text{, για κάθε } x\in R$$

δ) Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=0$ ή $x=1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας– ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	
		Τ.Ε.	Τ.Μ.	Τ.Ε.	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στις θέσεις -1 και 1 το ίδιο τοπικό ελάχιστο $f(-1) = f(1) = m$, αφού η συνάρτηση f είναι άρτια και στη θέση 0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = M$.

Δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει τρεις θέσεις τοπικών ακροτάτων με δύο τιμές.

ε) Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x) = f(x)e^x,\ x \in [-2, 2] \quad \text{και} \quad h(x) = f(x)e^{-x},\ x \in [-2, 2]$$

Για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[-2, 2]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $g'(x) = \left(f'(x) + f(x)\right)e^x$
- $g(-2) = f(-2)e^{-2} = 0 \cdot e^{-2} = 0$ και $g(2) = f(2)e^2 = 0 \cdot e^2 = 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_1) = 0 \Rightarrow \left(f'(x_1) + f(x_1)\right)e^{x_1} = 0 \Rightarrow f'(x_1) = -f(x_1) \quad (6),\ \text{αφού } e^{x_1} > 0$$

Για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[-2, 2]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $h'(x) = \left(f'(x) - f(x)\right)e^{-x}$
- $h(-2) = f(-2)e^{-(-2)} = 0 \cdot e^2 = 0$ και $h(2) = f(2)e^{-2} = 0 \cdot e^{-2} = 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(x_2) = 0 \Rightarrow \left(f'(x_2) - f(x_2)\right)e^{-x_2} = 0 \Rightarrow f'(x_2) = f(x_2) \quad (7),\ \text{αφού } e^{-x_2} > 0$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$f'(x_1)f'(x_2) = -f(x_1)f(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1)f'(x_2) + f(x_1)f(x_2) = 0 \quad (8)$$

Είναι $x_1 \neq x_2$, διότι αν υποθέσουμε $x_1 = x_2 = \xi$, τότε από τη σχέση (8) θα είχαμε:

$$f'(\xi)f'(\xi) + f(\xi)f(\xi) = 0 \Rightarrow [f'(\xi)]^2 + [f(\xi)]^2 = 0 \Rightarrow f'(\xi) = f(\xi) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, λόγω μη ύπαρξης κοινών ριζών των $f(x)$ και $f'(x)$, αφού οι ρίζες της $f(x)$ είναι οι αριθμοί -2 και 2, ενώ οι ρίζες της $f'(x)$ είναι οι αριθμοί -1, 0 και 1

ΘΕΜΑ 38ο :

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση

$$(2x^2 + 1)e^{2x^2 - x - 1} = x + 2$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοια, ώστε $\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e - 1$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x}dx < \frac{4}{3}$

ΛΥΣΗ

α) • Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f'(x)=(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι και «$1-1$», άρα αντιστρέφεται.

• Επειδή $2x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$, έχουμε:

$$(2x^2+1)e^{2x^2-x-1}=x+2 \Leftrightarrow e^{2x^2-x-1}=\frac{x+2}{2x^2+1} \qquad (4)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

♦ Αν $x+2\le 0 \Leftrightarrow x\le -2$ είναι $\frac{x+2}{2x^2+1}\le 0$ και $e^{2x^2-x-1}>0$, οπότε η εξίσωση (4) είναι αδύνατη.

♦ Αν $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ είναι $\frac{x+2}{2x^2+1}>0$ και $e^{2x^2-x-1}>0$, οπότε η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$\ln\left(e^{2x^2-x-1}\right)=\ln\frac{x+2}{2x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$2x^2-x-1=\ln(x+2)-\ln(2x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$(2x^2+1)-(x+2)=\ln(x+2)-\ln(2x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2+1+\ln(2x^2+1)=x+2+\ln(x+2) \Leftrightarrow$$

$$f(2x^2+1)=f(x+2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} 2x^2+1=x+2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ή } x=1$$

Οι ρίζες είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $x>-2$

β) Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

♦ $f\left(\frac{1}{e}\right)f(1)=\left(\frac{1}{e}+\ln\frac{1}{e}\right)\cdot(1+\ln 1)=\left(\frac{1}{e}-\ln e\right)\cdot(1+0)=\frac{1}{e}-1<0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano , άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},x_0\right]$ ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},x_0\right]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{e},x_0\right)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in\left(\frac{1}{e},x_0\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f\left(\frac{1}{e}\right)}{x_0-\frac{1}{e}}=\frac{0-\left(\frac{1}{e}-1\right)}{x_0-\frac{1}{e}}=\frac{1-\frac{1}{e}}{x_0-\frac{1}{e}}=\frac{e-1}{ex_0-1}$$

Είναι:

$$f'(\xi_1)=\frac{e-1}{ex_0-1}\Rightarrow\frac{e-1}{f'(\xi_1)}=ex_0-1 \quad (5)$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x_0\,,1]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[x_0\,,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0\,,1)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x_0\,,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-0}{1-x_0}=\frac{1}{1-x_0}$$

Είναι:

$$f'(\xi_2)=\frac{1}{1-x_0}\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_2)}=1-x_0\Rightarrow\frac{e}{f'(\xi_2)}=e-ex_0 \quad (6)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6) έχουμε:

$$\frac{e-1}{f'(\xi_1)}+\frac{e}{f'(\xi_2)}=ex_0-1+e-ex_0\Rightarrow\frac{e-1}{f'(\xi_1)}+\frac{e}{f'(\xi_2)}=e-1$$

Άρα:

$$\frac{e-1}{f'(\xi_1)}+\frac{e}{f'(\xi_2)}=e-1\ ,\ \text{με}\ \ \xi_1\,,\,\xi_2\in\left(\frac{1}{e}\,,1\right)$$

γ) Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}>0 \quad \text{και} \quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο διάστημα $(0,+\infty)$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=2(x-1)\Rightarrow y=2x-1$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε η C_f βρίσκεται από την ευθεία (ε) και κάτω, δηλαδή για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\le 2x-1$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

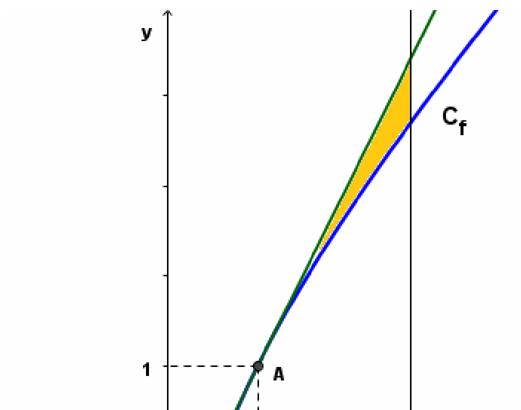
$$E=\int_1^e\big(2x-1-f(x)\big)dx=\int_1^e(2x-1-x-\ln x)dx=\int_1^e(x-1-\ln x)dx=$$

$$=\int_1^e(x-1)dx-\int_1^e\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e-\int_1^e(x)'\ln x\,dx=$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)-\left[x\ln x\right]_1^e+\int_1^e x(\ln x)'dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}-(e\ln e-1\cdot\ln 1)+\int_1^e 1\,dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}-e+1\cdot(e-1)=\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}=\frac{e^2-2e-1}{2}$$



δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)+1}{e^x}=\frac{x+\ln x+1}{e^x}$, $x\in[1,e]$

Για κάθε $x\in[1,e]$ είναι:

$$h'(x)=\left(\frac{x+\ln x+1}{e^x}\right)'=\frac{(x+\ln x+1)'e^x-(x+\ln x+1)(e^x)'}{(e^x)^2}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^x-(x+\ln x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)-(x+\ln x+1)}{e^x}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}-x-\ln x}{e^x}=\frac{\varphi(x)}{e^x}\quad(7),\ \text{όπου}\ \varphi(x)=\frac{1}{x}-x-\ln x$$

Για κάθε $x\in[1,e]$ είναι:

$$\varphi'(x)=\left(\frac{1}{x}-x-\ln x\right)'=-\frac{1}{x^2}-1-\frac{1}{x}<0$$

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,e]$, με $\varphi(1)=1-1-0=0$, οπότε:

Αν $1<x\le e \overset{\varphi\downarrow}{\Rightarrow} \varphi(1)>\varphi(x)\ge\varphi(e)\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(1)\Rightarrow\varphi(x)<0$, για κάθε $x\in(1,e]$, οπότε από τη σχέση (7) έχουμε:

$$h'(x)=\frac{\varphi(x)}{e^x}<0,\ \text{για κάθε}\ x\in(1,e]$$

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων
- $h'(x)<0$, για κάθε $x\in(1,e]$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,e]$

Επομένως:

- Για $1\le x\le e \overset{h\downarrow}{\Rightarrow} h(1)\ge h(x)\ge h(e)\Rightarrow h(x)\le h(1)\Rightarrow h(x)\le\frac{2}{e}$ (8),

αφού $h(1)=\frac{1+\ln 1+1}{e^1}=\frac{2}{e}$

Επειδή η συνάρτηση h και η σταθερή συνάρτηση $\frac{2}{e}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις από τη σχέση (8) έχουμε:

$$\int_1^e h(x)dx\le\int_1^e\frac{2}{e}dx\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)+1}{e^x}dx\le\frac{2}{e}\cdot(e-1)\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)+1}{e^x}dx\le\frac{2(e-1)}{e}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{2(e-1)}{e}<\frac{4}{3}\Leftrightarrow 6e-6<4e\Leftrightarrow 2e<6\Leftrightarrow e<3,$$

το οποίο ισχύει.

Άρα:

$$\int_1^e\frac{f(x)+1}{e^x}dx<\frac{4}{3}$$