

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$

- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $\Phi(x)=f(x)+g(x)$
- β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$, η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία $x=3$
- δ) Ένα υλικό σημείο M με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec . Αν N είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και $A(0,a)$ σημείο του άξονα $y'y$, με $a > 0$, τότε:
- i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού E του τριγώνου AMN κάθε χρονική στιγμή t ισούται με $\Phi(x(t))$
- ii) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου M , τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN είναι ίσος με $\left(2\ln 3 + \frac{8}{9}\right) \text{ cm}^2/\text{sec}$

ΛΥΣΗ

α) Λύνουμε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = 0, x \in (-1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση επαληθεύεται για $x=0$. Πράγματι

$$\ln(0+1) + \frac{0}{0+1} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Άρα $x=0$ είναι λύση της εξίσωσης $\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}, x > -1$

Η συνάρτηση Φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$, με

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x+1} (x+1)' + \frac{(x)' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

Είναι $\Phi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας – προσήμου της συνάρτησης Φ είναι ο παρακάτω:

x	-1	0	$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	
Φ		↗	
$\Phi(x)$		$-$	$+$

Έχουμε:

- Για $-1 < x < 0 \Rightarrow \overset{\Phi \uparrow}{\Phi(x)} < \Phi(0) \Rightarrow \Phi(x) < 0$
- Για $x > 0 \Rightarrow \overset{\Phi \uparrow}{\Phi(x)} > \Phi(0) \Rightarrow \Phi(x) > 0$

Επομένως $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0$ μόνο για $x = 0$

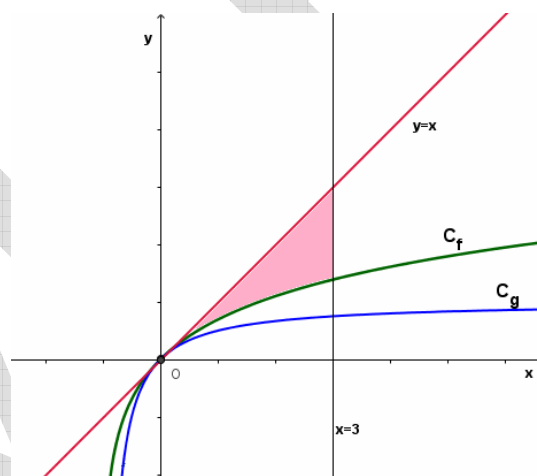
β) Είναι: $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $x > -1$ και $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$

Στο σημείο $O(0, 0)$ έχουμε:

$$f(0) = \ln(0+1) = 0, \quad f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1 \quad \text{και}$$

$$g(0) = \frac{0}{0+1} = 0, \quad g'(0) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1$$

Επομένως στο σημείο $O(0, 0)$ έχουμε κοινή εφαπτομένη με εξίσωση $y = x$, η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου.



γ) Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

Αρα η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-1, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται από την ευθεία $y = x$ και κάτω, δηλαδή ισχύει $f(x) \leq x$, για κάθε $x \in (-1, +\infty)$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f την ευθεία $y = x$ και την ευθεία $x = 3$ είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^3 |f(x) - x| dx = \int_0^3 (x - f(x)) dx = \int_0^3 x dx - \int_0^3 f(x) dx = \\ &= \int_0^3 x dx - \int_0^3 \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 - \int_0^3 (x)' \cdot \ln(x+1) dx = \\ &= \frac{9}{2} - [x \cdot \ln(x+1)]_0^3 + \int_0^3 \frac{x}{x+1} dx = \frac{9}{2} - 3 \cdot \ln 4 + \int_0^3 \frac{(x+1) - 1}{x+1} dx = \\ &= \frac{9}{2} - 3 \cdot \ln 4 + \int_0^3 1 dx - \int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = \frac{9}{2} - 3 \cdot \ln 4 + 1 \cdot (3-0) - [\ln(x+1)]_0^3 = \\ &= \frac{9}{2} - 3 \cdot \ln 4 + 3 - (\ln 4 - \ln 1) = \frac{15}{2} - 4 \ln 4 \end{aligned}$$

δ) i) 1^{ος} Τρόπος:

Είναι:

$$\overline{AM} = (x, \ln(x+1) - \alpha), \quad \overline{AN} = (x, -\alpha)$$

$$\det(\overline{AM}, \overline{AN}) = \begin{vmatrix} x & \ln(x+1) - \alpha \\ x & -\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha x - x \ln(x+1) + \alpha x = -x \ln(x+1)$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου AMN είναι:

$$E = E_{(AMN)} = \frac{1}{2} |\det(\overline{AM}, \overline{AN})| = \frac{1}{2} |-x \ln(x+1)| = \frac{1}{2} x \ln(x+1), \quad x > 0$$

2^{ος} Τρόπος:

Είναι:

$$E = E_{(AMN)} = \frac{1}{2} d(A, MN) \cdot (MN) = \frac{1}{2} x \cdot f(x) = \frac{1}{2} x \ln(x+1), \quad x > 0$$

Επειδή η τετμημένη x του σημείου M είναι συνάρτηση του χρόνου t έχουμε:

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) \ln(x(t)+1), \quad x(t) > 0$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} (x(t) \ln(x(t)+1))' = \frac{1}{2} \left(x'(t) \ln(x(t)+1) + x(t) \frac{(x(t)+1)'}{x(t)+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x'(t) \ln(x(t)+1) + x(t) \frac{x'(t)}{x(t)+1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 \ln(x(t)+1) + x(t) \frac{2}{x(t)+1} \right) = \\ &= \ln(x(t)+1) + \frac{x(t)}{x(t)+1} = \Phi(x(t)), \quad x(t) > 0 \end{aligned}$$

ii) Είναι:

$$\ln(x(t)+1) + \frac{x(t)}{x(t)+1} = 2 \ln 3 + \frac{8}{9} \Leftrightarrow \ln(x(t)+1) + \frac{x(t)}{x(t)+1} = \ln 9 + \frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x(t)+1) + \frac{x(t)}{x(t)+1} = \ln(8+1) + \frac{8}{8+1} \Leftrightarrow \Phi(x(t)) = \Phi(8) \Leftrightarrow_{\substack{\Phi \uparrow \\ \Phi^{-1}}} x(t) = 8$$

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$, $x \leq 0$

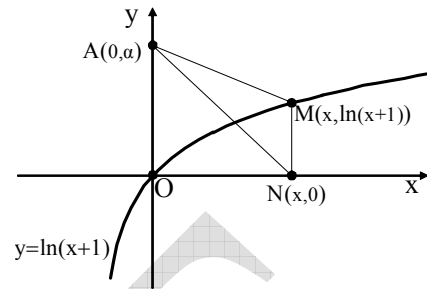
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Ένα υλικό σημείο $A(a, \sqrt{-a})$, $a < 0$ κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $a'(t) = -a(t)$. Επίσης υλικό σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = x$

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\hat{AOM} = \theta$, όπου O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $(OA) = \sqrt{2}$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις: $y = \sqrt{-x}$ με $x \leq 0$, $y = x$ με $x \geq 0$ και την $y = a'(t_0)$

iii) Να βρείτε ευθεία παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.



ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, με $f'(x) = (\sqrt{-x})' = \frac{1}{2\sqrt{-x}}(-x)' = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$

Έχουμε:

- ◆ Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$
- ◆ $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, με

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{-x}} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-(\sqrt{-x})'}{(\sqrt{-x})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{-x}}(-x)'}{(-x)} = \frac{1}{4x\sqrt{-x}}$$

Έχουμε:

- ◆ Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$
- ◆ $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f((-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} \stackrel{-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f((-\infty, 0]) = [0, +\infty)$$

β) i) 1^{ος} Τρόπος:

Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

$$\widehat{AOM} = \theta = \theta(t) \text{ και } A(\alpha(t), \sqrt{-\alpha(t)}),$$

όπου $\alpha(t) < 0$

Η ευθεία $y=x$ σχηματίζει με τον άξονα

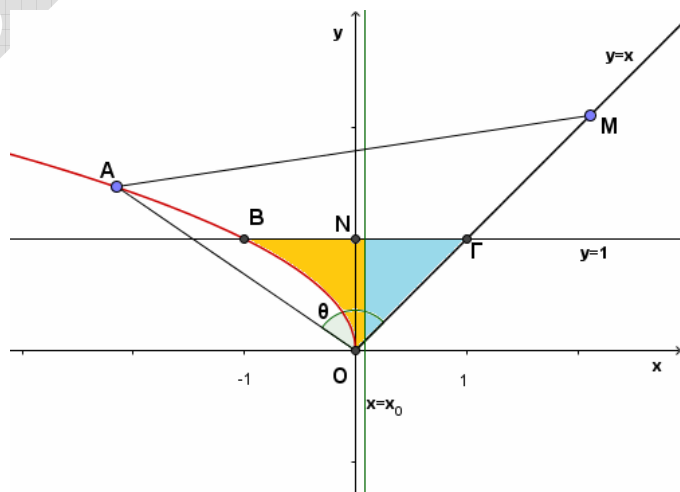
$x'x$ γωνία $\widehat{xOM} = \frac{\pi}{4}$ και η ευθεία OA

έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{OA} = \varepsilon\varphi\left(\theta(t) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{-\alpha(t)}}{\alpha(t)} = -\frac{1}{\sqrt{-\alpha(t)}}$$

Άρα είναι:

$$\left[\varepsilon\varphi\left(\theta(t) + \frac{\pi}{4}\right) \right]' = \left(-\frac{1}{\sqrt{-\alpha(t)}} \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\left(\theta(t) + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \theta'(t) = \frac{(\sqrt{-\alpha(t)})'}{-\alpha(t)} \Leftrightarrow$$



$$\frac{\theta'(t)}{\sin^2\left(\theta(t) + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\alpha'(t)}{2\sqrt{-\alpha(t)}} \stackrel{\alpha'(t)=-\alpha(t)}{\Leftrightarrow} \frac{\theta'(t)}{\sin^2\left(\theta(t) + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{2\sqrt{-\alpha(t)}} \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{-\alpha(t)}} \cdot \sin^2\left(\theta(t) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$(OA) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2(t_0) + (\sqrt{-\alpha(t_0)})^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha^2(t_0) - \alpha(t_0) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(t_0) = -1 \text{ (δεκτή)} \quad \text{ή} \quad \alpha(t_0) = 2 \text{ (απορρίπτεται), αφού } \alpha(t_0) < 0$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 είναι $A(-1, 1)$, δηλαδή το σημείο A ανήκει στην ευθεία $y = -x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$

Επομένως είναι $\theta(t_0) = \widehat{AOM} = \frac{\pi}{2}$ και από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\theta'(t_0) = \frac{-1}{2\sqrt{-\alpha(t_0)}} \cdot \sin^2\left(\theta(t_0) + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sin^2\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \text{ rad / μονάδα χρόνου.}$$

2^{ος} Τρόπος

Είναι:

$$\overline{OM} = (x, x), \quad \overline{OA} = (\alpha, \sqrt{-\alpha}) \quad \text{και} \quad \overline{AM} = (x - \alpha, x - \sqrt{-\alpha})$$

$$(OM) = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x, \quad (OA) = \sqrt{\alpha^2 + (\sqrt{-\alpha})^2} = \sqrt{\alpha^2 - \alpha} \quad \text{και} \quad (AM) = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (x - \sqrt{-\alpha})^2}$$

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$(AM)^2 = (OM)^2 + (OA)^2 - 2(OM)(OA)\cos\theta, \text{ οπότε}$$

$$(x - \alpha)^2 + (x - \sqrt{-\alpha})^2 = 2x^2 + \alpha^2 - \alpha - 2\sqrt{2}x\sqrt{\alpha^2 - \alpha}\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + x^2 - 2x\sqrt{-\alpha} + (-\alpha) = 2x^2 + \alpha^2 - \alpha - 2\sqrt{2}x\sqrt{\alpha^2 - \alpha}\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$-2x\alpha - 2x\sqrt{-\alpha} = -2\sqrt{2}x\sqrt{\alpha^2 - \alpha}\cos\theta \Leftrightarrow \alpha + \sqrt{-\alpha} = \sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 - \alpha}\cos\theta$$

Την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

$$\alpha(t) + \sqrt{-\alpha(t)} = \sqrt{2}\sqrt{\alpha(t)^2 - \alpha(t)}\cos\theta(t)$$

Οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$\left(\alpha(t) + \sqrt{-\alpha(t)}\right)' = \left(\sqrt{2}\sqrt{\alpha(t)^2 - \alpha(t)}\cos\theta(t)\right)' \Leftrightarrow$$

$$\alpha'(t) + \frac{-\alpha'(t)}{2\sqrt{-\alpha(t)}} = \sqrt{2} \cdot \frac{2\alpha(t)\alpha'(t) - \alpha'(t)}{2\sqrt{\alpha(t)^2 - \alpha(t)}} \cos\theta(t) - \sqrt{2}\sqrt{\alpha(t)^2 - \alpha(t)} \eta\mu\theta(t)\theta'(t) \stackrel{\alpha'(t)=-\alpha(t)}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha(t) + \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{-\alpha(t)}} = \sqrt{2} \cdot \frac{-2\alpha^2(t) + \alpha(t)}{2\sqrt{\alpha(t)^2 - \alpha(t)}} \cos\theta(t) - \sqrt{2}\sqrt{\alpha(t)^2 - \alpha(t)} \eta\mu\theta(t)\theta'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$-\alpha(t_0) + \frac{\alpha(t_0)}{2\sqrt{-\alpha(t_0)}} = \sqrt{2} \cdot \frac{-2\alpha^2(t_0) + \alpha(t_0)}{2\sqrt{\alpha^2(t_0) - \alpha(t_0)}} \sin\theta(t_0) - \sqrt{2}\sqrt{\alpha^2(t_0) - \alpha(t_0)} \eta\mu\theta(t_0)\theta'(t_0) \quad (2)$$

Όμως τη χρονική στιγμή t_0 είναι $(OA) = \sqrt{2}$, οπότε έχουμε:

$$\sqrt{\alpha^2(t_0) - \alpha(t_0)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha^2(t_0) - \alpha(t_0) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(t_0) = -1 \text{ δεκτή ή } \alpha(t_0) = 2 \text{ απορρίπτεται, αφού } \alpha(t_0) < 0$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 είναι $A(-1, 1)$, δηλαδή το σημείο A ανήκει στην ευθεία $y = -x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$

$$\text{Επομένως είναι } \theta(t_0) = \widehat{AOM} = \frac{\pi}{2}$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 από τη σχέση (2) έχουμε:

$$1 + \frac{-1}{2\sqrt{1}} = \sqrt{2} \cdot \frac{-2-1}{2\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \eta\mu\frac{\pi}{2}\theta'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = -2 \cdot \theta'(t_0) \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1}{4} \text{ rad / μονάδα χρόνου.}$$

Σημείωση

Στον 2^ο Τρόπο αντί του νόμου των συνημιτόνων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον

$$\text{Τύπο: } \sin\theta = \frac{\overline{OM} \cdot \overline{OA}}{|\overline{OM}| \cdot |\overline{OA}|}$$

ii) Είναι:

$$y = \alpha'(t_0) = -\alpha(t_0) = 1$$

Αν η ευθεία $y=1$ τέμνει την C_f στο σημείο B , τον άξονα $y'y$ στο σημείο N και την ευθεία $y=x$ στο σημείο Γ , τότε είναι $E(\Omega) = E_1 + E_2$, όπου E_1 το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου OBN και E_2 το εμβαδόν του τριγώνου $ON\Gamma$.

$$E_1 = \int_{-1}^0 (1 - \sqrt{-x}) dx = 1 + \int_{-1}^0 \sqrt{-x} (-x)' dx = 1 + \frac{2}{3} \left[(-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 = 1 + \frac{2}{3} (0 - 1) = \frac{1}{3} \text{ και}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (ON)(N\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Άρα

$$E(\Omega) = E_1 + E_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

iii) Έστω $x = x_0$ η ζητούμενη ευθεία. Είναι $E_1 < E_2$, οπότε $x_0 \in (0, 1)$

Θέλουμε:

$$\int_{x_0}^1 (1-x) dx = \frac{E(\Omega)}{2} \Leftrightarrow \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^1 = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} - x_0 + \frac{x_0^2}{2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - x_0 + \frac{x_0^2}{2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 6x_0^2 - 12x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 + \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ απορ. ή } x_0 = 1 - \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ δεκτή,}$$

αφού $x_0 \in (0, 1)$

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(e^x + 1) = x + e^x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.

δ) Να υπολογίσετε το $f(e^2 + 1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1) - 1 = f^{-1}(e^2 + 3)$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $e^x + 1 = t \Leftrightarrow e^x = t - 1 \Leftrightarrow x = \ln(t - 1)$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$f(t) = \ln(t-1) + t, \quad t \in (1, +\infty)$$

Επομένως:

$$f(x) = \ln(x-1) + x, \quad x \in (1, +\infty)$$

β) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}(x-1)' + 1 = \frac{1}{x-1} + 1 > 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, \text{ αφού}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

γ) Για $x, y \in (1, +\infty)$ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f(f^{-1}(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln(x-1) + x & (2) \\ x = \ln(y-1) + y & (3) \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$y - x = \ln(x-1) + x - \ln(y-1) - y \Leftrightarrow \ln(x-1) + 2x = \ln(y-1) + 2y \Leftrightarrow h(x) = h(y) \quad (4),$$

όπου $h(t) = \ln(t-1) + 2t$, $t \in (1, +\infty)$

Για κάθε $t \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$h'(t) = \frac{1}{t-1}(t-1)' + 2 = \frac{1}{t-1} + 2 > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι και « 1 - 1 », οπότε από τη σχέση (4) προκύπτει $y = x$ (5)

Λύνουμε λοιπόν το σύστημα των εξισώσεων (2) και (5):

$$\begin{cases} y = \ln(x-1) + x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(x-1) + x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(2, 2)$

δ) Είναι:

$$f(e^2+1) = \ln(e^2+1-1) + e^2+1 = \ln e^2 + e^2+1 = 2\ln e + e^2+1 = e^2+3$$

Άρα

$$f^{-1}(e^2+3) = e^2+1$$

Έχουμε:

$$f^{-1}(x+1) - 1 = f^{-1}(e^2+3) \Leftrightarrow f^{-1}(x+1) - 1 = e^2+1 \Leftrightarrow f^{-1}(x+1) = e^2+2 \Leftrightarrow$$

$$x+1 = f(e^2+2) \Leftrightarrow x+1 = \ln(e^2+2-1) + e^2+2 \Leftrightarrow x = \ln(e^2+1) + e^2+1$$

ε) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A_f = (1, +\infty)$ και σύνολο τιμών $f(A_f) = \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών $f^{-1}(A_{f^{-1}}) = (1, +\infty)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x \leq 1$ και δεδομένου ότι $f^{-1}(x) \in (1, +\infty)$, δηλαδή $f^{-1}(x) > 1$ η ανίσωση $f^{-1}(x) > x$ αληθεύει.
- Αν $x > 1$, τότε έχουμε:

$$f^{-1}(x) > x \stackrel{f \square}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x > 1 \\ f(f^{-1}(x)) > f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \ln(x-1) + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ \ln(x-1) < \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 1] \cup (1, 2) = (-\infty, 2)$

ΘΕΜΑ 4ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)} + e^{f(x)+1} + f(x) - 2e^2 = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $e^\xi + e = (2e^2 - \xi)e^{-\xi}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x$ και να αποδείξετε ότι $f(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

Έστω ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ (2)

Είναι:

$$\begin{cases} 2f(x_1) \geq 2f(x_2) \\ f(x_1)+1 \geq f(x_2)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{2f(x_1)} \geq e^{2f(x_2)} & (3) \\ e^{f(x_1)+1} \geq e^{f(x_2)+1} & (4) \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2), (3) και (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{2f(x_1)} + e^{f(x_1)+1} + f(x_1) &\geq e^{2f(x_2)} + e^{f(x_2)+1} + f(x_2) \Leftrightarrow \\ e^{2f(x_1)} + e^{f(x_1)+1} + f(x_1) - 2e^2 &\geq e^{2f(x_2)} + e^{f(x_2)+1} + f(x_2) - 2e^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 \geq x_2 \end{aligned}$$

που είναι άτοπο

Επομένως για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{2x} + e^{x+1} + x - 2e^2$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = 2e^{2x} + e^{x+1} + 1$ (5)

Είναι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $g(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ ισχύει $g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι «1-1», άρα αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$f^{-1}(y) = e^{2y} + e^{y+1} + y - 2e^2, \quad y \in \mathbb{R}$$

Οπότε:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = e^{2x} + e^{x+1} + x - 2e^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) Είναι:

f^{-1} συνεχής στο $[0, 1]$, $f^{-1}(1) = 1 > 0$ και

$f^{-1}(0) = -2e^2 + e + 1 = (1-e)(2e+1) < 0$,

οπότε

$$f^{-1}(1) \cdot f^{-1}(0) < 0$$

Άρα η συνάρτηση f^{-1} ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$ επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f^{-1}(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{2\xi} + e^{\xi+1} + \xi - 2e^2 = 0 \Leftrightarrow e^{2\xi} + e^{\xi+1} = 2e^2 - \xi \Leftrightarrow e^\xi(e^\xi + e) = 2e^2 - \xi \Leftrightarrow e^\xi + e = (2e^2 - \xi)e^{-\xi}$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(f^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \quad (6)$$

Θέτουμε $y = f^{-1}(x) > 0$. Όταν $x \rightarrow 1$ και το $y \rightarrow 1$, οπότε από τη σχέση (6) προκύπτει:

$$\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 1 = f(1), \text{ αφού } f^{-1}(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) \leq x \Leftrightarrow x \leq f^{-1}(x) \Leftrightarrow x \leq e^{2x} + e^{x+1} + x - 2e^2 \Leftrightarrow e^{2x} + e^{x+1} - 2e^2 \geq 0$$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και έχουμε:

$$y^2 + ey - 2e^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y - e)(y + 2e) \geq 0 \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y - e \geq 0 \Leftrightarrow y \geq e$$

Άρα $y \geq e$, οπότε έχουμε $e^x \geq e \Leftrightarrow x \geq 1$

Είναι:

$$x \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq 0,$$

διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(1) = 1$, αφού $f^{-1}(1) = 1$

ΘΕΜΑ 5ο :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x \ln x - x}$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x} = \kappa$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x \cdot f(x) dx = \frac{e-1}{e}$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (e^{-1}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = \frac{e - e^{-1}}{e - 1}$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$f'(x) = (e^{x \ln x - x})' = e^{x \ln x - x} (x \ln x - x)' = f(x)(\ln x + 1 - 1) = f(x) \ln x \quad (1)$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$		\swarrow e^{-1} \searrow Ελάχιστο	

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = e^{-1}$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f''(x) = (f(x) \cdot \ln x)' = f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x} \stackrel{(1)}{=} f(x) (\ln x)^2 + f(x) \frac{1}{x} = f(x) \left((\ln x)^2 + \frac{1}{x} \right) > 0$$

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β) Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x^x e^{-x} = \kappa \Leftrightarrow \ln(x^x e^{-x}) = \ln \kappa \Leftrightarrow x \ln x - x = \ln \kappa \Leftrightarrow e^{x \ln x - x} = \kappa \Leftrightarrow f(x) = \kappa$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x - x} = e^0 = 1$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x - x} \stackrel{u = x \ln x - x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln x - 1) = +\infty$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ♦ Αν $\kappa < e^{-1}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ είναι αδύνατη.
- ♦ Αν $\kappa = e^{-1}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει: ακριβώς μία λύση την $x = 1$, αφού $f(1) = e^{-1}$ και $f(x) > e^{-1}$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
- ♦ Αν $e^{-1} < \kappa < 1$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς:
 - ο μία λύση στο $(0, 1)$, αφού $f((0, 1)) = (e^{-1}, 1)$ και
 - ο μία λύση στο $(1, +\infty)$, αφού $f((1, +\infty)) = (e^{-1}, +\infty)$
- ♦ Αν $\kappa \geq 1$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει:
 - μία λύση στο $(1, +\infty)$, αφού $f((1, +\infty)) = (e^{-1}, +\infty)$

γ) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_1^e \ln x f(x) dx = \int_1^e f'(x) dx = [f(x)]_1^e = \left[e^{x \ln x - x} \right]_1^e = e^{e \ln e - e} - e^{-1} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

δ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[e^{-1}, 1]$ και $[1, e]$ με παράγωγο $f'(x) = f(x)\ln x$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα αυτά, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (e^{-1}, 1)$ και $\xi_2 \in (1, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(e^{-1})}{1 - e^{-1}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 = \frac{f(1) - f(e^{-1})}{\frac{e-1}{e}} \Leftrightarrow \frac{e-1}{e} \cdot f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 = f(1) - f(e^{-1}) \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Leftrightarrow (e-1) \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = f(e) - f(1) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{e-1}{e} \cdot f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + (e-1) \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = f(1) - f(e^{-1}) + f(e) - f(1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{e-1}{e} \cdot f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + (e-1) \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = f(e) - f(e^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{e-1}{e} \cdot f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + (e-1) \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = e^{\ln e - e} - e^{e^{-1} \ln e^{-1} - e^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e-1}{e} \cdot f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e \cdot (e-1) \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = 1 - e^{-2e^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$(e-1) \cdot f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e \cdot (e-1) \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = e - e^{1-2e^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$

ΘΕΜΑ 6ο :

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f''(x) \cdot e^{-x} - (f'(x))^2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $2f'(0) + 1 = 0$ και
- $f(0) = \ln 2$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) + 1 = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2f(x) + x \geq \ln 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

στ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x) \cdot e^{-x} = (f'(x))^2 \Rightarrow \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = e^x \Rightarrow \left(\frac{-1}{f'(x)} \right)' = (e^x)' \Rightarrow \frac{-1}{f'(x)} = e^x + c, x \in \mathbb{R},$$

αφού

$$f''(x) \neq 0 \Rightarrow f''(x) \cdot e^{-x} \neq 0 \Rightarrow (f'(x))^2 \neq 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε: } \frac{-1}{f'(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 + c \Leftrightarrow c = 1, \text{ οπότε}$$

$$\frac{-1}{f'(x)} = e^x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) + 1 = \frac{-1}{e^x + 1} + 1 \Rightarrow f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x + 1} \Rightarrow (f(x) + x)' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} \Rightarrow (f(x) + x)' = (\ln(e^x + 1))' \Rightarrow$$

$$f(x) + x = \ln(e^x + 1) + c_1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε: } f(0) + 0 = \ln(e^0 + 1) + c_1 \Leftrightarrow \ln 2 = \ln 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ οπότε}$$

$$f(x) + x = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x + 1) - x, x \in \mathbb{R}$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x + 1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επίσης, έχουμε:

$$f''(x) \cdot e^{-x} = (f'(x))^2 \Leftrightarrow f''(x) = e^x \cdot (f'(x))^2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή.

δ) 1^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2f(x) + x - \ln 4$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h'(x) = (2f(x) + x - \ln 4)' = 2f'(x) + 1 = 2 \cdot \frac{-1}{e^x + 1} + 1 = \frac{e^x - 1}{1 + e^x}$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$			

Ελάχιστο

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $h(0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2f(x) + x - \ln 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2f(x) + x \geq \ln 4$$

2^{ος} τρόπος

Η f είναι κυρτή, άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ βρίσκεται από τη C_f και «κάτω».

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - \ln 2 = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) + x \geq 2\ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) + x \geq \ln 4$$

ε) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε για τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών της θα βρούμε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + e^x)) \stackrel{u=1+e^x}{=} \lim_{u \rightarrow 1} (\ln u) = \ln 1 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + 1) - \ln e^x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x + 1}{e^x} \right) \stackrel{u=\frac{e^x+1}{e^x}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} (\ln u) = 0, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

στ) Έστω η εξίσωση $y = f(x)$, όπου $y \in f(\mathbb{R})$. Έχουμε:

$$y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x} \Leftrightarrow e^y = \frac{e^x + 1}{e^x} \Leftrightarrow e^y \cdot e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x (e^y - 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{1}{e^y - 1} \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} x = \ln \frac{1}{e^y - 1} \Leftrightarrow x = -\ln(e^y - 1)$$

Δηλαδή, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ως προς $x \in \mathbb{R}$ μοναδική λύση την $x = -\ln(e^y - 1)$ για κάθε $y > 0$, οπότε η f είναι «1-1», επομένως αντιστρέφεται με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

Άρα έχουμε $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$

Έχουμε:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) \stackrel{u=e^x-1}{=} -\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) \stackrel{u=e^x-1}{=} -\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = -\infty$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(α) > 0$ και $f(β) > 0$. Αν υπάρχει $\gamma \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(α, β)$
 β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $2\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$
 γ) Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (α, β)$ με $\kappa \neq \lambda$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda) < 0$
 δ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$

ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[α, \gamma]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[α, \gamma]$ ως παραγωγίσιμη.
- $f(α)f(\gamma) < 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[α, \gamma]$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(α, \gamma)$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον λύση και στο διάστημα $(\gamma, β)$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(α, β)$

β) Θέτουμε στην προς απόδειξη σχέση όπου ξ το x και έχουμε:

$$2xf(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2}f(x) + e^{x^2}f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2}f(x))' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{x^2}f(x)$, στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ όπου ρ_1, ρ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Για τη συνάρτηση h ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο $h'(x) = 2xe^{x^2}f(x) + e^{x^2}f'(x)$
- $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (α, β)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi e^{\xi^2}f(\xi) + e^{\xi^2}f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi^2}(2\xi f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Leftrightarrow 2\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

γ) Στα διαστήματα $[α, \gamma]$ και $[\gamma, β]$, για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

$$\blacklozenge \kappa \in (α, \gamma) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\kappa) = \frac{f(\gamma) - f(α)}{\gamma - α} < 0 \text{ και}$$

$$\blacklozenge \lambda \in (\gamma, β) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\lambda) = \frac{f(β) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} > 0$$

αφού $f(α) > 0$, $f(β) > 0$ και $f(\gamma) < 0$, (βλέπε και (α) ερώτημα), επομένως $f'(\kappa)f'(\lambda) < 0$

δ) Είναι:

$$f'(κ) = \lim_{x \rightarrow \kappa^+} \frac{f(x) - f(\kappa)}{x - \kappa} < 0, \text{ άρα για } x \in (\kappa, \kappa + \delta_1), \delta_1 > 0, \text{ ισχύει:}$$

$$\frac{f(x) - f(\kappa)}{x - \kappa} < 0 \stackrel{x > \kappa}{\Rightarrow} f(x) - f(\kappa) < 0 \Rightarrow f(x) < f(\kappa) \quad (1)$$

Είναι:

$$f'(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \lambda^-} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} > 0, \text{ άρα για } x \in (\lambda - \delta_2, \lambda), \delta_2 > 0, \text{ ισχύει:}$$

$$\frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} > 0 \stackrel{x < \lambda}{\Rightarrow} f(x) - f(\lambda) < 0 \Rightarrow f(x) < f(\lambda) \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ελάχιστο στο κ ούτε στο λ . Δεδομένου όμως ότι η f είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$ θα έχει σίγουρα ελάχιστο στο διάστημα αυτό. Αφού λοιπόν δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα άκρα του διαστήματος θα το παρουσιάζει σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[\kappa, \lambda]$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f' διατηρεί πρόσημο στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η f' δεν διατηρεί πρόσημο στο Δ , τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f'(x_1)f'(x_2) < 0$. Άρα σύμφωνα με το (δ) ερώτημα του προηγούμενου θέματος, θα υπάρξει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, που είναι άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$

ΘΕΜΑ 8ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$, $x > 0$

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να βρείτε την παράγωγό της.

β) Να βρείτε:

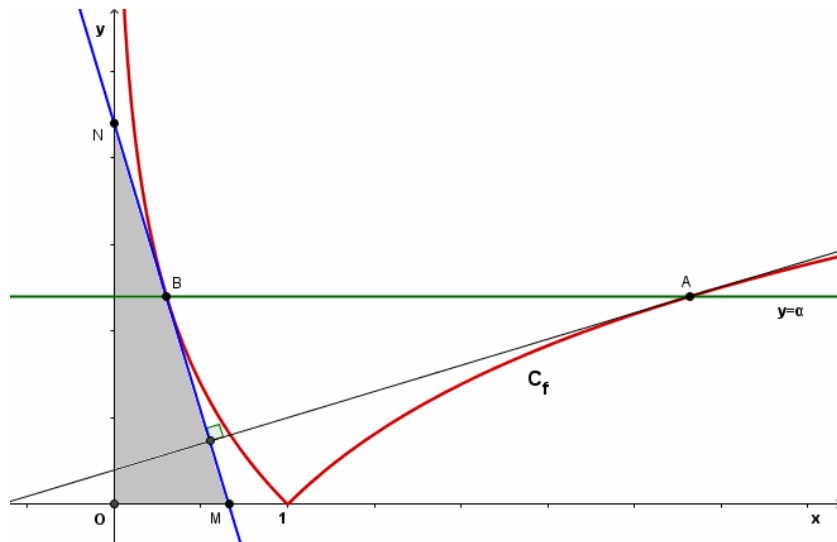
i) Τα κοινά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της C_f με την ευθεία $y = a$, $a > 0$

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_A και ε_B της C_f στα σημεία της $A(e^a, a)$ και $B(e^{-a}, a)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $a > 0$

γ) Έστω M και N τα σημεία τομής της ευθείας ε_B με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου OMN γίνεται μέγιστο, η ευθεία ε_A διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από το τμήμα της γραφικής παράστασης της $\ln x$, με $x \geq 1$ και το συμμετρικό ως προς τον άξονα $x'x$ τμήμα της γραφικής παράστασης της $\ln x$, με $0 < x < 1$ που βρίσκεται κάτω από αυτόν. Η C_f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η συνάρτηση γράφεται $f(x) = \begin{cases} \ln x & , x \geq 1 \\ -\ln x & , 0 < x < 1 \end{cases}$ και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, +\infty)$

με $f'(x) = \frac{1}{x}$ και στο διάστημα $(0, 1)$ με $f'(x) = -\frac{1}{x}$

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

- Για $x > 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - 0}{x - 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

- Για $0 < x < 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\ln x - 0}{x - 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = -1$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Επομένως:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x > 1 \\ -\frac{1}{x} & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

β) i) Λύνουμε τα συστήματα: $\begin{cases} y = \ln x \\ y = \alpha \end{cases}, x \geq 1$ και $\begin{cases} y = -\ln x \\ y = \alpha \end{cases}, 0 < x < 1$

- $\begin{cases} y = \ln x \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^\alpha \\ y = \alpha \end{cases}$ Άρα $A(e^\alpha, \alpha)$

- $\begin{cases} y = -\ln x \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x^{-1} \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x^{-1} = \alpha \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1} = e^\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-\alpha} \\ y = \alpha \end{cases}$ Άρα $B(e^{-\alpha}, \alpha)$

ii) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο A είναι:

$$\varepsilon_A: y - f(e^a) = f'(e^a)(x - e^a) \Leftrightarrow y - \alpha = \frac{1}{e^a}(x - e^a) \Leftrightarrow y = e^{-a}x - 1 + \alpha$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο B είναι:

$$\varepsilon_B: y - f(e^{-a}) = f'(e^{-a})(x - e^{-a}) \Leftrightarrow y - \alpha = -\frac{1}{e^{-a}}(x - e^{-a}) \Leftrightarrow y = -e^a x + 1 + \alpha$$

Είναι:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = e^{-a} \cdot (-e^a) = -e^0 = -1, \text{ οπότε } \varepsilon_A \perp \varepsilon_B$$

γ) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ε_B με τους άξονες.

Για $x = 0$ είναι $y = 1 + \alpha$ και για $y = 0$ είναι $x = \frac{1 + \alpha}{e^a}$. Άρα η ε_B τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $M\left(\frac{1 + \alpha}{e^a}, 0\right)$ και τον άξονα $y'y$ στο $N(0, 1 + \alpha)$, $\alpha > 0$

Το εμβαδόν του τριγώνου OMN είναι:

$$E = \frac{1}{2}(OM)(ON) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \alpha}{e^a} \cdot (1 + \alpha) = \frac{(1 + \alpha)^2}{2e^a}, \alpha > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{(1+x)^2}{2e^x}, x > 0$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g'(x) = \frac{2(1+x) \cdot 2e^x - 2e^x(1+x)^2}{4e^{2x}} = \frac{2(1+x) - (1+x)^2}{2e^x} = \frac{1-x^2}{2e^x}$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ($x > 0$)
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ ($x > 0$)

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		↗ $2e^{-1}$ ↘		

Μέγιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, επομένως το εμβαδόν του τριγώνου OMN μεγιστοποιείται για $\alpha = 1$

Για $\alpha = 1$ η ε_A γίνεται $y = e^{-1}x$, άρα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 9ο :

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση :

$$\bullet f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R}

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$, για κάθε $x > 0$

ε) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε και η $f(x) - e^{-f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$(f(x) - e^{-f(x)})' = (x - 1)' \Leftrightarrow f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

β) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(0)=0$, δηλαδή η $x=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και έχει μοναδική ρίζα την $x=0$, συμπεραίνουμε ότι:

- για $x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$ και
- για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$

Συνεπώς για το πρόσημο της συνάρτησης f ισχύει :

$$\begin{cases} f(x) < 0, & x \in (-\infty, 0) \\ f(x) = 0, & x = 0 \\ f(x) > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , οπότε και η συνάρτηση $\frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη

στο \mathbb{R} . Άρα η συνάρτηση $f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , δηλαδή η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} \right)' = \frac{(e^{f(x)})' \cdot (1 + e^{f(x)}) - e^{f(x)} \cdot (1 + e^{f(x)})'}{(1 + e^{f(x)})^2} \\ &= \frac{e^{f(x)} f'(x) \cdot (1 + e^{f(x)}) - e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} = \frac{e^{f(x)}}{(1 + e^{f(x)})^2} \cdot f'(x) > 0, \end{aligned}$$

αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R}

δ) Θα αποδείξουμε ότι : $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) < x$, για κάθε $x > 0$

Η συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο $[0, x]$
- παραγωγίσιμη στο $(0, x)$

Επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[0, x]$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \quad (2)$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R} , άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε για:

$$0 < \xi < x \Rightarrow f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow \frac{x}{2} < f(x) < x f'(x), \quad x > 0$$

Θα αποδείξουμε ότι: $x f'(x) < x$, για $x > 0$

Πράγματι, από τη σχέση (1) έχουμε ότι $f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} < \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}} = 1 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x f'(x) < x$

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) < x$$

ε) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\frac{x}{2} < f(x) < x \Leftrightarrow -\frac{x}{2} > -f(x) > -x \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} > e^{-f(x)} > e^{-x}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = 0$ (3)

1^{ος} τρόπος

Είναι:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \Leftrightarrow f(x) - (x - 1) = e^{-f(x)},$$

οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} \stackrel{(3)}{=} 0$$

Άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

2^{ος} τρόπος

Από την αρχική σχέση έχουμε $f(x) = e^{-f(x)} + x - 1$, οπότε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-f(x)} + x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot e^{-f(x)} + 1 - \frac{1}{x} \right) \stackrel{(3)}{=} 0 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) \stackrel{\text{υπόθεση}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + e^{-f(x)} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + e^{-f(x)}) = -1 + 0 = -1$$

Άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

ΘΕΜΑ 10ο :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^2 x) - 1}{\eta\mu x}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2016x) - 1}{x} = 4032f'(0)$

β) Αν επιπλέον για την f ισχύει $f^2(x) - 8f(x) = x^2 - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

γ) Αν $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx < \frac{22}{5}$

ΛΥΣΗ

α) i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^2 x) - 1}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^2 x) - f(0)}{\eta\mu x} \stackrel{\eta\mu x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u^2) - f(0)}{u^2} \cdot u = f'(0) \cdot 0 = 0,$

διότι $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u^2) - f(0)}{u^2} \stackrel{t = u^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2016x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(2016x) - 1)(f(2016x) + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(2016x) - f(0))(f(2016x) + 1)}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2016(f(2016x) - f(0))(f(2016x) + 1)}{2016x} = 2016f'(0)(f(0) + 1) = 2016f'(0) \cdot (1 + 1) = 4032f'(0),$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2016x) - f(0)}{2016x} \stackrel{2016x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u} = f'(0)$ και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f^2(x) - 8f(x) = x^2 - 7 \Leftrightarrow f^2(x) - 8f(x) + 16 = x^2 - 7 + 16 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 4)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + 9 \quad (1), \text{ όπου } g(x) = f(x) - 4, x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 9 > 0$, οπότε $g^2(x) > 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$

Η συνάρτηση g λοιπόν είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο \mathbb{R} , οπότε διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R}

Επιπλέον έχουμε $f(0) = 1$, οπότε είναι $g(0) = f(0) - 4 = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

οπότε $g(x) = -\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) - 4 = -\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$

γ) i) Για $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x} - \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x} + \frac{x}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x} + \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \right) = 0 + 1 = 1 = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - \sqrt{x^2 + 9} - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((4 - x) - \sqrt{x^2 + 9}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4 - x)^2 - (x^2 + 9)}{(4 - x) + \sqrt{x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16 - 8x + x^2 - x^2 - 9}{4 - x + \sqrt{x^2 + 9}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x + 7}{4 - x + |x| \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-8 + \frac{7}{x} \right)}{4 - x - x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-8 + \frac{7}{x} \right)}{x \left(\frac{4}{x} - 1 - \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8 + \frac{7}{x}}{\frac{4}{x} - 1 - \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = \frac{-8}{-2} = 4 = \beta \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = x + 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4 - \sqrt{x^2 + 9})' = 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot (x^2 + 9)' = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \\ f''(x) &= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right)' = -\frac{x' \cdot \sqrt{x^2 + 9} - x \cdot (\sqrt{x^2 + 9})'}{x^2 + 9} = -\frac{\sqrt{x^2 + 9} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}}{x^2 + 9} = \\ &= -\frac{x^2 + 9 - x^2}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}} = -\frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}} < 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο \mathbb{R} .

iii) Έστω $N(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο N είναι:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (4 - \sqrt{x_0^2 + 9}) = \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + 9}}(x - x_0) \quad (1)$$

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο B οι συντεταγμένες του B θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\begin{aligned} 3 - (4 - \sqrt{x_0^2 + 9}) &= \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + 9}}(-1 - x_0) \Leftrightarrow -1 + \sqrt{x_0^2 + 9} = \frac{x_0^2 + x_0}{\sqrt{x_0^2 + 9}} \Leftrightarrow \\ -\sqrt{x_0^2 + 9} + x_0^2 + 9 &= x_0^2 + x_0 \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + 9} = 9 - x_0 \quad (2) \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $9 - x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 > 9$ η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.
- Αν $9 - x_0 \geq 0 \Leftrightarrow x_0 \leq 9$ η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$x_0^2 + 9 = (9 - x_0)^2 \Leftrightarrow x_0^2 + 9 = 81 - 18x_0 + x_0^2 \Leftrightarrow 18x_0 = 72 \Leftrightarrow x_0 = 4 \quad (\text{δεκτή})$$

Επομένως η ζητούμενη ευθεία ε έχει εξίσωση:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y + 1 = -\frac{4}{5}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$$

iv) Επειδή η συνάρτηση f είναι κοίλη στο \mathbb{R} , η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι από την εφαπτομένη και «κάτω», δηλαδή ισχύει:

$$f(x) \leq -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5} \Leftrightarrow f(x) + \frac{4}{5}x - \frac{11}{5} \leq 0$$

και το «ίσον» ισχύει μόνο για $x=4$ (τετμημένη σημείου επαφής), επομένως δεν είναι πουθενά μηδέν στο διάστημα $[-1, 1]$, οπότε έχουμε:

$$\int_{-1}^1 \left(f(x) + \frac{4}{5}x - \frac{11}{5} \right) dx < 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 \frac{4}{5}x dx - \int_{-1}^1 \frac{11}{5} dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx < -\int_{-1}^1 \frac{4}{5}x dx + \int_{-1}^1 \frac{11}{5} dx \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx < -\frac{4}{5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{11}{5} (1 - (-1)) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx < -\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{11}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx < \frac{22}{5}$$

ΘΕΜΑ 11ο :

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln x - 1 = 0$, με $x > 1$ έχει ακριβώς μία λύση.

B. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) = x \ln x (f(x) - f'(x))$ για κάθε $x > 1$ και
- $f(e) = e^e$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Αν $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x > 1$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ii) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = f(x) + x \ln x \cdot f'(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=\alpha$

με $\alpha > 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(E(\alpha) \cdot \eta\mu \frac{1}{E(\alpha)} \right)$

ΛΥΣΗ

A. 1^{ος} Τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x \ln x - 1$, $x \in (1, +\infty)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $h'(x) = (x \ln x - 1)' = \ln x + 1$

Για κάθε $x > 1$ είναι $h'(x) > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Επίσης η συνάρτηση h είναι και συνεχής στο $(1, +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$h((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-1, +\infty), \text{ αφού}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x - 1) = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - 1) = +\infty$$

Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της h άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$, η οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα.

2^{ος} Τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x \ln x - 1$, $x \in (1, +\infty)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $h'(x) = (x \ln x - 1)' = \ln x + 1$

Για κάθε $x > 1$ είναι $h'(x) > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x - 1) = -1 < 0, \text{ οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής } (1, \alpha) \text{ τέτοιο, ώστε } h(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, \alpha), \text{ οπότε } h(\kappa) < 0 \text{ για } \kappa \in (1, \alpha)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - 1) = +\infty, \text{ οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής } (\beta, +\infty) \text{ με } \beta > \alpha \text{ τέτοιο, ώστε } h(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (\beta, +\infty), \text{ οπότε } h(\lambda) > 0 \text{ για } \lambda \in (\beta, +\infty)$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$ και $h(\kappa) \cdot h(\lambda) < 0$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa, \lambda) \subseteq (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \ln \xi - 1 = 0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

Επομένως η εξίσωση $x \ln x - 1 = 0$, με $x > 1$ έχει ακριβώς μία λύση.

B. α) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = x \ln x \quad (f(x) - f'(x)) \Rightarrow f(x) + x \ln x f'(x) = x \ln x f(x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} f(x) + \ln x f'(x) = \ln x f(x) \Rightarrow (\ln x f(x))' = \ln x f(x) \Rightarrow \ln x f(x) = c e^x$$

Για $x = e$ είναι $\ln e f(e) = c e^e \Leftrightarrow e^e = c e^e \Leftrightarrow c = 1$, οπότε έχουμε:

$$\ln x f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{\ln x}, \quad x \in (1, +\infty)$$

β) Έχουμε $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{\ln x} \right)' = \frac{e^x \ln x - e^x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x (x \ln x - 1)}{x (\ln x)^2} = \frac{e^x h(x)}{x (\ln x)^2}, \quad x > 1$$

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ και έχει μοναδική ρίζα την $\xi \in (\kappa, \lambda) \subseteq (1, +\infty)$, οπότε έχουμε:

$$\blacklozenge \text{ για } 1 < x < \xi \Rightarrow h(x) < h(\xi) \Rightarrow h(x) < 0 \text{ και}$$

$$\blacklozenge \text{ για } x > \xi \Rightarrow h(x) > h(\xi) \Rightarrow h(x) > 0$$

Επίσης είναι $e^x > 0$ και $x(\ln x)^2 > 0$, οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	1	ξ	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		↔ $f(\xi)$ ↔	

Ελάχιστο

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(e^x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \cdot x) = +\infty$

ii) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x) = x \ln x \cdot f(x) - x \ln x \cdot f'(x) \Leftrightarrow f(x) + x \ln x \cdot f'(x) = x \ln x \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x \ln x \cdot f(x) \Leftrightarrow g(x) = x \ln x \cdot \frac{e^x}{\ln x} \Leftrightarrow g(x) = x e^x > 0$$

Είναι:

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \int_2^\alpha g(x) dx = \int_2^\alpha x e^x dx = \int_2^\alpha x (e^x)' dx = [x e^x]_2^\alpha - \int_2^\alpha (x)' e^x dx = \\ &= \alpha e^\alpha - 2e^2 - \int_2^\alpha e^x dx = \alpha e^\alpha - 2e^2 - [e^x]_2^\alpha = \alpha e^\alpha - 2e^2 - (e^\alpha - e^2) = (\alpha - 1)e^\alpha - e^2 \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [(\alpha - 1)e^\alpha - e^2] = +\infty$, αφού $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^\alpha = +\infty$ και $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\alpha - 1) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha = +\infty$

$$\text{Επομένως } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(E(\alpha) \cdot \eta\mu \frac{1}{E(\alpha)} \right)^{u=E(\alpha)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(u \cdot \eta\mu \frac{1}{u} \right)^{\frac{1}{u}=t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1$$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 2e)$. Αν η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0 + 1, 2e^{x_0})$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + e^{2-x}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha} + \frac{f(2x)}{x-\beta} = 2016$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο

διάστημα (α, β)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και την ευθεία $y = e^2 + 1$

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$

ΛΥΣΗ

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αφού η (ε) διέρχεται από το σημείο A , επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου αυτού.

Επομένως έχουμε:

$$2e^{x_0} - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0 + 1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$2e^{x_0} - f(x_0) = f'(x_0) \Leftrightarrow 2e^{x_0} = f'(x_0) + f(x_0) \quad (1)$$

Θέτουμε στην (1) όπου x_0 το x , αφού η (1) ισχύει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$2e^x = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(e^x f(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow e^x f(x) = e^{2x} + c$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$e \cdot f(1) = e^2 + c \Leftrightarrow 2e^2 = e^2 + c \Leftrightarrow c = e^2$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$e^x f(x) = e^{2x} + e^2 \Leftrightarrow f(x) = e^x + e^{2-x}, x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = e^x - e^{2-x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{2-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{2-x} \Leftrightarrow x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e^{2-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{2-x} \Leftrightarrow x > 2 - x \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘ $2e$ ↗		
		Ελάχιστο		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = 2e$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{2-x}) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{2-x}) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} = 0$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι: $f(\mathbb{R}) = [2e, +\infty)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha, \beta\}$ είναι:

$$\frac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha} + \frac{f(2x)}{x-\beta} = 2016 \Leftrightarrow (x-\beta)f(\alpha-2x) + (x-\alpha)f(2x) = 2016(x-\alpha)(x-\beta) \Leftrightarrow$$

$$(x-\beta)f(\alpha-2x) + (x-\alpha)f(2x) - 2016(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-\beta)f(\alpha-2x) + (x-\alpha)f(2x) - 2016(x-\alpha)(x-\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$

Για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ $g(\alpha) \cdot g(\beta) = (\alpha - \beta)f(-\alpha) \cdot (\beta - \alpha)f(2\beta) = -(\alpha - \beta)^2 f(-\alpha)f(2\beta) < 0$, αφού $f(-\alpha) > 0$ και $f(2\beta) > 0$, όπως προκύπτει από το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi - \beta)f(\alpha - 2\xi) + (\xi - \alpha)f(2\xi) - 2016(\xi - \alpha)(\xi - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\xi - \beta)f(\alpha - 2\xi) + (\xi - \alpha)f(2\xi) = 2016(\xi - \alpha)(\xi - \beta) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha - 2\xi)}{\xi - \alpha} + \frac{f(2\xi)}{\xi - \beta} = 2016$$

Επομένως η εξίσωση $\frac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha} + \frac{f(2x)}{x-\beta} = 2016$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α, β)

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = e^2 + 1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + e^{2-x} = e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + \frac{e^2}{e^x} = e^2 + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - (e^2 + 1)e^x + e^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 - (e^2 + 1)\omega + e^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = e^2 \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ή } e^x = e^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Είναι:

$$f(x) \leq e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + e^{2-x} \leq e^2 + 1 \Leftrightarrow e^x + \frac{e^2}{e^x} \leq e^2 + 1 \Leftrightarrow e^{2x} - (e^2 + 1)e^x + e^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 - (e^2 + 1)\omega + e^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \omega \leq e^2 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e^2 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και την ευθεία $y = e^2 + 1$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^2 |e^2 + 1 - f(x)| dx = \int_0^2 (e^2 + 1 - (e^x + e^{2-x})) dx = \int_0^2 (e^2 + 1) dx - \int_0^2 e^x dx - \int_0^2 e^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 (e^2 + 1) dx - \int_0^2 e^x dx + \int_0^2 e^{2-x} (2-x)' dx = (e^2 + 1)(2 - 0) - [e^x]_0^2 + [e^{2-x}]_0^2 =$$

$$= 2(e^2 + 1) - (e^2 - e^0) + (e^0 - e^2) = 2e^2 + 2 - e^2 + 1 + 1 - e^2 = 4$$

ε) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(1+x_0) = f(1-x_0)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x_0

Πράγματι:

$$f(1+x_0) = e^{1+x_0} + e^{2-1-x_0} = e^{1+x_0} + e^{1-x_0} \quad \text{και}$$

$$f(1-x_0) = e^{1-x_0} + e^{2-1+x_0} = e^{1-x_0} + e^{1+x_0}$$

ΘΕΜΑ 13ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{2}$ και $g(x) = \frac{x^2 \ln x}{e^{2x}}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -\ln(\rho_1 \rho_2)$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} Τρόπος:

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = (1-x)' \ln x + (1-x)(\ln x)' = -\ln x + \frac{1-x}{x} = -\left(\ln x + \frac{x-1}{x}\right)$$

- Αν $x \in (0, 1)$ είναι $\ln x < 0$ και $\frac{x-1}{x} < 0$, οπότε $f'(x) > 0$
- Αν $x \in (1, +\infty)$ είναι $\ln x > 0$ και $\frac{x-1}{x} > 0$, οπότε $f'(x) < 0$
- Αν $x = 1$ είναι $f'(x) = 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow

Μέγιστο

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ με μέγιστη τιμή $f(1) = \frac{1}{2}$

2^{ος} Τρόπος:

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = (1-x)' \ln x + (1-x)(\ln x)' = -\ln x + \frac{1-x}{x} = -\ln x + \frac{1}{x} - 1$$

Προφανής λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι η $x = 1$ και επειδή $f''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$ η συνάρτηση

η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Είναι:

- Αν $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$
- Αν $x > 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$
- Αν $x = 1$ είναι $f'(x) = 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{1}{2}$	

Μέγιστο

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ με μέγιστη τιμή $f(1) = \frac{1}{2}$

β) 1^{ος} Τρόπος:

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1-x)\ln x + \frac{1}{2} \right) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = 1 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$, άρα θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \alpha)$, οπότε $f(\kappa) < 0$ για $\kappa \in (0, \alpha)$
- $f(1) = \frac{1}{2} > 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa, 1]$ και $f(\kappa) \cdot f(1) < 0$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1 \in (\kappa, 1) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό στο διάστημα αυτό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1)$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((1-x)\ln x + \frac{1}{2} \right) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$, άρα θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\beta, +\infty)$ με $\beta > \alpha$ τέτοιο, ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\beta, +\infty)$, οπότε $f(\lambda) < 0$ για $\lambda \in (\beta, +\infty)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, \lambda]$ και $f(1) \cdot f(\lambda) < 0$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (1, \lambda) \subseteq (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_2) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό στο διάστημα αυτό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες τις $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$

2^{ος} Τρόπος:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1)$, επομένως είναι:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right), \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

Το $0 \in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ_1 στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$, επομένως είναι:

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right), \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Το $0 \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ_2 στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο ρίζες, τις $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$

γ) Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\rho_1, 1]$ ισχύουν:

- ◆ Είναι συνεχής στο $[\rho_1, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ◆ Είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, 1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\rho_1, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(\rho_1)}{1 - \rho_1} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - \rho_1} = \frac{1}{2(1 - \rho_1)} \quad (1)$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[1, \rho_2]$ ισχύουν:

- ◆ Είναι συνεχής στο $[1, \rho_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ◆ Είναι παραγωγίσιμη στο $(1, \rho_2)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\rho_2) - f(1)}{\rho_2 - 1} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{\rho_2 - 1} = \frac{1}{2(1 - \rho_2)} \quad (2)$$

Είναι:

- $f(\rho_1) = 0 \Rightarrow (1 - \rho_1) \ln \rho_1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (1 - \rho_1) \ln \rho_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2(1 - \rho_1)} = -\ln \rho_1$ και
- $f(\rho_2) = 0 \Rightarrow (1 - \rho_2) \ln \rho_2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (1 - \rho_2) \ln \rho_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2(1 - \rho_2)} = -\ln \rho_2$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{1}{2(1 - \rho_1)} + \frac{1}{2(1 - \rho_2)} = -\ln \rho_1 - \ln \rho_2 = -(\ln \rho_1 + \ln \rho_2) = -\ln(\rho_1 \rho_2)$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$g'(x) = \left(\frac{x^2 \ln x}{e^{2x}} \right)' = \frac{(2x \ln x + x)e^{2x} - 2e^{2x} x^2 \ln x}{(e^{2x})^2} = \frac{2x \ln x + x - 2x^2 \ln x}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{x(2 \ln x + 1 - 2x \ln x)}{e^{2x}} = \frac{2x \left((1-x) \ln x + \frac{1}{2} \right)}{e^{2x}} = \frac{2x f(x)}{e^{2x}}$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho_1$ ή $x = \rho_2$ και
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x f(x)}{e^{2x}} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x \in (\rho_1, \rho_2)$

αφού:

$$0 < x < \rho_1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) < f(\rho_1) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$\rho_1 < x \leq 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(\rho_1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$1 \leq x < \rho_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) > f(\rho_2) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x > \rho_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) < f(\rho_2) \Rightarrow f(x) < 0$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	ρ_1	ρ_2	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$		\swarrow	\nearrow	\swarrow		
		T.E.		T.M.		

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο ρ_1 και ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο ρ_2

ΘΕΜΑ 14ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = 4f(x) + 32x^2 - 16x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{4x} - 8x^2$, $x \in \mathbf{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $4f(2x) < 3f(x) + f(5x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

δ) Να αποδείξετε ότι $(e^2 - 2)\ln 2 < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt < (e^4 - 8)\ln 2$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt - (x-1)(3f(x) + f(5x) - 4f(2x)) = (e^{4x} - 2)\ln 4x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 4f(x) + 32x^2 - 16x \Rightarrow f'(x) + 16x = 4f(x) + 32x^2 \Rightarrow$$

$$(f(x) + 8x^2)' = 4(f(x) + 8x^2) \Rightarrow g'(x) = 4g(x) \quad (1), \text{ όπου } g(x) = f(x) + 8x^2 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με e^{-4x} , οπότε έχουμε:

$$g'(x)e^{-4x} = 4e^{-4x}g(x) \Rightarrow g'(x)e^{-4x} - 4e^{-4x}g(x) = 0 \Rightarrow$$

$$g'(x)e^{-4x} + (e^{-4x})'g(x) = 0 \Rightarrow (g(x)e^{-4x})' = 0 \Rightarrow g(x)e^{-4x} = c \Rightarrow g(x) = ce^{4x} \quad (3)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε $g(0) = f(0) + 8 \cdot 0^2 = f(0) = 1$

Για $x = 0$ από τη σχέση (3) έχουμε $g(0) = ce^0 \Leftrightarrow c = 1$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = e^{4x}$ (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{4x} = f(x) + 8x^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{4x} - 8x^2$

Επομένως:

$$f(x) = e^{4x} - 8x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ ισχύει $\ln \alpha \leq \alpha - 1$ (6)

Αν στη σχέση (6) θέσουμε όπου α το e^{4x} , είναι $e^{4x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε:

$$\ln e^{4x} \leq e^{4x} - 1 \Leftrightarrow 4x \leq e^{4x} - 1 \Leftrightarrow e^{4x} - 4x \geq 1, \text{ οπότε } e^{4x} - 4x > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f'(x) = 4(e^{4x} - 4x) \stackrel{(7)}{\Rightarrow} f'(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

γ) Έστω τυχαίο $x > 0$, τότε είναι $0 < x < 2x < 5x$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x, 2x]$ ισχύουν:

- ◆ Είναι συνεχής στο $[x, 2x]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ◆ Είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = (e^{4x} - 8x^2)' = e^{4x}(4x)' - 16x = 4e^{4x} - 16x \quad (5)$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 2x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[2x, 5x]$ ισχύουν:

- ◆ Είναι συνεχής στο $[2x, 5x]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ◆ Είναι παραγωγίσιμη στο $(2x, 5x)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = (e^{4x} - 8x^2)' = e^{4x}(4x)' - 16x = 4e^{4x} - 16x$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2x, 5x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5x) - f(2x)}{5x - 2x} = \frac{f(5x) - f(2x)}{3x}$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f''(x) = (4e^{4x} - 16x)' = 4e^{4x}(4x)' - 16 = 16e^{4x} - 16 = 16(e^{4x} - 1) > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Επειδή $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$ και $\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(2x) - f(x)}{x} < \frac{f(5x) - f(2x)}{3x} \xrightarrow{x > 0}$

$$f(2x) - f(x) < \frac{f(5x) - f(2x)}{3} \Rightarrow 3f(2x) - 3f(x) < f(5x) - f(2x) \Rightarrow 4f(2x) < 3f(x) + f(5x)$$

δ) Για κάθε $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ισχύει:

$$\frac{1}{2} < t \leq 1 \xrightarrow{f' \uparrow} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(t) \leq f(1) \Rightarrow e^2 - 2 \leq f(t) \leq e^4 - 8 \xrightarrow{t > 0} \frac{e^2 - 2}{t} \leq \frac{f(t)}{t} \leq \frac{e^4 - 8}{t}$$

Το «ίσον» δεν ισχύει παντού στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, οπότε είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^2 - 2}{t} dt < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^4 - 8}{t} dt \Rightarrow (e^2 - 2) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} dt < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt < (e^4 - 8) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} dt \quad (8)$$

Είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} dt = \left[\ln|t| \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - (\ln 1 - \ln 2) = \ln 2$$

Άρα από τη σχέση (8) έχουμε:

$$(e^2 - 2)\ln 2 < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt < (e^4 - 8)\ln 2$$

ε) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$2x \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt - (x-1)(3f(x) + f(5x) - 4f(2x)) - (e^{4x} - 2)\ln 4x = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0,$$

όπου

$$\varphi(x) = 2x \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt - (x-1)(3f(x) + f(5x) - 4f(2x)) - (e^{4x} - 2)\ln 4x, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Είναι:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \left(3f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) - 4f(1) \right) - (e^2 - 2)\ln 2 \quad (9)$$

Από το ερώτημα (δ) είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt > (e^2 - 2)\ln 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt - (e^2 - 2)\ln 2 > 0$$

και από το ερώτημα (γ) για $x = \frac{1}{2}$ είναι:

$$4f(1) < 3f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow 3f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) - 4f(1) > 0,$$

οπότε από τη σχέση (9) έχουμε:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

Είναι:

$$\varphi(1) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt - (e^4 - 2)\ln 4 \quad (10)$$

Από το ερώτημα (δ) είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt < (e^4 - 8)\ln 2 < (e^4 - 2)\ln 2 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt - (e^4 - 2)\ln 2 < 0,$$

οπότε από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\varphi(1) < 0$$

Για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ισχύουν:

- ◆ Είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- ◆ $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\varphi(1) < 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, άρα η

εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

ΘΕΜΑ 15ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 0$
- $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$

β) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

δ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f

ε) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2ex^2 \ln|x| = a$ έχει 4 διαφορετικές ρίζες.

ΛΥΣΗ

α) Για $x = y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε $f(1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) - 1 - 1 + 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$ (2)

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1 - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 1} \right) \stackrel{(2)}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 1 = f'(1) - 1 = 0$$

Άρα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow f'(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 1$$

β) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1 \quad (1)$$

Θεωρώντας το x ως μεταβλητή παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$(f(yx))' = (y^2 f(x) + x^2 f(y) - x^2 - y^2 + 1)' \Leftrightarrow f'(yx) \cdot y = y^2 f'(x) + 2xf(y) - 2x$$

Για $x = 1$ από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$y \cdot f'(y) = y^2 f'(1) + 2 \cdot 1 \cdot f(y) - 2 \cdot 1 \Leftrightarrow y \cdot f'(y) = y^2 + 2f(y) - 2$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}^*$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$xf'(x) = x^2 + 2f(x) - 2 \Leftrightarrow xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$xf'(x) - 2f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = x^3 - 2x \Rightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(\ln|x| - 2 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right)' \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(\ln|x| + \frac{1}{x^2} \right)' \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} \ln|x| + \frac{1}{x^2} + c_1, & x < 0 \\ \ln|x| + \frac{1}{x^2} + c_2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1 + c_1 x^2, & x < 0 \\ x^2 \ln|x| + 1 + c_2 x^2, & x > 0 \end{cases}$$

(αφού οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ. ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων)

Η συνάρτηση f ορίζεται και στο 0, αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R} , οπότε έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1 + c_1 x^2, & x < 0 \\ f(0), & x = 0 \\ x^2 \ln|x| + 1 + c_2 x^2, & x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (5) έχουμε $f(1) = 1^2 \cdot \ln 1 + 1 + c_2 \cdot 1^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 1 = 0 + 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Για $x=y=-1$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(1) = (-1)^2 \cdot f(-1) + (-1)^2 \cdot f(-1) - (-1)^2 - (-1)^2 + 1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 1 = 2f(-1) - 1 \Leftrightarrow f(-1) = 1 \quad (6)$$

Για $x=y=-1$ από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f(-1) = (-1)^2 \cdot \ln 1 + 1 + c_2 \cdot (-1)^2 \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} 1 = 0 + 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$\text{Άρα έχουμε } f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x < 0 \\ f(0), & x = 0 \\ x^2 \ln|x| + 1, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, οπότε έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln|x| + 1) \Rightarrow f(0) = 0 + 1 \Rightarrow f(0) = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{x^{-2}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln|x|)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0$$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f'(x) = (x^2 \ln|x| + 1)' = 2x \ln|x| + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln|x| + x = x(2 \ln|x| + 1)$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln|x| + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm e^{-\frac{1}{2}}$ και
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(2 \ln|x| + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{και} & 2 \ln|x| + 1 > 0 \\ x < 0 & \text{και} & 2 \ln|x| + 1 < 0 \end{cases}$

- Αν $x > 0$ τότε είναι $\ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$
- Αν $x < 0$ τότε είναι $\ln(-x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -x < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > -e^{\frac{1}{2}}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$-e^{\frac{1}{2}}$	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +		- 0 +	
$f(x)$		\nearrow		\searrow	
		T.E.	T.M.	T.E.	

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα σημεία $x_1 = -e^{\frac{1}{2}}$ και $x_3 = e^{\frac{1}{2}}$ με τιμή $f\left(\pm e^{\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \ln e^{\frac{1}{2}} + 1 = 1 - \frac{1}{2e}$ τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_2 = 0$ με τιμή $f(0) = 1$

ε) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 \ln|x| + 1) = +\infty$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$2ex^2 \ln|x| = \alpha \Leftrightarrow x^2 \ln|x| = \frac{\alpha}{2e} \Leftrightarrow x^2 \ln|x| + 1 = \frac{\alpha}{2e} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\alpha}{2e} + 1 \quad (7) \text{ με } x \neq 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (7) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της ευθείας $\varepsilon: y = \frac{\alpha}{2e} + 1$, που είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$. Η εξίσωση (7) έχει 4 διαφορετικές ρίζες αν και μόνο αν η ευθεία (ε) τέμνει την C_f σε 4 διαφορετικά σημεία, δηλαδή αν και μόνο αν

$$1 - \frac{1}{2e} < \frac{\alpha}{2e} + 1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2e} < \frac{\alpha}{2e} < 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 0$$

Άρα η εξίσωση $2ex^2 \ln|x| = \alpha$ έχει 4 διαφορετικές ρίζες όταν $\alpha \in (-1, 0)$

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$
- $4f^2(x) - 4xf(x) = \alpha x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\beta > \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(1) < 0$ να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + x + \beta}}{2}$

ii) Η εξίσωση $10xf(x) = 3\eta\mu(\pi x) - 3x + 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, +\infty)$

ΛΥΣΗ

α) Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$4f^2(x) - 4xf(x) = \alpha x + \beta \Leftrightarrow \frac{4}{x}f^2(x) - 4f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x} \quad (1)$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x}f^2(x) - 4f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{x} \right) \Rightarrow$$

$$0 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = \alpha + 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

β) Για $\alpha = 1$ η δοθείσα σχέση γράφεται $4f^2(x) - 4xf(x) = x + \beta$ (2)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , οπότε τα μέλη της ισότητας (2) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, επομένως έχουμε:

$$\left(4f^2(x) - 4xf(x) \right)' = (x + \beta)' \Leftrightarrow 8f(x)f'(x) - 4f(x) - 4xf'(x) = 1 \quad (3)$$

Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του \mathbb{R} και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 (αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}), άρα από Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(x_0) = 0$

Για $x = x_0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$8f(x_0)f'(x_0) - 4f(x_0) - 4x_0f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 8f(x_0) \cdot 0 - 4f(x_0) - 4x_0 \cdot 0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = -\frac{1}{4} \quad (4)$$

Για $x = x_0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$4f^2(x_0) - 4x_0f(x_0) = x_0 + \beta \stackrel{(4)}{\Rightarrow} 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^2 - 4x_0 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = x_0 + \beta \Rightarrow \frac{1}{4} + x_0 = x_0 + \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

που είναι άτοπο αφού $\beta > \frac{1}{4}$. Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

γ) i) Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$4f^2(x) - 4xf(x) = x + \beta \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) + x^2 = x^2 + x + \beta \Leftrightarrow$$

$$(2f(x) - x)^2 = x^2 + x + \beta \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + x + \beta \quad (5), \text{ όπου } g(x) = 2f(x) - x \quad (6)$$

Το τριώνυμο $x^2 + x + \beta$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 4\beta < 0$, αφού $\beta > \frac{1}{4}$, άρα $x^2 + x + \beta > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g^2(x) > 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση g είναι συνεχής στο \mathbb{R} , επομένως διατηρεί πρόσημο στο \mathbb{R} με $g(1) = 2f(1) - 1 < 0$, αφού $f(1) < 0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) < 0$ οπότε από τη σχέση (5) έχουμε $g(x) = -\sqrt{x^2 + x + \beta} \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow}$

$$2f(x) - x = -\sqrt{x^2 + x + \beta} \Leftrightarrow 2f(x) = x - \sqrt{x^2 + x + \beta} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + x + \beta}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

ii) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=10xf(x)-3\eta\mu(\pi x)+3x-4$, $x\in[1,+\infty)$

Είναι:

- $h(1)=10f(1)-3\eta\mu\pi+3-4=10f(1)-1 < 0$, αφού $f(1) < 0$

- Για $x\in[1,+\infty)$ είναι $h(x)=x\left(10f(x)-\frac{3}{x}\eta\mu(\pi x)+3-\frac{4}{x}\right)$ (7)

Έχουμε:

$$\left|\frac{3}{x}\eta\mu(\pi x)\right|=\frac{3}{|x|}\cdot|\eta\mu(\pi x)|\leq\frac{3}{|x|}\Rightarrow-\frac{3}{|x|}\leq\frac{3}{x}\eta\mu(\pi x)\leq\frac{3}{|x|}\Rightarrow-\frac{3}{x}\leq\frac{3}{x}\eta\mu(\pi x)\leq\frac{3}{x}$$

Είναι $\lim_{x\rightarrow+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{3}{x}=0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\rightarrow+\infty}\left(\frac{3}{x}\eta\mu(\pi x)\right)=0$

Επίσης είναι $\lim_{x\rightarrow+\infty}f(x)=-\frac{1}{4}$, οπότε

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}\left(10f(x)-\frac{3}{x}\eta\mu(\pi x)+3-\frac{4}{x}\right)=10\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-0+3-0=\frac{1}{2}$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$\lim_{x\rightarrow+\infty}h(x)=\lim_{x\rightarrow+\infty}\left[x\left(10f(x)-\frac{3}{x}\eta\mu(\pi x)+3-\frac{4}{x}\right)\right]=+\infty, \text{ οπότε θα υπάρχει διάστημα της}$$

μορφής $(\gamma,+\infty)$ με $\gamma > 1$ τέτοιο, ώστε $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (\gamma,+\infty)$, οπότε $h(\lambda) > 0$ για $\lambda \in (\gamma,+\infty)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, \lambda]$, αφού η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1, \lambda]$ και $h(1)h(\lambda) < 0$. Άρα θα υπάρχει ένα $\rho \in (1, \lambda) \subseteq (1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$

Δηλαδή η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 17ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}(x^3-x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και το σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f είναι συνευθειακά.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x^2}(x^3-x) \right)' = (e^{x^2})'(x^3-x) + e^{x^2}(x^3-x)' = \\ &= 2xe^{x^2}(x^3-x) + e^{x^2}(3x^2-1) = e^{x^2}(2x^4+x^2-1), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Έχουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(2x^4 + x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 + x^2 - 1 = 0$, διότι $e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 $\stackrel{x^2=y \geq 0}{\Leftrightarrow} 2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(y = \frac{1}{2} \text{ δεκτή ή } y = -1 \text{ (απορρίπτεται, διότι } y \geq 0) \right)$

Είναι $y = \frac{1}{2}$, οπότε έχουμε:

$$x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(2x^4 + x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 2x^4 + x^2 - 1 > 0$, διότι $e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 $\stackrel{x^2=y \geq 0}{\Leftrightarrow} 2y^2 + y - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(y > \frac{1}{2} \text{ δεκτή ή } y < -1 \text{ (απορρίπτεται, διότι } y \geq 0) \right)$

Είναι $y > \frac{1}{2}$, οπότε έχουμε:

$$x^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		T.M.	T.E.		

Επομένως:

- ♦ Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f'(x) > 0$ στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f'(x) < 0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f'(x) > 0$ στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

♦ Η συνάρτηση f παρουσιάζει για:

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ τοπικό μέγιστο το } f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}e}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ τοπικό ελάχιστο το } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{\sqrt{2}e}{4}$$

β) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{x^2} (2x^4 + x^2 - 1) \right)' = (e^{x^2})' (2x^4 + x^2 - 1) + e^{x^2} (2x^4 + x^2 - 1)' = \\ &= 2xe^{x^2} (2x^4 + x^2 - 1) + e^{x^2} (8x^3 + 2x) = 2xe^{x^2} (2x^4 + 5x^2) = 2x^3 e^{x^2} (2x^2 + 5), x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 e^{x^2} (2x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, διότι $2e^{x^2} (2x^2 + 5) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^3 e^{x^2} (2x^2 + 5) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$, διότι $2e^{x^2} (2x^2 + 5) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	\cap		\cup

Σ.Κ.

Είναι:

- ♦ Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$
- ♦ Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $O(0, f(0))$, δηλαδή το $O(0, 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ) Οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f είναι:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε } A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}e}{4}\right) \text{ και } B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}e}{4}\right)$$

Το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι το $O(0, 0)$

Είναι:

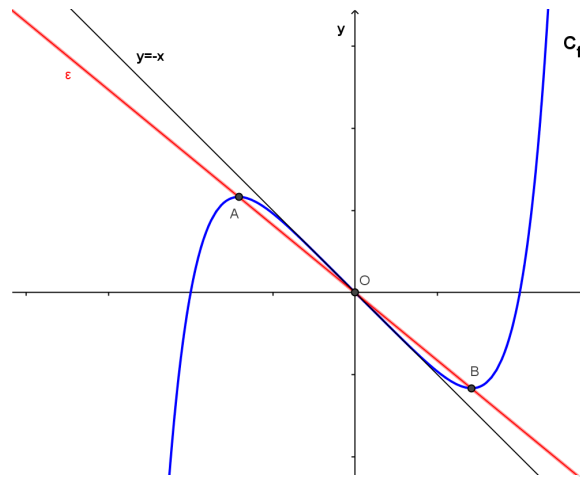
$$\blacksquare \lambda_{\overline{OA}} = \frac{\frac{\sqrt{2}e}{4}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{e}}{2} \quad \text{και} \quad \blacksquare \lambda_{\overline{OB}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}e}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{e}}{2}$$

Δηλαδή:

$$\lambda_{\overline{OA}} = \lambda_{\overline{OB}}, \text{ οπότε } \overline{OA} \parallel \overline{OB}$$

Άρα τα σημεία A, O, B είναι συνευθειακά.

Σημείωση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την ισοδυναμία: $\overline{OA} \parallel \overline{OB} \Leftrightarrow \det(\overline{OA}, \overline{OB}) = 0$

**δ) 1^{ος} Τρόπος:**

Η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο καμψής της $O(0,0)$, διότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = -1$

Η εξίσωση $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει προφανή ρίζα το 0

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f(x) > -x,$$

διότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, άρα η εφαπτομένη βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $(0, +\infty)$

Για κάθε $x < 0$ είναι:

$$f(x) < -x,$$

διότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, άρα η εφαπτομένη βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $(-\infty, 0)$

Άρα η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα το 0

2^{ος} Τρόπος: Υπόδειξη

Είναι:

$$f(x) = -x \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3 - x) = -x \Leftrightarrow x(e^{x^2}(x^2 - 1) + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

διότι η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{x^2}(x^2 - 1) + 1$, $x \in \mathbb{R}$ για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $\varphi(0) = 0$

ε) Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2}(x^3 - x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και ισχύει:

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in [-1, 0] \text{ και } f(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

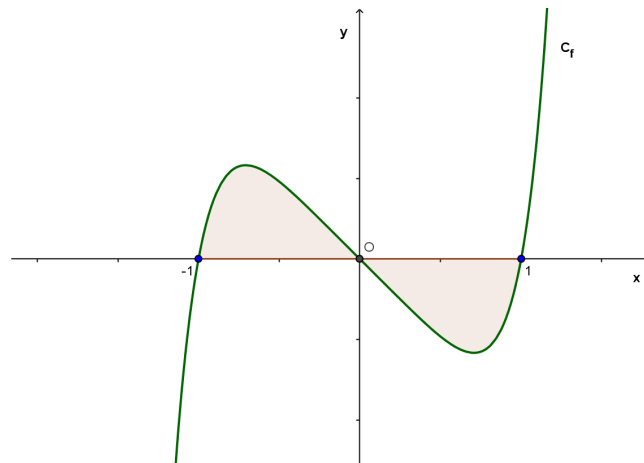
$$E = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 -f(x) dx = -2 \int_0^1 f(x) dx,$$

διότι για το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 f(x) dx$, $\left(\begin{array}{l} \text{Θέτουμε : } x = -u, \text{ τότε } dx = (-u)' du = -du \\ \text{Για } x = -1 \text{ είναι } u = 1 \text{ και για } x = 0 \text{ είναι } u = 0 \end{array} \right)$

και έχουμε:

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_1^0 f(-u) du = \int_0^1 f(-u) du = - \int_0^1 f(u) du = - \int_0^1 f(x) dx,$$

επειδή $f(-u) = -f(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$



Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 E &= -2 \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 2xe^{x^2} (x^2 - 1) dx = - \int_0^1 (e^{x^2})' (x^2 - 1) dx = \\
 &= - \left[e^{x^2} (x^2 - 1) \right]_0^1 + \int_0^1 e^{x^2} (x^2 - 1)' dx = - \left[e^{x^2} (x^2 - 1) \right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \\
 &= - \left[e^{x^2} (x^2 - 1) \right]_0^1 + \int_0^1 (x^2)' e^{x^2} dx = - \left[e^{x^2} (x^2 - 1) \right]_0^1 + \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \\
 &= - \left[e^{x^2} (x^2 - 1) \right]_0^1 + \left[e^{x^2} \right]_0^1 = -(0 - (-1)) + (e - 1) = e - 2
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $0 \leq f(x) + 16 \leq (x + 1)f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)
- $f(1) = 0$
- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x - x) = f(x^2 - x + 2)$

γ) Να αποδείξετε ότι $(1 + x)f(x) < f(x^2)$ για κάθε $x \in (\rho, 1)$, όπου ρ ρίζα της εξίσωσης του (β) ερωτήματος.

δ) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$, τότε να αποδείξετε ότι $16 < E < 32$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) για $x = -1$ έχουμε:

$$0 \leq f(-1) + 16 \leq 0 \Rightarrow f(-1) + 16 = 0 \Rightarrow f(-1) = -16$$

Από τη σχέση (1) επίσης έχουμε:

$$f(x) \geq -16 = f(-1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Δηλαδή η συνάρτηση f στο εσωτερικό σημείο $x_0 = -1$ του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ελάχιστο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Fermat, οπότε ισχύει $f'(-1) = 0$

Έχουμε:

- Για κάθε $x > -1 \Rightarrow f'(x) > f'(-1) \Rightarrow f'(x) > 0$
Δηλαδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, +\infty)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$
- Για κάθε $x < -1 \Rightarrow f'(x) < f'(-1) \Rightarrow f'(x) < 0$
Δηλαδή είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, -1]$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = -1$ με ελάχιστη τιμή $f(-1) = -16$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$ και θέτοντας όπου x το e^x έχουμε:

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Rightarrow x \leq e^x - 1 \Rightarrow e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$2e^x - x = e^x + (e^x - x) > 0 \quad \text{και} \quad x^2 - x + 2 > 0,$$

οπότε έχουμε:

$$f(2e^x - x) = f(x^2 - x + 2) \Leftrightarrow 2e^x - x = x^2 - x + 2 \quad (3),$$

διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty) \subseteq [-1, +\infty)$ άρα είναι και «1-1»

Από τη σχέση (3) ισοδύναμα έχουμε:

$$2e^x - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(0) \quad (4), \text{ όπου } \varphi(x) = 2e^x - x^2 - 2, x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\varphi'(x) = (2e^x - x^2 - 2)' = 2e^x - 2x = 2(e^x - x) > 0$$

Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και «1-1»

Από τη σχέση (4) έχουμε $\varphi(x) = \varphi(0) \Leftrightarrow x = 0$

γ) Για $\rho = 0$ έχουμε ότι $x \in (0, 1)$. Είναι $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x^2, x]$ με $x \in (0, 1)$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[x^2, x]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο (x^2, x) , αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_1 \in (x^2, x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2} = \frac{f(x) - f(x^2)}{x(1-x)}$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x, 1]$ με $x \in (0, 1)$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[x, 1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_2 \in (x, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \stackrel{f(1)=0}{=} \frac{-f(x)}{1 - x}$$

Είναι:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x^2)}{x(1-x)} < \frac{-f(x)}{1-x} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x^2)}{x} < -f(x) \Rightarrow f(x) - f(x^2) < -xf(x) \Rightarrow (1+x)f(x) < f(x^2)$$

Άρα για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει ότι $(1+x)f(x) < f(x^2)$

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1] \subseteq [-1, +\infty)$, οπότε για κάθε $x \in [-1, 1]$ έχουμε:

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq 0$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ είναι:

$$E = -\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (5)$$

Για τις συνεχείς συναρτήσεις της ανισότητας (1) έχουμε:

- ♦ $f(x) + 16 \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = -1$

Άρα:

$$\int_{-1}^1 (f(x) + 16) dx > 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 16 dx > 0 \Rightarrow -\int_{-1}^1 f(x) dx < 32 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} E < 32 \quad (6)$$

- ♦ $(x+1)f'(x) - f(x) - 16 \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = -1$, διότι $(x+1)f'(x) - f(x) - 16 > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1]$

Πράγματι:

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, x]$ ισχύουν:

Είναι συνεχής στο $[-1, x]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, x)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \stackrel{f(-1) = -16}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x) + 16}{x + 1} \quad (7)$$

Είναι:

$$-1 < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \frac{f(x) + 16}{x + 1} < f'(x) \stackrel{x+1 > 0}{\Rightarrow} f'(x)(x+1) - f(x) - 16 > 0$$

Άρα:

$$\int_{-1}^1 ((x+1)f'(x) - f(x) - 16) dx > 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (x+1)f'(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx - 16 \int_{-1}^1 dx > 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow}$$

$$[(x+1)f(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x+1)'f(x) dx + E - 32 > 0 \Rightarrow [(x+1)f(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(x) dx + E - 32 > 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow}$$

$$(2f(1) - 0) + E + E - 32 > 0 \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} 2E > 32 \Rightarrow E > 16 \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (6) και (8) έχουμε $16 < E < 32$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = -\ln 2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} = 1 + f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $(0, f(0))$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < -\frac{1 + \ln 16}{4}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0)$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

ε) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1)$

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \ln^2\left(\frac{e+1}{2}\right)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$e^{f(x)} = 1 + f'(x) \stackrel{\pm e^{f(x)}}{\Rightarrow} 1 = e^{-f(x)} + e^{-f(x)}f'(x) \Rightarrow$$

$$e^{-f(x)}f'(x) = 1 - e^{-f(x)} \Rightarrow -e^{-f(x)}(-f(x))' = 1 - e^{-f(x)} \Rightarrow$$

$$\left(-e^{-f(x)}\right)' = 1 - e^{-f(x)} \Rightarrow \left(1 - e^{-f(x)}\right)' = 1 - e^{-f(x)} \Rightarrow$$

$$g'(x) = g(x), \text{ όπου } g(x) = 1 - e^{-f(x)}, x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = ce^x \Leftrightarrow 1 - e^{-f(x)} = ce^x$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$1 - e^{-f(0)} = ce^0 \Leftrightarrow 1 - e^{\ln 2} = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1 - 2 \Leftrightarrow c = -1$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} g(x) = -e^x &\Leftrightarrow 1 - e^{-f(x)} = -e^x \Leftrightarrow \\ e^{-f(x)} &= e^x + 1 \Leftrightarrow -f(x) = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow \\ f(x) &= -\ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{e^x + 1} (e^x + 1)' = -\frac{e^x}{e^x + 1} \\ f''(x) &= -\frac{(e^x)' \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \\ &= -\frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο \mathbb{R}

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon: y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - (-\ln 2) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \\ y + \ln 2 &= -\frac{1}{2}x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \ln 2 \end{aligned}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο \mathbb{R} , οπότε η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται από την εφαπτομένη (ε) και «κάτω», δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq -\frac{1}{2}x - \ln 2 \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{2}x + \ln 2 \leq 0$$

και το «ίσον» ισχύει μόνο για $x = 0$ (τετμημένη σημείου επαφής), άρα δεν είναι παντού μηδέν, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(f(x) + \frac{1}{2}x + \ln 2 \right) dx < 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x dx + \int_0^1 \ln 2 dx < 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \ln 2 \cdot (1-0) < 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + \ln 2 < 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4} + \ln 2 < 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \frac{1 + 4 \ln 2}{4} < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < -\frac{1 + \ln 16}{4} \end{aligned}$$

δ) • Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x^2) + f(\ln x) = f(x) + f(0)$ είναι η $x = 1$
• Για $0 < x < 1$ είναι:

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad x^2 < x &\stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x^2) > f(x) \\ \blacklozenge \quad \ln x < \ln 1 &\stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} \ln x < 0 \Rightarrow f(\ln x) > f(0) \end{aligned}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$f(x^2) + f(\ln x) > f(x) + f(0)$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

- Για $x > 1$ είναι:

$$\blacklozenge \quad x^2 > x \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x^2) < f(x)$$

$$\blacklozenge \quad \ln x > \ln 1 \Rightarrow \ln x > 0 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(\ln x) < f(0)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$f(x^2) + f(\ln x) < f(x) + f(0)$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(1, +\infty)$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$

- ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - (\ln(e+1) - \ln 2)x + \ln(e+1)$, $x \in [0, 1]$

- i) Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$$h(0) = f(0) + \ln(e+1) = -\ln 2 + \ln(e+1) = \ln(e+1) - \ln 2 > 0$$

$$h(1) = f(1) - (\ln(e+1) - \ln 2) + \ln(e+1) = \ln 2 - \ln(e+1) < 0$$

Οπότε $h(0)h(1) < 0$. Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις

του Θεωρήματος Bolzano, άρα θα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$

τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$, δηλαδή

$$f(x_0) - (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 + \ln(e+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = (\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1)$$

- ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x_0]$, άρα από Θ.Μ.Τ., θα υπάρχει $\xi_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1) + \ln 2}{x_0} = \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)(x_0 - 1)}{x_0} \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_0, 1]$, άρα από Θ.Μ.Τ., θα υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)x_0 - \ln(e+1) + \ln(e+1)}{x_0 - 1} = \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)x_0}{x_0 - 1} \quad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1)f'(\xi_2) &= \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)(x_0 - 1)}{x_0} \cdot \frac{(\ln(e+1) - \ln 2)x_0}{x_0 - 1} = \\ &= (\ln(e+1) - \ln 2)^2 = \ln^2 \left(\frac{e+1}{2} \right) \end{aligned}$$

