ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2018
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Ε.Μ.Ε.

ΘΕΜΑ 1ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)e^x+1$ και $g(x)=(x\cdot e^x-e^x+1)x$, $x\in R$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται, και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} .

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της

δ) Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$, τότε να αποδείξετε ότι $E(\Omega)<e^2+\frac{3}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\left((x-1)e^x+1\right)'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow xe^x=0\Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow xe^x>0\Leftrightarrow x>0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ελάχιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=0$ με ελάχιστη τιμή $f(0)=0$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι $g(x)=xf(x)$, οπότε $g'(x)=\left(xf(x)\right)'=f(x)+xf'(x)=f(x)+x^2e^x\geq 0$ και το «ίσον» με το μηδέν ισχύει μόνο για $x=0$.
Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Επομένως η συνάρτηση g είναι «1−1», οπότε αντιστρέφεται και η g^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε $g(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x+1\right)x=-\infty$, διότι
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x \overset{-\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)=0$,

    οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x+1\right)=1$ και
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)e^x+1\right)x=+\infty$

Άρα:

$$g(R)=(-\infty\,,+\infty)=R$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g^{-1} είναι το R.

γ) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g''(x)=\left(f(x)+x^2e^x\right)'=f'(x)+\left(x^2e^x\right)'=xe^x+2xe^x+x^2e^x=3xe^x+x^2e^x=x(x+3)e^x$$

Είναι:

- $g''(x)=0 \Leftrightarrow x(x+3)e^x=0 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=0$
- $g''(x)>0 \Leftrightarrow x(x+3)e^x>0 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>0$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

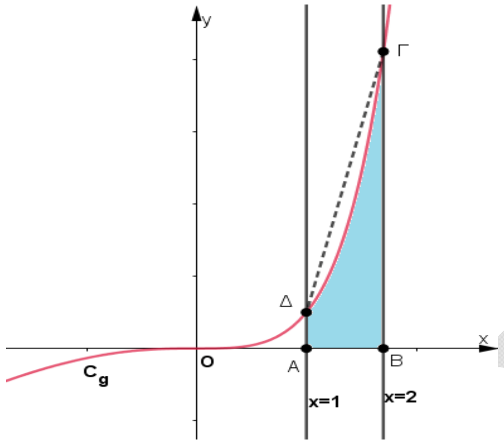
x	$-\infty$	-3		0		$+\infty$
$g''(x)$	+	0	−	0	+	
$g(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$	
		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,-3]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x)>0$ στο $(-\infty,-3)$
- ♦ Η συνάρτηση g είναι κοίλη στο διάστημα $[-3,\ 0]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x)<0$ στο $(-3,\ 0)$
- ♦ Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x)>0$ στο $(0,+\infty)$
- ♦ Η g'' μηδενίζεται στο $x_0=-3$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(-3,g(-3))$, δηλαδή το $(-3\,,12e^{-3}-3)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g
- ♦ Η g'' μηδενίζεται στο $x_0=0$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(0\,,g(0))$, δηλαδή το $(0,\ 0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g

Ε.Μ.Ε.

δ) 1ος τρόπος (με χρήση της γραφικής παράστασης):



Έχουμε:

$E(\Omega)<(AB\Gamma\Delta)$, όπου $AB\Gamma\Delta$ το τραπέζιο με κορυφές τα σημεία:

$A(1,0)$, $B(2,0)$, $\Gamma(2,2e^2+2)$ και $\Delta(1,1)$.

Είναι:

$$(AB\Gamma\Delta)=\frac{A\Delta+B\Gamma}{2}\cdot AB=\frac{1+2e^2+2}{2}\cdot 1=e^2+\frac{3}{2}$$

Άρα $E(\Omega)<e^2+\frac{3}{2}$

2ος τρόπος (με υπολογισμό του αντίστοιχου ολοκληρώματος):

$$E(\Omega)=\int_1^2 g(x)dx=\ldots\ldots$$

ΘΕΜΑ 2ο :

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R^* με

$$f'(x)=\frac{e^x}{3f^2(x)+2f(x)+1},\ x\in R^*$$

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=e^x-1$ για κάθε $x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$ και $\int_0^{x_0} e^x f(x)dx=\frac{23}{12}$

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\frac{1}{f(x)}-3}\,\eta\mu t^2 dt$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$f'(x)=\frac{e^x}{3f^2(x)+2f(x)+1}\Leftrightarrow\left(3f^2(x)+2f(x)+1\right)f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)\right)'=(e^x)'$$

Άρα θα υπάρχουν $c_1,c_2\in R$ τέτοιοι, ώστε:

$$f^3(x)+f^2(x)+f(x)=e^x+c_1 \text{ για κάθε } x>0 \quad (1)$$

και

$$f^3(x)+f^2(x)+f(x)=e^x+c_2 \text{ για κάθε } x<0 \quad (2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R άρα και στο $x_0 = 0$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x + c_1\right) \Rightarrow f^3(0)+f^2(0)+f(0) = e^0 + c_1 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} c_1 = -1$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^x + c_2\right) \Rightarrow f^3(0)+f^2(0)+f(0) = e^0 + c_2 \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} c_2 = -1$$

Οπότε για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f^3(x)+f^2(x)+f(x) = e^x - 1$$

Όμως η παραπάνω σχέση αληθεύει και για $x = 0$

Επομένως για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f^3(x)+f^2(x)+f(x) = e^x - 1 \quad (3)$$

β) Για να είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Από τη σχέση (3) για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f^3(x)+f^2(x)+f(x)}{x} = \frac{e^x-1}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x}\left(f^2(x)+f(x)+1\right) = \frac{e^x-1}{x} \quad (4)$$

Η παράσταση $f^2(x)+f(x)+1$ είναι τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, άρα $f^2(x)+f(x)+1 > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\dfrac{e^x-1}{x}}{f^2(x)+f(x)+1}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0} = \dfrac{d(e^x)}{dx}\Bigg|_{x=0} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)+f(x)+1\right) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f^2(0)+f(0)+1 = 1$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-1}{x}}{f^2(x)+f(x)+1} = \frac{1}{1} = 1$$

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$

γ) Από την αρχική ισότητα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$, οπότε $f(2) > 0$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι $f(2) \le 1$, τότε έχουμε:

$$f(2),\ f^2(2),\ f^3(2) \in (0,1]$$

Οπότε:

$$f^3(2)+f^2(2)+f(2) \le 3 \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} e^2 - 1 \le 3 \Rightarrow e^2 \le 4,$$

που είναι άτοπο.

Άρα $f(2)>1$, οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει $x_o\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=1$
Για το συγκεκριμένο x_o έχουμε:

$$f^3(x_o)+f^2(x_o)+f(x_o)=e^{x_o}-1\Rightarrow e^{x_o}=4\,,\quad (5)$$

Είναι:

$$\int_0^{x_0} e^x f(x)dx=\int_0^{x_0}(e^x)'f(x)dx=\left[e^x f(x)\right]_0^{x_0}-\int_0^{x_0}e^x f'(x)dx \overset{e^x=f^3(x)+f^2(x)+f(x)+1}{=}$$

$$=e^{x_0}f(x_0)-e^0 f(0)-\int_0^{x_0}\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)+1\right)f'(x)dx \underset{f(0)=0}{\overset{f(x_0)=1}{=}}$$

$$=e^{x_0}-\left[\frac{f^4(x)}{4}+\frac{f^3(x)}{3}+\frac{f^2(x)}{2}+f(x)\right]_0^{x_0} \underset{f(0)=0}{\overset{f(x_0)=1}{=}} e^{x_0}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1-0\right)=$$

$$=e^{x_0}-\frac{25}{12}\overset{(5)}{=}4-\frac{25}{12}=\frac{23}{12}$$

δ) Για κάθε $t\in R$ είναι $\left|\eta\mu t^2\right|\le\left|t^2\right|=t^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t=0$

Επομένως για $x>0$ κοντά στο μηδέν και για κάθε $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ έχουμε:

$$0<\eta\mu t^2<t^2\Rightarrow 0<\eta\mu t^2\cdot t^{\frac{1}{f(x)}-3}<t^2\cdot t^{\frac{1}{f(x)}-3}\Rightarrow 0<t^{\frac{1}{f(x)}-3}\eta\mu t^2<t^{\frac{1}{f(x)}-1}$$

Οπότε έχουμε:

$$\int_{\frac12}^{1}0\,dt<\int_{\frac12}^{1}t^{\frac{1}{f(x)}-3}\eta\mu t^2 dt<\int_{\frac12}^{1}t^{\frac{1}{f(x)}-1}dt\Rightarrow 0\left(1-\frac{1}{2}\right)<\int_{\frac12}^{1}t^{\frac{1}{f(x)}-3}\eta\mu t^2 dt<\left[\frac{t^{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{f(x)}}\right]_{\frac12}^{1}\Rightarrow$$

$$0<\int_0^1 t^{\frac{1}{f(x)}-3}\eta\mu t^2 dt<f(x)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right]$$

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)\overset{f\ \text{συνεχής}}{=}f(0)=0\quad\text{και}\quad f(x)>0\ \text{για κάθε}\ x>0,$$

$$\text{οπότε και}\ \lim_{x\to0^+}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right]=1-\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\underset{\substack{\text{για}\ x\to0^+\\ \text{το}\ u\to+\infty}}{\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{=}}1-\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{u}=1-0=1$$

Άρα:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right]=0\cdot1=0$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to0^+}0=0$$

Επομένως, από το Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{x\to0^+}\int_{\frac12}^{1}t^{\frac{1}{f(x)}-3}\eta\mu t^2 dt=0\,\cdot$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{e}{x}+x,\ x>0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

β) i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2e-f(x))>e$

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x-(ex+1)\left(\frac{e}{x}-\frac{1}{e}\right)=2$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right),\ x>0$.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική της παράσταση, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1,\ x=e$

ii) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο $\alpha\in R$ ισχύει $g(x)\le\alpha$ για κάθε $x>0$, τότε $\frac{\alpha}{2}+e\ge 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{e}{x^2}+1 \quad \text{και} \quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2e}{x^3}$$

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f'(x)>0 \quad \text{και} \quad f''(x)<0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $(0,+\infty)$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{e}{x}+x\right)=-\infty$$

οπότε η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{e}{x^2}+1\right)=1$, διότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\ \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)=+\infty$

που δεν είναι πραγματικός αριθμός, άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

β) i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα είναι «1−1», οπότε αντιστρέφεται. Επιπλέον, είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{e}{x}+x\right)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{e}{x}+x\right)=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το R.

ii) Για κάθε $x>0$ είναι $\left(2e-f(x)\right)\in R$, άρα η ανίσωση έχει ως σύνολο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$. Οπότε με $x>0$ έχουμε:

$$f^{-1}(2e-f(x))>e \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 2e-f(x)>f(e)\Leftrightarrow 2e-f(x)>e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)<e\Leftrightarrow f(x)<f(e)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x<e$$

Άρα λύση της ανίσωσης είναι κάθε πραγματικός αριθμός του διαστήματος (0, e).

γ) Με $x>0$ έχουμε:

$$\ln x-(ex+1)\left(\frac{e}{x}-\frac{1}{e}\right)=2\Leftrightarrow \ln x-(ex+1)\frac{e^2-x}{ex}=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-e^2+x-\frac{e}{x}+\frac{1}{e}=2\Leftrightarrow \ln x-\frac{e}{x}+x=2-\frac{1}{e}+e^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(e^2)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x=e^2$$

δ) Είναι:

$$g(x)=\ln x-\frac{e}{x}+x-\ln x-ex+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}-e\left(x+\frac{1}{x}\right)=(1-e)\left(x+\frac{1}{x}\right),\ x>0$$

i) Με $x>0$ είναι $x+\frac{1}{x}>0$ και επειδή $1-e<0$ έχουμε $(1-e)\left(x+\frac{1}{x}\right)<0\Rightarrow g(x)<0$

Επιπλέον η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$, οπότε αν E είναι το ζητούμενο εμβαδόν, τότε έχουμε:

$$E=-\int_1^e (1-e)\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=(e-1)\left[\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e=(e-1)\left(\frac{e^2-1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}(e-1)(e^2+1)$$

ii) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$g'(x)=(1-e)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{(1-e)(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0, 1] και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Επίσης παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$, ίσο με $M=g(1)=2(1-e)$.

Αν για κάποιο $\alpha\in R$ ισχύει $g(x)\le\alpha$ για κάθε $x>0$, τότε προφανώς $\alpha\ge M$ οπότε

$$\alpha\ge M\Rightarrow \alpha\ge 2(1-e)\Rightarrow \frac{\alpha}{2}+e\ge 1$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $f: R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 1 και τα μόνα κοινά σημεία της με τον άξονα x΄x έχουν τετμημένες -2 και 4. Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f\left(-\dfrac{7}{4}\right)$ και τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-0,1)x^3+f(1)x^2+f(2)}{f(-1)f(5)x^2+f(0)}$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^{3x})=f(e^{2x})+f(e^{4x})$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-2,\ 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\sqrt[4]{f^3(-0,1)f(2)}$

ε) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,\ 4)$ ισχύει $\big(f(x)-1\big)f''(x)<0$ να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx<2$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει για ρίζες μόνο τους αριθμούς -2 και 4, οπότε στο διάστημα $(-2,\ 4)$ η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(0)=1$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,\ 4)$ και επειδή $-\dfrac{7}{4}\in(-2,\ 4)$ είναι $f\left(-\dfrac{7}{4}\right)>0$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,+\infty)$, άρα ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι $f(0)<f(4)\Leftrightarrow 1<0$, που είναι άτοπο, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι οι αριθμοί $f(-1)$, $f(-0,1)$ είναι θετικοί και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης f ισχύει $f(5)<f(4)\Rightarrow f(5)<0$, οπότε $f(-1)f(5)<0$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-0,1)x^3+f(1)x^2+f(2)}{f(-1)f(5)x^2+f(0)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-0,1)x^3}{f(-1)f(5)x^2}=\frac{f(-0,1)}{f(-1)f(5)}\lim_{x\to+\infty}x=-\infty$$

γ) Παρατηρούμε ότι ο αριθμός μηδέν είναι λύση της εξίσωσης. Επιπλέον, οι αριθμοί e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x} ανήκουν στο διάστημα $(0,+\infty)$ για κάθε $x\in R$, όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x>0$, τότε έχουμε:

$$\begin{cases}e^x<e^{2x}\\ e^{3x}<e^{4x}\end{cases}\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}\begin{cases}f(e^x)>f(e^{2x})\\ f(e^{3x})>f(e^{4x})\end{cases}\Rightarrow f(e^x)+f(e^{3x})>f(e^{2x})+f(e^{4x})$$

οπότε η εξίσωση δεν έχει θετική ρίζα.

- Αν $x < 0$, τότε έχουμε:

$$\begin{cases} e^x > e^{2x} \\ e^{3x} > e^{4x} \end{cases} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(e^x) < f(e^{2x}) \\ f(e^{3x}) < f(e^{4x}) \end{cases} \Rightarrow f(e^x) + f(e^{3x}) < f(e^{2x}) + f(e^{4x})$$

οπότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.

Επομένως, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2,4]$, οπότε από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής παίρνει στο διάστημα αυτό μια ελάχιστη m και μια μέγιστη M τιμή με $m=0$ και $M>0$.

Έχουμε:

$$m < f(-0{,}1) \le M \Rightarrow 0 = m^3 < f^3(-0{,}1) \le M^3 \text{ και } 0 = m < f(2) < M$$

αφού $0<2$ και $f(0) > f(2)$, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει μέγιστο στο 2, οπότε:

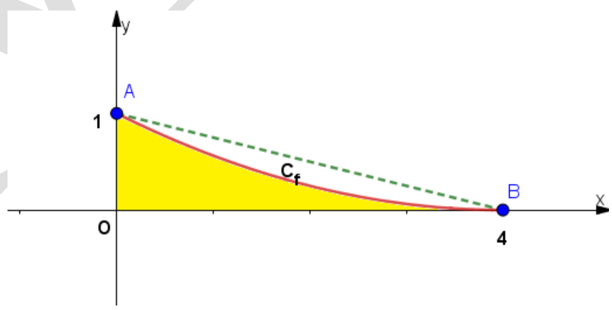
$$0 < f^3(-0{,}1)\, f(2) < M^4 \Rightarrow 0 < \sqrt[4]{f^3(-0{,}1)\, f(2)} < M$$

δηλαδή ο αριθμός $\sqrt[4]{f^3(-0{,}1)\, f(2)}$ ανήκει στο διάστημα $f([-2,\ 4])$, οπότε υπάρχει $x_o \in (-2,\ 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = \sqrt[4]{f^3(-0{,}1)\, f(2)}$, με τον αριθμό αυτό να μην είναι άκρο το διαστήματος αφού η τιμή της f στα άκρα είναι ίση με το μηδέν.

Επομένως, υπάρχει $x_o \in (-2,\ 4)$ ώστε $f(x_o) = \sqrt[4]{f^3(-0{,}1)\, f(2)}$

ε) Για κάθε $x \in (0,\ 4)$ έχουμε:

$f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 1 \Rightarrow f(x) - 1 < 0$, οπότε από την δοθείσα σχέση $\left(f(x)-1\right) f''(x) < 0$ προκύπτει ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\ 1)$.



Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[0,4]$, οπότε είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

Τέλος, λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης f στο $[0,\ 4]$ για κάθε $x \in [0,4]$, έχουμε:

$$f(x) \ge f(4) \Rightarrow f(x) \ge 0$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0,4]$, οπότε η γραφική της παράσταση για τις τιμές του x που περιέχονται στο διάστημα αυτό, βρίσκονται από τη «χορδή» AB και κάτω, οπότε για το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τους θετικούς ημιάξονες ισχύει:

$$E = \int_0^4 f(x)\,dx \quad \text{και} \quad E < (OAB) \quad \text{με} \quad (OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 4 = 2$$

Επομένως:

$$\int_0^4 f(x)\,dx < (OAB) \Rightarrow \int_0^4 f(x)\,dx < 2$$

Σχόλιο

Παραπάνω αναφέραμε ότι η για την κυρτή συνάρτηση f η γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0\,,4]$, βρίσκεται από τη «χορδή» ΑΒ και κάτω. Η «χορδή» ΑΒ διέρχεται από τα σημεία $A(0,\,1)$ και $B(4,\,0)$, οπότε περιέχεται στην ευθεία ΑΒ που έχει εξίσωση:

$$y-0=\frac{1}{-4}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+1$$

Άρα για μια αλγεβρική απόδειξη του ισχυρισμού, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in[0,\,4]$ ισχύει:

$$f(x)+\frac{1}{4}x-1\le 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{1}{4}x-1,\ x\in[0,\,4]$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0\,,4]$, και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0\,,4)$, με

$$g'(x)=f'(x)+\frac{1}{4}\quad\text{και}\quad g''(x)=f''(x)>0\,,$$

οπότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\,,4]$.

Επιπλέον, $g(0)=g(4)=0$, οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,\,4)$ με $g'(\xi)=0$.

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	ξ	4
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της g είναι ίση με το μεγαλύτερο από τους αριθμούς $g(0)$, $g(4)$ καθένας από τους οποίους είναι ίσος με μηδέν.

Επομένως για κάθε $x\in[0,\,4]$ έχουμε:

$$g(x)\le 0\,,\ \text{δηλαδή}\ f(x)+\frac{1}{4}x-1\le 0$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$ και $g(x)=(x\ln x-x+1)\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

δ) Αν Α είναι το σημείο καμπής της C_g και $B(e,g(e))$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}>0 \Leftrightarrow x>1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=0$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)\ge f(1)=0$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με:

$$g'(x)=(x\ln x-x+1)'\cdot\ln x+(x\ln x-x+1)\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=(\ln x+1-1)\cdot\ln x+\ln x-1+\frac{1}{x}=(\ln x)^2+f(x)$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$(\ln x)^2\ge 0 \quad \text{και} \quad f(x)\ge 0$$

Οπότε $g'(x)\ge 0$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x=1$, επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x-x+1)\ln x=-\infty$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=0,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x-x+1)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln x - x + 1\right)\ln x = +\infty$, αφού

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln x - x\right) \overset{+\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln x - 1\right) = +\infty$,

  οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln x - x + 1\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$

Επομένως: $g\left((0,\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = (-\infty, +\infty) = R$

γ) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με:

$$g''(x) = \left((\ln x)^2 + f(x)\right)' = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} + f'(x),\ x\in(0,+\infty)$$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι:

$$\ln x < 0 \text{ άρα και } 2\ln x\cdot\frac{1}{x} < 0, \text{ επίσης } f'(x) < 0 \text{ στο } (0,1)$$

Επομένως:

$$g''(x) < 0 \text{ για κάθε } x\in(0,1)$$

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι:

$$\ln x > 0 \text{ άρα και } 2\ln x\cdot\frac{1}{x} > 0, \text{ επίσης } f'(x) > 0 \text{ στο } (1,+\infty)$$

Επομένως: $g''(x) > 0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cap$		$\cup$
		Σ.Κ.	

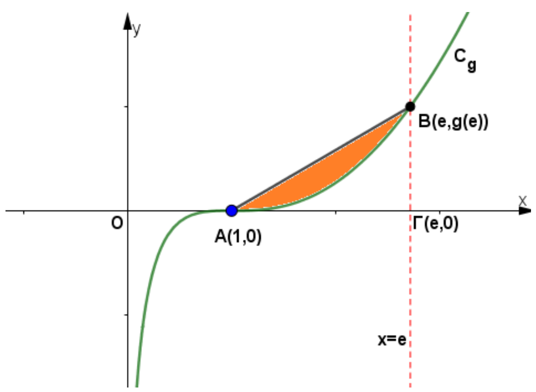
Έχουμε:

- Η συνάρτηση g είναι κοίλη στο διάστημα $(0,1]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x) < 0$ στο $(0,1)$
- Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $g''(x) > 0$ στο $(1,+\infty)$
- Η g'' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(1, g(1))$, δηλαδή το $A(1,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g

δ) Για κάθε $x\in[1,e)\subseteq[1,+\infty)$ είναι $g(x)\geq 0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι:

$$E(\Omega) = (AB\Gamma) - \int_1^e g(x)dx, \text{ όπου}$$

- $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(e-1)\cdot g(e) = \frac{1}{2}(e-1)\cdot 1 = \frac{e-1}{2}$



- $\int_1^e g(x)dx = \int_1^e \left(x(\ln x)^2 - x\ln x + \ln x \right) dx = \int_1^e x(\ln x)^2 dx - \int_1^e x\ln x\, dx + \int_1^e \ln x\, dx$

Είναι

- $\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' (\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2-1}{4}$$

- $\int_1^e x\ln x\, dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

- $\int_1^e \ln x\, dx = \int_1^e (x)' \ln x\, dx = \left[x\ln x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - e + 1 = 1$

Επομένως:

- $\int_1^e g(x)dx = \frac{e^2-1}{4} - \frac{e^2+1}{4} + 1 = \frac{1}{2}$ και
- $E(\Omega) = (AB\Gamma) - \int_1^e g(x)dx = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$

Σχόλιο

Η ανισότητα του (α) ερωτήματος μπορεί να προκύψει άμεσα από τη γνωστή ανισότητα $\ell nx \le x-1$, για κάθε $x>0$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$), αν θέσουμε όπου x το $\frac{1}{x}$

ΘΕΜΑ 6ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t \right) = \frac{f'(x)}{2(x+1)},\ x \neq -1 \quad \text{και} \quad f(-1) = \frac{2}{e}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x^2+1)e^x,\ x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη ή κυρτή και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της C_f

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)(x+1) \le f(x^2) + 2ex$ για κάθε $x \ge 1$

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{(x^4+1)e^{x^2}}{e(x+1)} dx > 3e - 4 - 2\ln\frac{2}{3}$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\ell=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}-e^t\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(e^t\sqrt{1+(x+1)\frac{e^x}{e^t}+\frac{1}{e^{2t}}}-e^t\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(e^t\left(\sqrt{1+(x+1)\frac{e^x}{e^t}+\frac{1}{e^{2t}}}-1\right)\right)$$, απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)\cdot 0$, οπότε

$$\ell=\lim_{t\to+\infty}=\frac{\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}\right)^2-e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}+e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1-e^{2t}}{e^t\left(\sqrt{1+(x+1)\frac{e^x}{e^t}+\frac{1}{e^{2t}}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t\left((x+1)e^x+\frac{1}{e^t}\right)}{e^t\left(\sqrt{1+(x+1)\frac{e^x}{e^t}+\frac{1}{e^{2t}}}+1\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(x+1)e^x+\frac{1}{e^t}}{\sqrt{1+(x+1)\frac{e^x}{e^t}+\frac{1}{e^{2t}}}+1}=\frac{(x+1)e^x}{2}$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ είναι:

$$\frac{f'(x)}{2(x+1)}=\frac{(x+1)e^x}{2}\Rightarrow f'(x)=(x^2+2x+1)e^x\Rightarrow f'(x)=(x^2+1)e^x+2xe^x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=(x^2+1)(e^x)'+(x^2+1)'e^x\Rightarrow (f(x))'=\left[(x^2+1)e^x\right]'$$

Επομένως έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+1)e^x+c_1 & , \ x<-1\\ \dfrac{2}{e} & , \ x=-1\\ (x^2+1)e^x+c_2 & , \ x>-1\end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=-1$, οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$ (1)

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[(x^2+1)e^x+c_1\right]=\frac{2}{e}+c_1$
- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[(x^2+1)e^x+c_2\right]=\frac{2}{e}+c_2$
- $f(-1)=\frac{2}{e}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{2}{e}+c_1=\frac{2}{e}+c_2=\frac{2}{e}\Rightarrow c_1=c_2=0$$

Επομένως:

$f(x)=(x^2+1)e^x$, $x\in R$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f'(x) = ((x^2+1)e^x)' = 2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x = (x+1)^2 e^x \,,\; x \in R$$

Είναι:

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq -1$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο -1.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(x^2+1)e^x\right] \overset{(+\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{-x}} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)'}{(e^{-x})'} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0$$
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(x^2+1)e^x\right] = +\infty$$

Η συνάρτησης f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(R) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0\,,+\infty)$$

γ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f''(x) = ((x+1)^2 e^x)' = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x =$$
$$= (x+1)(2+x+1)e^x = (x+1)(x+3)e^x \,,\; x \in R$$

Είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = -1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)e^x > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > -1$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,-3]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $(-\infty,-3)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $[-3,\,-1]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) < 0$ στο $(-3,\,-1)$
- ♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[-1,+\infty)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $(-1,\,+\infty)$
- ♦ Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = -3$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(-3, f(-3))$, δηλαδή το $(-3\,,10e^{-3})$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- ♦ Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = -1$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $(-1, f(-1))$, δηλαδή το $(-1\,,2e^{-1})$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Ε.Μ.Ε.

δ) Για $x>1\overset{\cdot x}{\Rightarrow} x^2>x$, οπότε $x^2>x>1$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,x]$, άρα και συνεχής, οπότε από Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-2e}{x-1}$

Επίσης η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,x^2]$, άρα και συνεχής, οπότε από Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x,x^2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}=\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x(x-1)}$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)\subseteq[-1,+\infty)$ και $\xi_1,\xi_2\in(1,+\infty)$ με

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow\frac{f(x)-2e}{x-1}<\frac{f(x^2)-f(x)}{x(x-1)}\overset{x>1}{\Rightarrow}f(x)-2e<\frac{f(x^2)-f(x)}{x}\Rightarrow$$

$$xf(x)-2ex<f(x^2)-f(x)\Rightarrow(x+1)f(x)<f(x^2)+2ex\quad(1)$$

Για $x=1$ η σχέση (1) ισχύει ως ισότητα.

Πράγματι:

$$2f(1)=f(1)+2e\Leftrightarrow 4e=2e+2e\Leftrightarrow 4e=4e$$

Οπότε είναι:

$$(x+1)f(x)\le f(x^2)+2ex\quad \text{για κάθε } x\ge 1\quad(2)$$

ε) Έχουμε:

$$\int_1^2\frac{(x^4+1)e^{x^2}}{e(x+1)}dx=\int_1^2\frac{f(x^2)}{e(x+1)}dx=\frac{1}{e}\int_1^2\frac{f(x^2)}{x+1}dx\quad(3)$$

Από τη σχέση (1) για $x>1$ έχουμε:

$$f(x)-\frac{2ex}{x+1}<\frac{f(x^2)}{x+1}$$

Άρα:

$$\int_1^2\frac{f(x^2)}{x+1}dx>\int_1^2\left(f(x)-\frac{2ex}{x+1}\right)dx\quad(4)$$

Είναι:

- $$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2+1)e^x dx=\int_1^2(x^2+1)(e^x)'dx=\left[(x^2+1)e^x\right]_1^2-\int_1^2 2xe^x dx=$$

$$=5e^2-2e-\int_1^2 2x(e^x)'dx=5e^2-2e-\left[2xe^x\right]_1^2+\int_1^2 2e^x dx=$$

$$=5e^2-2e-4e^2+2e+\left[2e^x\right]_1^2=e^2+(2e^2-2e)=3e^2-2e\quad(5)$$

- $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx =$

$$=\left[x-\ln(x+1)\right]_1^2 = 2-\ln 3-1+\ln 2 = 1+\ln\frac{2}{3} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) και (6) έχουμε:

$$\frac{1}{e}\cdot\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x+1}dx > \frac{1}{e}\cdot\int_1^2 \left(f(x)-\frac{2ex}{x+1}\right)dx > \frac{1}{e}\cdot\int_1^2 f(x)dx - \frac{1}{e}\cdot 2e\cdot\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx =$$

$$=\frac{1}{e}\cdot\int_1^2 f(x)dx - 2\cdot\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \frac{1}{e}\cdot\left(3e^2-2e\right)-2\cdot\left(1+\ln\frac{2}{3}\right) = 3e-2-2-2\ln\frac{2}{3} = 3e-4-2\ln\frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ 7ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε:

- $2f^2(1)+f^2(3)\le 2f(1)\cdot f(3)$
- $f'(1)=2$
- $f''(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$

γ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x)-2x+2)}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x)dx < \int_1^3 f(x)dx$

ε) Να αποδείξετε ότι $E<(\xi-1)^2$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\xi$ με ξ το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f^2(1)+f^2(1)+f^2(3)-2f(1)\cdot f(3)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(1)\right)^2+\left(f(1)-f(3)\right)^2\le 0 \Leftrightarrow f(1)=0 \text{ και } f(1)=f(3)$$

$1\neq 3$ ενώ $f(1)=f(3)$, άρα η f δεν είναι συνάρτηση $1-1$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, άρα και συνεχής με $f(1)=f(3)$, οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$. Επομένως το ξ είναι κρίσιμο σημείο.

Είναι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f'' συνεχής, άρα η $f''(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη, άρα η f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}$

Ε.Μ.Ε.

γ) 1ος τρόπος:

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη στο R, άρα ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Έστω ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε έχουμε:

$$\xi > 1 \Rightarrow f'(\xi) > f'(1) \Rightarrow 0 > 2$$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R

2ος τρόπος:

Για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1,\xi]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,\xi)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = \dfrac{f'(\xi) - f'(1)}{\xi - 1} = \dfrac{-2}{\xi - 1} < 0$.

Η συνάρτηση f'' είναι συνεχής και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα διατηρεί πρόσημο στο R.

Επειδή $f''(x_0) < 0$ θα ισχύει και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1,0) είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} y = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R ισχύει:

$f(x) \leq 2x - 2 \Leftrightarrow f(x) - 2x + 2 \leq 0$ για κάθε $x \in R$ με το «ίσο» να ισχύει μόνο για $x = 1$

Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$\varphi(x) = \frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x)-2x+2)} = \frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\frac{1}{f(x)-2x+2} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)(f(x)-2x+2)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\cdot\frac{1}{f(x)-2x+2}\right) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1} \underset{DL'H}{\overset{\text{ΜΟΡΦΗ } \left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{(\eta\mu(\pi x))'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}(\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)) = -\pi \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)-2x+2} = -\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 1}(f(x)-2x+2) = 0 \quad \text{και} \quad f(x)-2x+2<0 \text{ για κάθε x κοντά στο 1}$$

δ) Για $x < \xi \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow f'(x) > 0$, ενώ για $x > \xi \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 0$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\xi,+\infty)$

Για $x < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$ και για $x > 3 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) < f(3) \Rightarrow f(x) < 0$, οπότε:

$$\int_0^1 f(x)dx < 0 \quad \text{και} \quad \int_3^4 f(x)dx < 0 \quad (1)$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^4 f(x)dx < \int_1^3 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx < \int_1^3 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx < 0, \text{ που ισχύει από (1)}$$

Ε.Μ.Ε.

ε) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,\xi]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,\xi]$, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\xi]\subset(-\infty,\xi]$ και $f(1)=0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\xi$ είναι

$E=\int_1^{\xi} f(x)dx$.

Από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $f(x)\leq 2x-2$ για κάθε $x\in R$, με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε

$$\int_1^{\xi} f(x)dx<\int_1^{\xi}(2x-2)dx\Rightarrow E<\left[x^2-2x\right]_1^{\xi}\Rightarrow E<(\xi-1)^2$$

ΘΕΜΑ 8ο

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=1$
- $(x-1)f''(x)+2f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ **για κάθε** $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ell nx}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(1)=\dfrac{2}{3}$

δ) Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις $g(1)=1$ και $\big(g(x)-f(x)\big)\big(g(x)+3f(x)\big)=0$, για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι $f=g$

ε) Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec. Αν Α είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Β τυχαίο σημείο του άξονα $y'y$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο $\big(1,f(1)\big)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$xf''(x)-f''(x)+2f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow xf''(x)+f'(x)-f''(x)+f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\big(xf'(x)-f'(x)+f(x)\big)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\Rightarrow xf'(x)-f'(x)+f(x)=\frac{1}{x}+c_1 \quad (1)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(1)-f'(1)+f(1)=1+c_1\overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow} c_1=0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$xf'(x)-f'(x)+f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\big(xf(x)-f(x)\big)'=(\ell nx)'\Rightarrow xf(x)-f(x)=\ell nx+c_2,\ \text{για κάθε } x>0 \quad (2)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(1)-f(1)=\ell n1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$xf(x)-f(x)=\ell nx \Rightarrow (x-1)f(x)=\ell nx\text{, για κάθε } x>0 \quad (3)$$

Για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ από τη σχέση (3) έχουμε $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x-1}$ και από υπόθεση $f(1)=1$, οπότε

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ell nx}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

β) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{\ell nx}{x-1}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-\ell nx}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ell nx}{(x-1)^2}=\frac{h(x)}{(x-1)^2} \quad (3),$$

όπου

$$h(x)=1-\frac{1}{x}-\ell nx,\quad x>0$$

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$h'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2},\quad x>0$$

Είναι:

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$
- $h'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x^2}<0 \Leftrightarrow x>1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $h'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=1$ με μέγιστη τιμή $h(1)=0$

Οπότε είναι:

$$h(x)<h(1)=0\text{, για κάθε } x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f'(x)<0\text{, για κάθε } x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Ε.Μ.Ε.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$, επομένως το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell n x}{x-1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ell n x)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ell n x}{x-1}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ell n x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$

Άρα: $f(A)=(0\,,\,+\infty)$

γ) Για $x=1$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$0\cdot f''(1)+2f'(1)=-1 \Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$$

Για τιμές του x κοντά στο 1 είναι:

$$\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\frac{\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ell n x}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{2}}{x-1}=\frac{2-\dfrac{2}{x}-2\ell n x+(x-1)^2}{2(x-1)^3}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2-\dfrac{2}{x}-2\ell n x+(x-1)^2}{2(x-1)^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x}+2(x-1)}{6(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2-2x+2(x-1)x^2}{6x^2(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)+2x^2(x-1)}{6x^2(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x^2-1)}{6x^2(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)^2(x+1)}{6x^2(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

Άρα:

$$f''(1)=\frac{2}{3}$$

δ) Για κάθε $x>0$ είναι:

$$g^2(x)+3f(x)g(x)-f(x)g(x)-3f^2(x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g^2(x)+2f(x)g(x)+f^2(x)=4f^2(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(g(x)+f(x)\right)^2=4f^2(x)\Leftrightarrow \varphi^2(x)=4f^2(x)\Leftrightarrow|\varphi(x)|=2|f(x)| \quad (4)$$

όπου $\varphi(x)=g(x)+f(x)$, $x>0$

Η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $(0\,,\,+\infty)$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

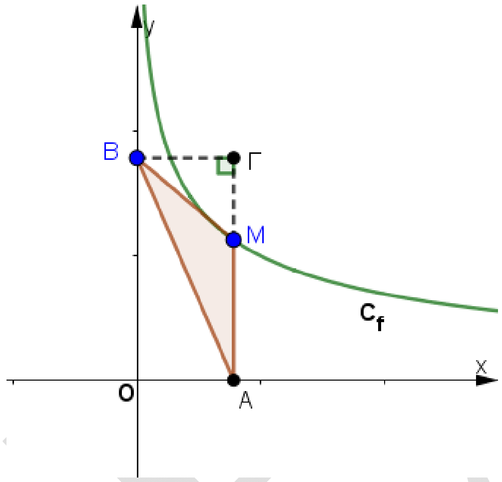
Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $\varphi(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων f, g. Επομένως η συνάρτηση φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ με $\varphi(1)=g(1)+f(1)=1+1=2>0$, οπότε $\varphi(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα η σχέση (4) ισοδύναμα γράφεται:

$\varphi(x)=2f(x)\Leftrightarrow g(x)+f(x)=2f(x)\Leftrightarrow g(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $(0,+\infty)$ και ισχύει $f(x)=g(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, συμπεραίνουμε ότι $f=g$.

ε) Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή t η θέση του σημείου Μ είναι $M(x(t),y(t))$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ είναι $E(t)$.



Είναι:

$$E(t)=\frac{1}{2}\cdot(AM)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\left|f(x(t))\right|\cdot x(t)=\frac{1}{2}\cdot f(x(t))\cdot x(t),$$

αφού $x(t)>0$ και $f(x(t))>0$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι:

$$E'(t)=\frac{1}{2}\cdot f'(x(t))x'(t)\cdot x(t)+\frac{1}{2}\cdot f(x(t))\cdot x'(t)=\frac{1}{2}\cdot x'(t)\left(f'(x(t))x(t)+f(x(t))\right)$$

Αν t_0 είναι η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο $(1,f(1))$, τότε $x(t_0)=1$.

Επίσης $x'(t_0)=4\ cm/sec$, οπότε έχουμε:

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot x'(t_0)\left(f'(x(t_0))x(t_0)+f(x(t_0))\right)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(f'(1)\cdot 1+f(1)\right)\underset{f'(1)=-\frac{1}{2}}{\overset{f(1)=1}{=}}2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot 1+1\right)=1\ cm^2/sec$$

ΘΕΜΑ 9ο

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:(-e,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)}=\dfrac{1}{f'(x)}$, για κάθε $x\in(-e,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(x+e)$, $x\in(-e,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τους ημιάξονες Ox' και Oy.

ε) Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό α, αν ισχύει $e^{f(x)}+2e^x-x\alpha\geq e+2$ για κάθε $x>-e$

στ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)}dx>\frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(-e,+\infty)$ είναι:

$$e^{f(x)}f'(x)=1\Leftrightarrow(e^{f(x)})'=(x)'\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+c,\ c\in\mathbb{R}\quad(1).$$

Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(0)=1$ και από τη σχέση (1) έχουμε $e^{f(0)}=c\Leftrightarrow c=e$.

Έχουμε λοιπόν $e^{f(x)}=x+e\Leftrightarrow f(x)=\ell n(x+e)$, $x>-e$.

β) Από την αρχική σχέση έχουμε $f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}}>0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-e,+\infty)$, επομένως είναι και «1−1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x, στο διάστημα $(-e,+\infty)$.

Έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln(x+e)\Leftrightarrow x+e=e^{y}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=e^{y}-e\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^{y}-e,\ y\in R,$$

αφού $e^{y}-e>-e$ για κάθε $y\in R$.

Άρα η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}:R\to R$ με $f^{-1}(x)=e^{x}-e$.

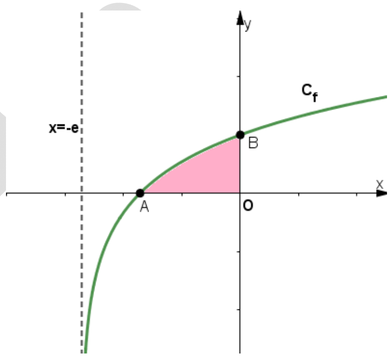
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+e)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+e)-\ln e^{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+e}{e^{x}}\right)=\lim\limits_{\omega\to0^{+}}(\ln\omega)=-\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e}{e^{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\overset{-x=u}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$

δ) Για $y=0$ είναι:

$$\ell n(x+e)=0\Leftrightarrow \ell n(x+e)=\ell n1\Leftrightarrow x+e=1\Leftrightarrow x=1-e$$

οπότε οι συντεταγμένες του κοινού σημείου Α της γραφικής C_f της συνάρτησης f με τον ημιάξονα Οx΄ είναι Α$(1-e,0)$.



Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τους ημιάξονες Οx΄ και Οy είναι:

$$E(\Omega)=\int_{1-e}^{0}\ell n(x+e)dx=\int_{1-e}^{0}(x+e)'\ell n(x+e)dx=\left[(x+e)\ell n(x+e)\right]_{1-e}^{0}-\int_{1-e}^{0}(x+e)\left(\ell n(x+e)\right)'dx=$$
$$=e\,\ell ne-\int_{1-e}^{0}(x+e)\cdot\frac{1}{x+e}dx=e-\int_{1-e}^{0}1dx=e-1\cdot\left(0-(1-e)\right)=1$$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=e^{f(x)}+2e^{x}-x\alpha-e-2,\ x\in(-e,+\infty)$$

Για κάθε $x\in(-e,+\infty)$ είναι:

$$e^{f(x)}+2e^{x}-x\alpha\ge e+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{f(x)}+2e^{x}-x\alpha-e-2\ge0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(x)\ge0\Leftrightarrow g(x)\ge g(0)$$

Δείξαμε ότι $g(x)\ge g(0)$ για κάθε $x\in(-e,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-e,+\infty)$ με:

$$g'(x)=e^{f(x)}f'(x)+2e^{x}-\alpha$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με

$$g'(0) = e^{f(0)} f'(0) + 2e^0 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$g'(0) = e^{f(0)} \frac{1}{e^{f(0)}} + 2e^0 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$g'(0) = 3 - \alpha$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

στ) Για $\frac{1}{2} \le x \le 1$ ισχύει :

$$x \ge x^2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) \ge f(x^2) \Rightarrow \ln(x+e) \ge \ln(x^2+e) \Rightarrow \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} \ge 1,$$

αφού $\ln(x^2+e) > 0$, για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} dx > \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} dx > 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x+e)}{\ln(x^2+e)} dx > \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 10ο

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, για την οποία ισχύουν:

- $\mathbf{f(1) = 0}$
- $\mathbf{x^2 f'(x) + 1 = 4\int_1^e f(x)dx - xf(x)}$**, για κάθε $\mathbf{x > 0}$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{\ell nx}{x}$, για κάθε $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \le x - 1$, για κάθε $x > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(2x+3) - x}{e^x} dx < 3 - \frac{4}{e}$

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και $g(x) = -x^2$ αντιστοίχως έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\int_1^e f(x)dx = \alpha \in R$ (1), οπότε η αρχική σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 f'(x) + 1 = 4\alpha - xf(x) \Leftrightarrow x^2 f'(x) + xf(x) = 4\alpha - 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = (4\alpha - 1) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(xf(x)\right)' = \left((4\alpha - 1)\ell nx\right)' \Leftrightarrow xf(x) = (4\alpha - 1)\ell nx + c, \text{ για κάθε } x > 0 \quad (2)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(1) = (4\alpha - 1)\ell n1 + c \Leftrightarrow f(1) = 0 + c \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} c = 0$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(x)=\frac{(4\alpha-1)\ell nx}{x}, \text{ για κάθε } x>0 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$\int_1^e \frac{(4\alpha-1)\ell nx}{x}dx=\alpha \Leftrightarrow (4\alpha-1)\int_1^e \ell nx\cdot\frac{1}{x}dx=\alpha \Leftrightarrow$$

$$(4\alpha-1)\int_1^e \ell nx\cdot(\ell nx)'dx=\alpha \Leftrightarrow (4\alpha-1)\left[\frac{\ell n^2x}{2}\right]_1^e=\alpha \Leftrightarrow$$

$$(4\alpha-1)\left(\frac{\ell n^2 e}{2}-\frac{\ell n^2 1}{2}\right)=\alpha \Leftrightarrow (4\alpha-1)\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=\alpha \Leftrightarrow$$

$$2\alpha-\frac{1}{2}=\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f(x)=\frac{\ell nx}{x}, \text{ για κάθε } x>0$$

β) Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f(x)\le x-1 \Leftrightarrow \frac{\ell nx}{x}\le x-1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ell nx\le x^2-x \Leftrightarrow \ell nx-x^2+x\le 0 \Leftrightarrow h(x)\le 0 \quad (4),$$

όπου

$$h(x)=\ell nx-x^2+x, \text{ για κάθε } x>0$$

Για κάθε $x>0$ είναι:

$$h'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=\frac{-(x-1)(2x+1)}{x}$$

Είναι:

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-(x-1)(2x+1)}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{-(x-1)(2x+1)}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
			Μέγιστο		

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $h'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Ε.Μ.Ε.

- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o = 1$ με μέγιστη τιμή $h(1) = 0$

Οπότε είναι:

$$h(x) \le h(1) \Leftrightarrow h(x) \le 0, \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

Άρα αληθεύει η ζητούμενη ανισότητα (4).

γ) Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $2x+3>0$, οπότε από το (β) ερώτημα έχουμε:

$$f(2x+3) \le 2x+3-1 \Leftrightarrow f(2x+3)-x \le x+2 \Leftrightarrow \frac{f(2x+3)-x}{e^x} \le \frac{x+2}{e^x}$$

Επειδή το «ίσον» δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_0^1 \frac{f(2x+3)-x}{e^x}dx < \int_0^1 \frac{x+2}{e^x}dx \quad (5)$$

Είναι:

$$\int_0^1 \frac{x+2}{e^x}dx = \int_0^1 (x+2)e^{-x}\,dx = -\int_0^1 (x+2)(e^{-x})'dx =$$

$$-\left(\left[(x+2)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (x+2)'e^{-x}dx\right) = -\left(\frac{3}{e}-2-\int_0^1 e^{-x}dx\right) =$$

$$-\frac{3}{e}+2+\int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{3}{e}+2-\left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{3}{e}+2-\left(e^{-1}-1\right) = 3-\frac{4}{e}$$

Επομένως από τη σχέση (5) έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{f(2x+3)-x}{e^x}dx < 3-\frac{4}{e}$$

δ) Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{\ell nx}{x}\right)' = \frac{1-\ell nx}{x^2}$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = (-x^2)' = -2x$$

Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη μόνο όταν υπάρχει $\alpha > 0$ και $\beta \in R$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$ να ταυτίζεται με την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B\big(\beta, g(\beta)\big)$

Αν (ε_1) είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$, τότε είναι:

$$\varepsilon_1: y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow \varepsilon_1: y = f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$$

Αν (ε_2) είναι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B\big(\beta, g(\beta)\big)$, τότε είναι:

$$\varepsilon_2: y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow \varepsilon_2: y = g'(\beta)x + g(\beta) - \beta g'(\beta)$$

Οπότε:

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\ell n\alpha}{\alpha^2} = -2\beta \\ \dfrac{\ell n\alpha}{\alpha} - \alpha\dfrac{1-\ell n\alpha}{\alpha^2} = -\beta^2 - \beta(-2\beta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ε.Μ.Ε.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\ell n\alpha - 1}{2\alpha^2} \\ \beta^2 = \dfrac{2\ell n\alpha - 1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\ell n\alpha - 1}{2\alpha^2} \\ \dfrac{(\ell n\alpha - 1)^2}{4\alpha^4} = \dfrac{2\ell n\alpha - 1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\ell n\alpha - 1}{2\alpha^2} \\ 2\ell n\alpha - 1 - \dfrac{(\ell n\alpha - 1)^2}{4\alpha^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\ell n\alpha - 1}{2\alpha^2} & (\mathrm{I}) \\ \varphi(\alpha) = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}, \text{ όπου } \varphi(\alpha) = 2\ell n\alpha - 1 - \dfrac{(\ell n\alpha - 1)^2}{4\alpha^3},\ \alpha > 0$$

Η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο $[1\,,e]$, αφού είναι συνεχής στο διάστημα αυτό, ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και

$$\varphi(1)\cdot\varphi(e) = \left(0 - 1 - \frac{1}{4}\right)\cdot(2 - 1 - 0) = \left(-\frac{5}{4}\right)\cdot 1 = -\frac{5}{4} < 0$$

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (1\,,e)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho) = 0$, δηλαδή η εξίσωση (ΙΙ) έχει μια τουλάχιστον λύση. Άρα το σύστημα έχει μια τουλάχιστον λύση την

$$\begin{cases} \alpha = \rho \\ \beta = \dfrac{\ell n\rho - 1}{2\rho^2} \end{cases},\quad \rho \in (1, e)$$

Άρα οι C_f και C_g έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

ΘΕΜΑ 11ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x < 1 \\ e^{x-1} + \ell nx - 2, & x \geq 1 \end{cases}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ε) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

στ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

ζ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa > 1$ υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f(\xi) = \frac{f(\kappa) + \kappa f(\kappa+1) + (\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}$$

ΛΥΣΗ

α)
- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$, ως ρητή συνάρτηση.
- Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- Εξετάζουμε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$.

  Είναι:

  ◦ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

  Οπότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $R - \{1\}$

β) ♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,1)$ με:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$

♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο διάστημα $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x} > 0$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(e^{x-1} + \ell n x - 2\right) = -1 = f(-1)$

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,+\infty)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,1)$ με:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,1)$

♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$ με:

$$f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2}$$

Για $x > 1$ είναι:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1} > e^0 \\ \dfrac{1}{x^2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1} > 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} > -1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1} - \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(e^{x-1} + \ell n x - 2\right) = -1 = f(-1)$

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,+\infty)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,+\infty)$.

γ) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

Οπότε έχουμε $f\left((-\infty,-1)\right) = \left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\,,\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-\infty,0)$

• Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Είναι:

- $f(1) = -1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{x-1} + \ell n x - 2\right) = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-1} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ell n x) = +\infty$

Οπότε έχουμε $f([1,+\infty)) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

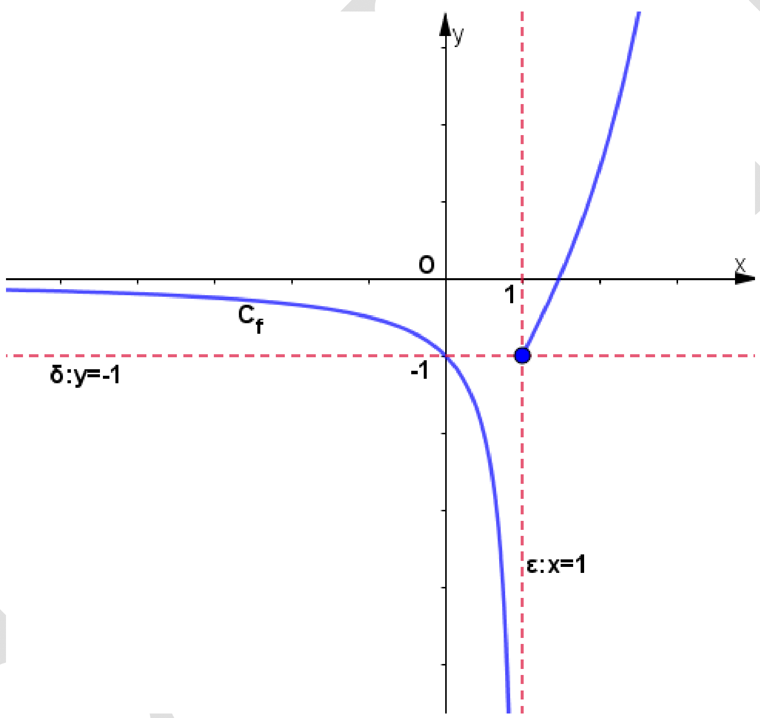
$$f(R) = (-\infty, 0) \cup [-1,+\infty) = R$$

δ)
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$
- Είναι $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = e + \ell n2 - 2 > 0$, οπότε $f(1)\cdot f(2) < 0$.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, 2]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

ε) Είναι $0 \neq 1$ ενώ $f(0) = f(1) = -1$, άρα η συνάρτηση f δεν είναι «1−1», οπότε δεν αντιστρέφεται.

στ) Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι:



- Αν $\alpha \in (-\infty,-1)$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-\infty,1)$
- Αν $\alpha = -1$ η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει δύο λύσεις τις $x = 0$ και $x = 1$
- Αν $\alpha \in (-1,0)$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς δύο λύσεις μια στο $(-\infty,0)$ και μια στο $(1,2)$
- Αν $\alpha \in [0,+\infty)$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(1,+\infty)$

ζ) Ισχύει $f(x) > -1$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$, οπότε:

- $f(\kappa) > -1$ (1)
- $f(\kappa+1) > -1 \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} \kappa\cdot f(\kappa+1) > -\kappa$ (2)
- $f(\kappa+2) > -1 \overset{\kappa+1>0}{\Leftrightarrow} (\kappa+1)f(\kappa+2) > -\kappa-1$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2) > -2\kappa-2=-2(\kappa+1),$$

οπότε

$$\frac{f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)} > -1, \text{ αφού } \kappa+1>0$$

δηλαδή ο αριθμός $\dfrac{f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)} \in [-1,+\infty)=f\left([1,+\infty)\right)$

Άρα υπάρχει $\xi \in (1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)},$$

το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 12ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \ x<0 \\ \ell n(e^x+x) & , \ x\ge 0 \end{cases}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια:

i) στο πεδίο ορισμού της.

ii) στο διάστημα $[0,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$, η εξίσωση $\dfrac{e^{f(x)}-f(x)}{x}+\dfrac{f(x)}{x-\alpha}=0$ (Ι), έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,\alpha)$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x^2}-1)+f\left(|x|-|\eta\mu x|\right)=0$.

ζ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

ΛΥΣΗ

α) i)
- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$, ως ρητή συνάρτηση.
- Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Εξετάζουμε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια στο $x_0=0$.

  Είναι:

  ∘ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

  Οπότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R^*

Ε.Μ.Ε.

ii) • Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

• Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ell n(e^x + x) = 1 = f(0)$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$ (Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 73).

β) ♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,0)$ με:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$

♦ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x} > 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,+\infty)$ $\big($ α) ii) ερώτημα $\big)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

γ) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$

Είναι:

∘ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

∘ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Οπότε έχουμε $f\big((-\infty,0)\big) = \Big(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\,,\, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\Big) = (-\infty,0)$

• Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Είναι:

∘ $f(0) = 0$

∘ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(\ell n(e^x + x)\big) = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\ell n(e^x + x)\big) \overset{e^x+x=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} (\ell n u) = +\infty$

Οπότε έχουμε $f\big([0,+\infty)\big) = \Big[f(0)\,,\, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Big) = [0,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(R) = (-\infty,0) \cup [0,+\infty) = R$$

δ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = x$.

• Για $x < 0$ έχουμε:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} x = -1$$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $A(-1,-1)$.

- Για $x \geq 0$ έχουμε:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln(e^x + x) = x \Leftrightarrow \ln(e^x + x) = \ln e^x \Leftrightarrow e^x + x = e^x \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $O(0,0)$.

Επομένως τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$ είναι $O(0,0)$ και $A(-1,-1)$.

ε) Για $x \in R^* - \{\alpha\}$ έχουμε:

$$\frac{e^{f(x)} - f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x-\alpha} = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)\left(e^{f(x)} - f(x)\right) + xf(x) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (x-\alpha)\left(e^{f(x)} - f(x)\right) + xf(x), \ x \in [0,\alpha]$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\alpha] \subseteq [0,+\infty)$
- Είναι $h(0) = -\alpha\left(e^{f(0)} - f(0)\right) = -\alpha < 0$ και $h(\alpha) = \alpha f(\alpha) > 0$, (αφού $\alpha > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha) > f(0) \Rightarrow f(\alpha) > 0$), οπότε $h(0) \cdot h(\alpha) < 0$.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,\alpha]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - \alpha)\left(e^{f(x_0)} - f(x_0)\right) + x_0 f(x_0) = 0 \overset{x_0 \in (0,\alpha)}{\Leftrightarrow} \frac{e^{f(x_0)} - f(x_0)}{x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} = 0$$

Επομένως η εξίσωση (Ι) έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,\alpha)$

στ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$-|x| \leq |\eta\mu x| \leq |x| \Rightarrow |x| - |\eta\mu x| \geq 0 \qquad (1)$$

(η ισότητα ισχύει μόνον για $x = 0$)

Έχουμε:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Rightarrow e^{x^2} \geq 1 \Rightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0 \qquad (2)$$

Λόγω των σχέσεων (1) και (2) η εξίσωση $f(e^{x^2}-1) + f\left(|x| - |\eta\mu x|\right) = 0$ θα λυθεί στο διάστημα $[0,+\infty)$

Για να ισχύει η ισότητα $f(e^{x^2}-1) + f\left(|x| - |\eta\mu x|\right) = 0$ και δεδομένου ότι $f\left([0,+\infty)\right) = [0,+\infty)$ πρέπει και αρκεί :

$$\begin{cases} f\left(e^{x^2}-1\right) = 0 \\ f\left(|x| - |\eta\mu x|\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(e^{x^2}-1\right) = f(0) \\ f\left(|x| - |\eta\mu x|\right) = f(0) \end{cases} \underset{f:1-1 \text{ στο } [0,+\infty)}{\overset{f\uparrow \text{στο } [0,+\infty)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} e^{x^2} - 1 = 0 \\ |x| - |\eta\mu x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

ζ) ♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,0)$ με:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0)$

Ε.Μ.Ε.

♦ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με:

$$f''(x)=\left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right)'=\frac{(e^x+1)'(e^x+x)-(e^x+1)(e^x+x)'}{(e^x+x)^2}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+x)-(e^x+1)^2}{(e^x+x)^2}=\frac{xe^x-2e^x-1}{(e^x+x)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=xe^x-2e^x-1,\ x\geq 0$

Η συνάρτηση k είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με:

$$k'(x)=e^x+xe^x-2e^x=xe^x-e^x=(x-1)e^x,\ x>0$$

Είναι:

- $k'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)e^x=0 \Leftrightarrow x=1$
- $k'(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)e^x>0 \Leftrightarrow x>1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης k είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$		$\searrow$	$-e-1$	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Επομένως:

- Η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $k'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η συνάρτηση k είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$
- Η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $k'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση k παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$ με ελάχιστη τιμή $k(1)=-e-1$

Επιπλέον έχουμε:

- $k([0,1])=[k(1),k(0)]=[-e-1,-3]$. Το διάστημα αυτό δεν περιέχει το μηδέν άρα η συνάρτηση k δε μηδενίζεται, επομένως $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.
- $k([1,+\infty))=\left[k(1),\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)\right)=[-e-1,+\infty)$,

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x-2e^x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-2)e^x-1\right)=+\infty$

  Το $0\in[-e-1,+\infty)$, άρα θα υπάρχει $\xi\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $k(\xi)=0$, το οποίο είναι και μοναδικό αφού η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

  Επειδή:

  $$f''(x)=\frac{k(x)}{(e^x+x)^2}\ \text{για κάθε } x\geq 0$$

  συμπεραίνουμε ότι για το μοναδικό αυτό $\xi\in(1,+\infty)$ θα ισχύει $f''(\xi)=0$.

Επίσης:

Για $x \in (1, \xi)$ έχουμε:

$$1 < x < \xi \overset{k\uparrow}{\Rightarrow} k(x) < k(\xi) \Rightarrow k(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

ενώ για $x \in (\xi, +\infty)$ έχουμε:

$$x > \xi \overset{k\uparrow}{\Rightarrow} k(x) > k(\xi) \Rightarrow k(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Επομένως το σημείο $\left(\xi, f(\xi)\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x$ και η ευθεία ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στα σημεία της $A\left(x_1, f(x_1)\right)$ και $B\left(x_2, f(x_2)\right)$ με $x_1 \neq x_2$

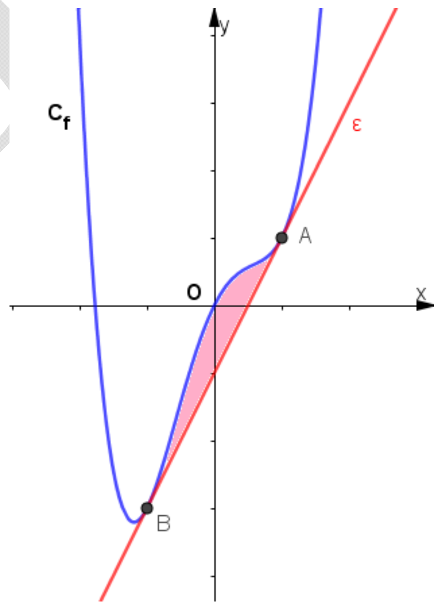
α) Να βρείτε τα σημεία A, B και την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία ε.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-2, -1)$, στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ακρότατο.

ΛΥΣΗ



α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 2\,.$$

- Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - \left(x_1^4 - 2x_1^2 + 2x_1\right) = \left(4x_1^3 - 4x_1 + 2\right)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \left(4x_1^3 - 4x_1 + 2\right)x - 4x_1^4 + 4x_1^2 - \cancel{2x_1} + x_1^4 - 2x_1^2 + \cancel{2x_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \left(4x_1^3 - 4x_1 + 2\right)x - 3x_1^4 + 2x_1^2 \qquad (1).$$

- Η εφαπτομένη της C_f στο B έχει εξίσωση:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \left(4x_2^3 - 4x_2 + 2\right)x - 3x_2^4 + 2x_2^2 \qquad (2).$$

Οι εξισώσεις (1), (2) περιγράφουν την ίδια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$, οπότε πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 4x_1 + \cancel{2} = 4x_2^3 - 4x_2 + \cancel{2} \\ -3x_1^4 + 2x_1^2 = -3x_2^4 + 2x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1^3 - x_2^3) - 4(x_1 - x_2) = 0 \\ -3(x_1^4 - x_2^4) + 2(x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 4(x_1 - x_2) = 0 \\ -3(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ (x_1^2 - x_2^2)\left[-3(x_1^2 + x_2^2) + 2\right] = 0 \end{cases} \overset{x_1 \neq x_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \quad \text{ή} \quad -3(x_1^2 + x_2^2) + 2 = 0 \end{cases}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1$, τότε:

  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 + x_1^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ή $x_1 = -1$.

  Για $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, οπότε $A\big(1, f(1)\big)$ και $B\big(-1, f(-1)\big)$, δηλαδή $A(1, 1)$ και $B(-1, -3)$.

  Όμοια αν $x_1 = -1$.

- Αν $-3(x_1^2 + x_2^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}$, τότε $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + x_1x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 = \frac{1}{3}$.

  Έτσι:

$$\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{1}{3} \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1x_2 = \dfrac{2}{3} \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1x_2 = \dfrac{2}{3} \\ (x_1 - x_2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1x_2 = \dfrac{2}{3} \\ x_1 = x_2 \quad \text{Άτοπο.} \end{cases}$$

Επομένως $A(1, 1)$ και $B(-1, -3)$, οπότε η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y - 1 = \frac{-4}{-2}(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση της διαφοράς των f, g όπου $g(x) = 2x - 1$.

Είναι:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 2x - (2x - 1) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$$

με $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι ίσο με:

$$E = \int_{-1}^{1} \left| f(x) - g(x) \right| dx = \int_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x) \big)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - 2x^2 + 1 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{15} \text{ τ.μ.}$$

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $f'(x) = 4x^3 - 4x + 2$
- $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$

Είναι:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
f(x)							
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

♦ Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) < 0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

♦ Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x) > 0$ στο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 2 = 2(2x^3 - 2x + 1).$$

- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[-2, -1]$,
- $f'(-2) = -22$, $f'(-1) = 2$, οπότε $f'(-2)\cdot f'(-1) = -44 < 0$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Ακόμα η $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (-2, -1) \subseteq \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, -1]$.

Επομένως η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο $(-2, -1)$, άρα και στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

x	$-\infty$	-2	x_0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f'(x)$	− ↗		0	+ ↗	
$f(x)$	↘			↗	

Τ.Ε.

Έστω $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Έχουμε:

- Στο διάστημα $(-\infty, x_1]$ η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει ρίζα το x_0.
- $f'(x_2) = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{18 - 8\sqrt{3}}{9} > 0$.
- Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ισχύει ότι : $x_1 < x < x_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$.
- Στο διάστημα $[x_2, +\infty)$ ισχύει ότι : $x > x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Επομένως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$, οπότε το $f(x_0)$ είναι ολικό ακρότατο της συνάρτησης f.

x	$-\infty$	-2	x_0	-1	x_1		x_2	$+\infty$
$f''(x)$		+		+	0	−	0	+
$f'(x)$		− ↗	0	+ ↗		↘ +		+ ↗
$f(x)$		↘	0	↗				

ΘΕΜΑ 14ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x^x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **και** $g(x)=\ln^2 x-\dfrac{1}{x},\quad x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^{x\ln x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{x-x\ln x}\quad (1)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}(x-x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}x(1-\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

Θέτουμε:

$x-x\ln x=u$, οπότε για $x\to 0^+$ έχουμε $u\to 0^+$, αφού $\ln x<0$, άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{u\to 0^+} e^u=1=f(0)$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Για $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^x}\right)'=\left(e^{x-x\ln x}\right)'=e^{x-x\ln x}\left(x-x\ln x\right)'=\frac{e^x}{x^x}\left(1-\ln x-x\frac{1}{x}\right)=\frac{e^x}{x^x}(-\ln x).$$

Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow -\dfrac{e^x\cdot\ln x}{x^x}=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1.$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow -\dfrac{e^x\cdot\ln x}{x^x}>0\overset{-\frac{e^x}{x^x}<0}{\Leftrightarrow}\ln x<0\Leftrightarrow \ln x<\ln 1\Leftrightarrow x<1\Leftrightarrow 0<x<1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Είναι:

- $f(0)=1$
- $f(1)=e$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-x\ln x}\overset{x(1-\ln x)=u}{=}\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(x(1-\ln x)\big)=-\infty$

Οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ το $f(0)=1$ και μέγιστη τιμή στη θέση $x_1=1$ το $f(1)=e$

γ) Είναι:

$$g(x)=\ln^2 x-\frac{1}{x}\ ,\quad x>0$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής διάστημα $[1,e]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(1)\cdot g(e)=(-1)\cdot\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}<0$.

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,e]$, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)\subseteq(0,+\infty)$, δηλαδή μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x)=\left(\ln^2 x-\frac{1}{x}\right)'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x\ln x+1}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}\ ,\quad x>0$$

όπου $h(x)=2x\ln x+1\ ,\ x>0$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x)=\left(2x\ln x+1\right)'=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}=2(\ln x+1)\ ,\quad x>0$$

Είναι:

- $h'(x)=0\Leftrightarrow 2(\ln x+1)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{e}$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow 2(\ln x+1)>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}\Leftrightarrow x>-\frac{1}{e}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(e^{-1})$	$\nearrow$	
			Ελάχιστο		

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=e^{-1}$ με ελάχιστη τιμή

$$h(e^{-1})=h\left(\frac{1}{e}\right)=2\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}+1=\frac{2}{e}\cdot(-\ln e)+1=\frac{2}{e}\cdot(-1)+1=1-\frac{2}{e}=\frac{e-2}{e}>0$$

Οπότε για κάθε $x>0$ είναι:

$$h(x)\ge h(e^{-1})>0\Rightarrow h(x)>0$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι:

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0$$

Δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

δ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{-e^x \cdot \ln x}{x^x}\right)' = -\left[\left(\frac{e^x}{x^x}\right)' \cdot \ln x + \left(\frac{e^x}{x^x}\right) \cdot (\ln x)'\right] = -\left(-\frac{e^x \cdot \ln x}{x^x} \cdot \ln x + \frac{e^x}{x^x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{e^x}{x^x}\left(\ln^2 x - \frac{1}{x}\right),$$

Άρα $\quad f''(x) = \frac{e^x}{x^x} \cdot g(x)$, $x > 0$

Είναι $f''(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^\alpha} \cdot g(\alpha) = 0$, οπότε:

- για $0 < x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x^x} \cdot g(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$
- για $x > \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x^x} \cdot g(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

Επειδή η f'' μηδενίζεται μόνο για $x = \alpha$ και εκατέρωθεν του α αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

ΘΕΜΑ 15ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0, \pi] \to R$ για την οποία ισχύουν:

- $\left(1 + \eta\mu x\right)^2 f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, **για κάθε** $x \in [0, \pi]$
- $f(0) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - \frac{1}{1 + \eta\mu x}$, $x \in [0, \pi]$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu 2x - x}{x f(x)}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = (2x - \pi)f'(x) + 1$

ε) Να εξετάσετε αν η ευθεία $x = \rho$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (δ), χωρίζει το χωρίο Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τον άξονα x΄x, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in [0, \pi]$ έχουμε:

$$\left(1 + \eta\mu x\right)^2 f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\left(1 + \eta\mu x\right)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(1 + \eta\mu x\right)'}{\left(1 + \eta\mu x\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(-\frac{1}{1 + \eta\mu x}\right)' \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{1 + \eta\mu x} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=-\frac{1}{1+\eta\mu 0}+c,\ \text{δηλαδή } c=1,\ \text{αφού } f(0)=0.$$

Άρα:

$$f(x)=1-\frac{1}{1+\eta\mu x},\ x\in[0,\ \pi]$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\pi]$ με:

$$f\,'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+\eta\mu x\right)^2},\ x\in[0,\ \pi]$$

Είναι:

- $f\,'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+\eta\mu x\right)^2}=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$, διότι $x\in[0,\ \pi]$
- $f\,'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+\eta\mu x\right)^2}>0 \overset{(1+\eta\mu x)^2>0}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x>0\Leftrightarrow x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f΄(x)	+	0	–
f(x)	↗	$\frac{1}{2}$	↘
		Μέγιστο	

Είναι:

- $f\,'(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- $f\,'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$.

- Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ με μέγιστη τιμή $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, ενώ στις θέσεις $x_1=0$ και $x_2=\pi$ παρουσιάζει ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $f(0)=f(\pi)=0$.

Η συνάρτηση $f\,'$ είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f\,''(x)=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+\eta\mu x\right)^2}\right)'=\frac{\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'\left(1+\eta\mu x\right)^2-\sigma\upsilon\nu x\left(\left(1+\eta\mu x\right)^2\right)'}{\left(1+\eta\mu x\right)^4}$$

$$=\frac{-\eta\mu x\left(1+\eta\mu x\right)^2-2\sigma\upsilon\nu^2 x\left(1+\eta\mu x\right)}{\left(1+\eta\mu x\right)^4}=-\frac{\eta\mu x\left(1+\eta\mu x\right)+2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\left(1+\eta\mu x\right)^3},\ x\in[0,\ \pi]$$

Ε.Μ.Ε.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Άρα η f είναι κοίλη.

γ) Για $x>0$ κοντά στο μηδέν έχουμε:

$$\frac{\eta\mu 2x - x}{xf(x)} = \frac{\eta\mu 2x - x}{x}\cdot\frac{1}{f(x)} = \left(2\frac{\eta\mu 2x}{2x}-1\right)\cdot\frac{1}{f(x)}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x - x}{xf(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 2x - x}{xf(x)} = \lim_{x\to 0^+}\left(\left(2\frac{\eta\mu 2x}{2x}-1\right)\cdot\frac{1}{f(x)}\right) = +\infty,\ \text{διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 2x}{2x} \overset{u=2x}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

Επίσης:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$,από ερώτημα (α), οπότε $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = +\infty$

δ) Για $x\in[0,\pi]$ έχουμε:

$$2f(x) = (2x-\pi)f'(x)+1 \Leftrightarrow$$

$$(2x-\pi)f'(x)-2f(x)+1=0 \Leftrightarrow \varphi(x)=0,\ \text{όπου}$$

$$\varphi(x) = (2x-\pi)f'(x)-2f(x)+1,\ x\in[0,\pi]$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με:

$$\varphi'(x) = \left((2x-\pi)f'(x)-2f(x)+1\right)' =$$

$$= 2f'(x)+(2x-\pi)f''(x)-2f'(x) = (2x-\pi)f''(x),\ x\in[0,\pi]$$

Είναι:

- $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-\pi)f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$, διότι

  $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, λόγω του ερωτήματος (α).

- $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow (2x-\pi)f''(x)>0 \Leftrightarrow 2x-\pi<0 \Leftrightarrow 0\le x<\frac{\pi}{2}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης φ είναι ο παρακάτω:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Μέγιστο

Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=\frac{\pi}{2}$ με μέγιστη τιμή $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Λόγω μονοτονίας της συνάρτησης φ είναι:

$$\varphi(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

Επομένως η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow 2f(x)=(2x-\pi)f'(x)+1$ έχει ακριβώς μία ρίζα το $\frac{\pi}{2}$

2ος τρόπος: **(Υπόδειξη)**

Για $x=\frac{\pi}{2}$ η (Ι) αληθεύει και $2f(x)>(2x-\pi)f'(x)+1$, για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ με Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[x,\frac{\pi}{2}\right]$, αν $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},x\right]$, αν $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$

ε) Έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{1+\eta\mu x}=0\Leftrightarrow 1+\eta\mu x=1\Leftrightarrow \eta\mu x=0\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x=0 \text{ ή } x=\pi$$

Στο διάστημα $[0,\pi]$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και οι τιμές της είναι μη αρνητικές. Για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ χωρίζει το χωρίο Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx .$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$, θέτουμε $\pi-x=u\Leftrightarrow x=\pi-u$, τότε $dx=(\pi-u)'du=-du$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $u_1=\frac{\pi}{2}$, ενώ για $x=\pi$ έχουμε $u_2=0$.

Είναι:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx ,$$

διότι $f(\pi-x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, επειδή $\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$.

Άρα η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ χωρίζει το χωρίο Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΘΕΜΑ 16ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\sqrt{\varepsilon\varphi x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{1+f^4(x)}{2f(x)}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}$ και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$, στο σημείο $(1,f^{-1}(1))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f^4(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\frac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f'(x)=\frac{(\varepsilon\varphi x)'}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}}=\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}}=\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}}=\frac{1+f^4(x)}{2f(x)},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}{x}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{\varepsilon\varphi x}\right)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}}=\lim_{x\to 0^+}\left((1+\varepsilon\varphi^2 x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varphi x}}\right)=+\infty$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x)=\frac{1+f^4(x)}{2f(x)}>0$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left[f(0),\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)\right)=[0,+\infty),$$

αφού $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sqrt{\varepsilon\varphi x}=+\infty$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε είναι «1−1», επομένως ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}:[0,+\infty)\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{u\to\frac{\pi}{4}}\frac{u-\frac{\pi}{4}}{f(u)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+1}{2}=1.$$

Στο παραπάνω όριο θέσαμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow f(u)=x$.

Για $x=1$ έχουμε $f(u)=1\Leftrightarrow f(u)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)\overset{f:«1-1»}{\Leftrightarrow}u=\frac{\pi}{4}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$, στο σημείο $(1,\ f^{-1}(1))$ είναι:

$$y-f^{-1}(1)=\left(f^{-1}\right)'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{\pi}{4}=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=x-1+\frac{\pi}{4},\ \text{αφού}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=1$$

δ) Είναι:

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+εφ^2x-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{συν^2x}-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{συν^2x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(εφx\right)'\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dx=\left[εφx\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=εφ\frac{\pi}{4}-εφ0-\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=1-\frac{\pi}{4}=\frac{4-\pi}{4}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 17ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ell nx}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ α, & x=1\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι $α=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η εξίσωση $f^{-1}(x-1)=x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ και ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0=1$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

στ) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x)+1<f(x)<\dfrac{x+1}{2}$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ell nx}{x-1}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\ell nx+x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\left(\ell nx+1\right)=1,$$

οπότε $α=1$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(\frac{x\ell nx}{x-1}\right)'=\frac{\left(x\ell nx\right)'\left(x-1\right)-x\ell nx\left(x-1\right)'}{\left(x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{(\ell nx+1)(x-1)-x\ell nx}{(x-1)^2}=\frac{x\ell nx-\ell nx+x-1-x\ell nx}{(x-1)^2}=\frac{x-1-\ell nx}{(x-1)^2}.$$

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$\ell nx<x-1\Leftrightarrow x-1-\ell nx>0$, οπότε $f'(x)>0$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

γ) Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ell nx}{x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell nx}{1-\frac{1}{x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ell nx)'}{\left(1-\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\ell nx}{x-1} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\ell nx+1}{1} = \lim_{x\to +\infty} (\ell nx+1) = +\infty .$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$, άρα $f(A)=(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι και «1–1», άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Επομένως η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A)=(0,+\infty)$.

Έχουμε:

$$f^{-1}(x-1)=x \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x-1)\right)=f(x) \Leftrightarrow x-1=f(x) \Leftrightarrow f(x)-x+1=0 .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x+1,\ x>1$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2,3]$
- Είναι:
  - $g(2)=f(2)-2+1=2\ell n2-1=\ell n4-\ell ne=\ell n\frac{4}{e}>\ell n1=0$
  - $g(3)=f(3)-3+1=\frac{3\ell n3}{2}-2=\frac{3\ell n3-4}{2}<0$, αφού

    $3\ell n3-4<0 \Leftrightarrow \ell n3^3<4 \Leftrightarrow \ell n27<\ell ne^4 \Leftrightarrow 27<e^4$, ισχύει.

Επομένως από Θεώρημα Bolzano η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.

Είναι:

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{x-\ell nx-1}{(x-1)^2}-1=-\frac{\ell nx-x+1+(x-1)^2}{(x-1)^2}=-\frac{\ell nx-x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}=$$

$$=-\frac{\ell nx+x^2-3x+2}{(x-1)^2}<0 \text{, για κάθε } x\in(2,3),$$

αφού $\ell nx>0$ και $x^2-3x+2>0$ για κάθε $x\in(2,3)$.

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2,3)$, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

δ) Για x κοντά στο 1 $(x\neq 1)$ είναι:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{x\ell nx}{x-1}-1}{x-1}=\frac{x\ell nx-x+1}{(x-1)^2},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ell nx-x+1}{(x-1)^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\left(x\ell nx-x+1\right)'}{[(x-1)^2]'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ell nx+x\cdot\frac{1}{x}-1}{2(x-1)(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ell nx}{2x-2}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{(\ell nx)'}{(2x-2)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$$

οπότε:

$$f'(1)=\frac{1}{2}$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ell nx}{(x-1)^2}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1-\ell nx\right)'}{[(x-1)^2]'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)\cdot 1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}=f'(1)$$

Άρα η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0=1$

ε) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$$f''(x)=\left(\frac{x-1-\ell nx}{(x-1)^2}\right)'=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(x-1)^2-2(x-1)(x-1)'\left(x-1-\ell nx\right)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{\frac{(x-1)^3}{x}-2(x-1)\left(x-1-\ell nx\right)}{(x-1)^4}=\frac{\frac{(x-1)^2}{x}-2\left(x-1-\ell nx\right)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{(x-1)^2-2x\left(x-1-\ell nx\right)}{x(x-1)^3}=\frac{x^2-2x+1-2x^2+2x+2x\ell nx}{x(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x\ell nx-x^2+1}{x(x-1)^3}=\frac{2x\ell nx-x^2+1}{x(x-1)^3}=\frac{h(x)}{x(x-1)^3}\quad (1),$$

όπου $h(x)=2x\ell nx-x^2+1,\ x\in(0,+\infty)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$h'(x)=\left(2x\ell nx-x^2+1\right)'=2\ell nx+2x\cdot\frac{1}{x}-2x=2(\ell nx+1-x),\ \ x\in(0,+\infty)$$

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$$\ell nx<x-1\Leftrightarrow \ell nx-x+1<0,$$

οπότε:

$$h'(x)=2(\ell nx+1-x)<0,\ \ x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0=1$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Επομένως έχουμε:

- Αν $0<x<1\overset{h\downarrow}{\Rightarrow}h(x)>h(1)=0$. Επιπλέον είναι $x(x-1)^3<0$ και από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f''(x)<0$
- Αν $x>1\overset{h\downarrow}{\Rightarrow}h(x)<h(1)=0$. Επιπλέον είναι $x(x-1)^3>0$ και από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f''(x)<0$

Ε.Μ.Ε.

Άρα $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και από το ερώτημα (δ) έχουμε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0,+\infty)$.

στ) Έστω τυχαίο $x>1$, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1,x]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Είναι:

$$1<\xi<x \overset{f'\downarrow(0,+\infty)}{\Rightarrow} f'(1)>f'(\xi)>f'(x)\Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>f'(x)\underset{f(1)=1}{\overset{x-1>0}{\Rightarrow}}$$

$$\frac{x-1}{2}>f(x)-f(1)>(x-1)f'(x)\Rightarrow\frac{x-1}{2}>f(x)-1>(x-1)f'(x)$$

$$\frac{x-1}{2}+1>f(x)>(x-1)f'(x)+1\Rightarrow(x-1)f'(x)+1<f(x)<\frac{x+1}{2}$$

ΘΕΜΑ 18ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$2f(x)>x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$**
- **$f^2(x)+(4-x)f(x)=12-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$**

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y΄y$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

γ) Θεωρούμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$. Να αποδείξετε ότι $\lambda=0$, $\beta=1$ και ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=(1,+\infty)$.

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to12}\dfrac{f(x)-x+4}{x-12}$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή καθεμία από τις συναρτήσεις $f^2(x)$, $4-x$, $f(x)$ και $12-x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(f^2(x)+(4-x)f(x)\right)'=(12-x)'\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2f(x)f'(x)-f(x)+(4-x)f'(x)=-1 \quad (1)$$

Για $x=0$ από υπόθεση έχουμε:

$$f^2(0)+4f(0)=12\Leftrightarrow f^2(0)+4f(0)-12=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(f(0)-2)\cdot(f(0)-6)=0\Leftrightarrow f(0)=2 \text{ ή } f(0)=-6$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $2f(x)>x+1$, οπότε για $x=0$ προκύπτει $2f(0)>1\Leftrightarrow f(0)>\dfrac{1}{2}$

Άρα $f(0)=2$, οπότε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, έχει με τον άξονα $y'y$ κοινό σημείο το $A(0,2)$.

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(0)f'(0)-f(0)+4f'(0)=-1 \overset{f(0)=2}{\Rightarrow}$$

$$4f'(0)-2+4f'(0)=-1 \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{8}$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,2)$ είναι:

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow$$

$$\varepsilon: y-2=\frac{1}{8}(x-0) \Rightarrow \varepsilon: y=\frac{1}{8}x+2 \quad .$$

β) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι $f'(x_0)=0$ (2)

Από τη σχέση (1) για $x=x_0$ έχουμε:

$$2f(x_0)f'(x_0)-f(x_0)+(4-x_0)f'(x_0)=-1 \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$2f(x_0)\cdot 0-f(x_0)+(4-x_0)\cdot 0=-1 \Rightarrow f(x_0)=1 \quad (3)$$

Από υπόθεση για $x=x_0$ έχουμε:

$$f^2(x_0)+(4-x_0)f(x_0)=12-x_0 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$1+(4-x_0)\cdot 1=12-x_0 \Rightarrow 5=12$, που είναι άτοπο.

Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Έχουμε λοιπόν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο R, αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R. Επομένως η συνάρτηση f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R με $f'(0)=\frac{1}{8}>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Από υπόθεση είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta\in R$

- Για κάθε x κοντά στο $-\infty$ $(x<0)$ από υπόθεση είναι:

$$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{4-x}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}=\frac{12-x}{x^2} \quad (4)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{12-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$, οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\right)^2+\lim_{x\to-\infty}\frac{4-x}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{12-x}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2+\lambda(-1)=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=1 \quad (5)$$

Όμως για κάθε x κοντά στο $-\infty$ $(x<0)$ είναι:

$$2f(x) > x+1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} 2\frac{f(x)}{x} < 1+\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2\frac{f(x)}{x}\right) \le \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2\lambda \le 1 \Leftrightarrow \lambda \le \frac{1}{2} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) προκύπτει ότι $\lambda = 0$

- Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \beta \quad \text{και} \quad \lambda = 0,$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta \quad (7)$$

Για κάθε x κοντά στο $-\infty$ $(x<0)$ από υπόθεση είναι:

$$f^2(x) + (4-x)f(x) = 12-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-x)f(x) = 12-x-f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{12-x}{4-x} - f^2(x)\cdot\frac{1}{4-x} \quad (8)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{12-x}{4-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{4-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-x} = 0$, οπότε από τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{12-x}{4-x} - \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\right)^2 \cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 1-\beta^2\cdot 0 \Rightarrow \beta = 1$$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Από τη σχέση (7) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \beta = 1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$2f(x) > x+1 \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \quad \text{με} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) = +\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Άρα:

$$f(A) = (1, +\infty)$$

δ) Για $x = 12$ από υπόθεση είναι:

$$f^2(12) - 8f(12) = 0 \Leftrightarrow f(12)\cdot\left(f(12)-8\right) = 0 \Leftrightarrow f(12) = 0 \text{ ή } f(12) = 8$$

Για κάθε $x \in R$ είναι $2f(x) > x+1$, οπότε για $x = 12$ προκύπτει $2f(12) > 13 \Leftrightarrow f(12) > \frac{13}{2}$

Άρα:

$$f(12) = 8$$

Για $x=12$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$2f(12)f'(12)-f(12)-8f'(12)=-1 \overset{f(12)=8}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 16f'(12)-8-8f'(12)=-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8f'(12)=7 \Leftrightarrow f'(12)=\frac{7}{8}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 12}\frac{f(x)-x+4}{x-12} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 12}\frac{\left(f(x)-x+4\right)'}{(x-12)'}=$$
$$\lim_{x\to 12}\left(f'(x)-1\right)=f'(12)-1=\frac{7}{8}-1=-\frac{1}{8}$$

ΘΕΜΑ 19ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{(x^2+1)h}-1\right)\left(f(x)-f(x+2h)\right)}{4h^2}=xf(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης.

γ) Σημείο $M\left(x,f(x)\right),\ x>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Αν N είναι το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ και K, Λ οι προβολές των N, M αντιστοίχως στον άξονα $x'x$, να προσδιορίσετε τις κορυφές K, Λ, M, N ώστε το εμβαδόν του τετράπλευρου ΚΛΜΝ να γίνεται μέγιστο.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{(x^2+1)(e^x-1)}{x^2-x+1}=x$$

ε) Να υπολογίσετε:

i) Το όριο $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)f(x)}{2\etaμx+3}$

ii) Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)f(x)}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x^2+1)h}-1}{h}=(x^2+1)\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x^2+1)h}-1}{(x^2+1)h}=x^2+1$$

αφού

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x^2+1)h}-1}{(x^2+1)h} \overset{(x^2+1)h=u}{=} \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=\left.\frac{d(e^u)}{du}\right|_{u=0}=1$$

και

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+2h)}{2h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\overset{2h=u}{=}-\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}=-f'(x)$$

Οπότε έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{(x^2+1)h}-1\right)\left(f(x)-f(x+2h)\right)}{4h^2}=xf(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x^2+1)h}-1}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+2h)}{2h}=xf(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+1)f'(x)=xf(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+1)f'(x)+(x^2+1)'f(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+1)f(x)=c,\ c\in R$$

Επιπλέον είναι:

$$f(0)=1$$

Οπότε:

$$c=(0+1)f(0)\Rightarrow c=1$$

Επομένως:

$$(x^2+1)f(x)=1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2+1},\ x\in R$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow -2x=0\Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}>0\Leftrightarrow -2x>0\Leftrightarrow x<0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,0\right]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=0$ με μέγιστη τιμή $f(0)=1$

Ε.Μ.Ε.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2+2x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{8x^2-2x^2-2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Είναι:

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}=0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}>0 \Leftrightarrow 3x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x)>0$ στο $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x)<0$ στο $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, διότι είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και $f''(x)>0$ στο $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
- Η συνάρτηση f'' μηδενίζεται στο $x_0=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, δηλαδή το $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- Η συνάρτηση f'' μηδενίζεται στο $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, δηλαδή το $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

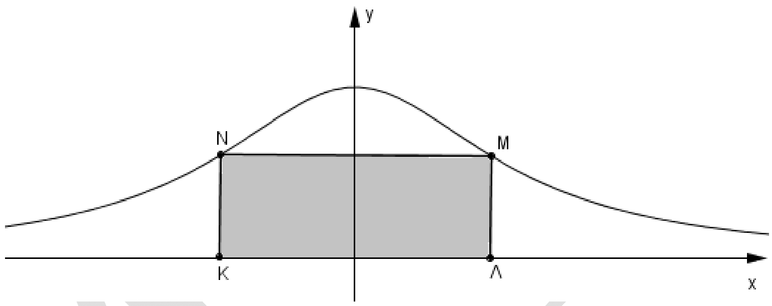
Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Άρα η ευθεία $y=0$ δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f τόσο στο $-\infty$ όσο και στο $+\infty$

γ) Αν $M(x, f(x))$ τυχαίο σημείο της C_f με $x>0$, τότε το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $N(-x\,,\,f(x))$ και επειδή η f είναι άρτια, ισχύει $f(x)=f(-x)$, οπότε $N(-x\,,\,f(-x))$, δηλαδή το σημείο N είναι πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Το τετράπλευρο ΚΛΜΝ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και τις γωνίες του ορθές, άρα είναι ορθογώνιο.

Αν $E(x)$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου, τότε έχουμε:

$$E(x) = (K\Lambda)\cdot(\Lambda M) = 2x\cdot\frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1},\quad x>0$$

Για κάθε $x>0$ η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$E'(x) = \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Είναι:

- $E'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$

- $E'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης Ε είναι ο παρακάτω:

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		↗	1	↘	
			Μέγιστο		

Η συνάρτηση Ε παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=1$, οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ γίνεται μέγιστο όταν $x=1$, οπότε οι ζητούμενες κορυφές του ορθογωνίου είναι τα σημεία $K(-1,\,0)$, $\Lambda(1,\,0)$, $M\left(1,\,\dfrac{1}{2}\right)$ και $N\left(-1,\,\dfrac{1}{2}\right)$.

δ) Για $x \in R$ έχουμε:

$$\frac{(x^2+1)(e^x-1)}{x^2-x+1} = x \Leftrightarrow (x^2+1)e^x - x^2 - 1 = x^3 - x^2 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)e^x = x(x^2+1)+1 \Leftrightarrow e^x = x + \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - x = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = e^x - x, \quad (1)$$

Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in R$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Επιπλέον, από την γνωστή ανισοϊσότητα $e^x \ge x+1$ που επίσης ισχύει για κάθε $x \in R$, προκύπτει ότι $e^x - x \ge 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \big(f(x) = 1 \text{ και } e^x - x = 1\big) \Leftrightarrow x = 0$$

ε) **i)** Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$-1 \le ημx \le 1 \Rightarrow -2 \le 2ημx \le 2 \Rightarrow 1 \le 2ημx + 3 \le 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2ημx+3} \ge \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{(e^x+1)f(x)}{2ημx+3} \ge \frac{1}{5}\cdot\frac{e^x+1}{x^2+1} \quad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x^2+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{e^x+1}{x^2+1}\right) = +\infty$$

Οπότε λόγω της σχέσης (2), συμπεραίνουμε ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)f(x)}{2ημx+3} = +\infty$

ii) Έστω I το ολοκλήρωμα του οποίου ζητείται ο υπολογισμός, δηλαδή:

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)f(x)} = \int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{e^x+1}dx$$

Αν θέσουμε $x = -u$, τότε έχουμε $dx = -du$, οπότε είναι $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ και

$$I = -\int_{1}^{-1}\frac{u^2+1}{e^{-u}+1}du = \int_{-1}^{1}\frac{(u^2+1)e^u}{e^u+1}du$$

Οπότε:

$$2I = I + I = \int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)}{e^x+1}dx + \int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)e^x}{e^x+1}dx = \int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)(e^x+1)}{e^x+1}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}+1 = \frac{8}{3}$$

Άρα:

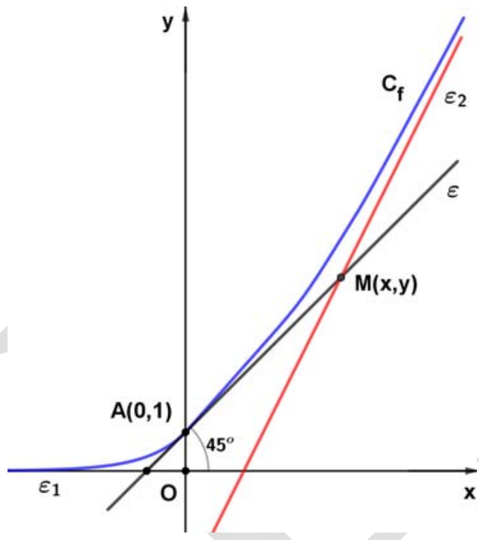
$$I = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ 20ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας και κυρτής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή παράγωγο.

Η γραφική παράσταση C_f της f έχει ασύμπτωτες τις ευθείες: $\varepsilon_1: y=0$ στο $-\infty$ και την $\varepsilon_2: y=2x-3$ στο $+\infty$.

Η ευθεία ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.



α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = ...$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$ **iv)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-2x\right] = ...$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\cdot ημ\dfrac{1}{f(x)}\right]$ **ii)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln f(x)}{f(x)-2x-1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1}, θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

ε) Να αποδείξετε ότι:

i) Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση $y=x+1$ και να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2

ii) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx > 18$.

ΛΥΣΗ

α) i) Η ευθεία $\varepsilon_1: y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

ii) Η ευθεία $\varepsilon_2: y=2x-3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right)=+\infty$

iv) Η ευθεία $\varepsilon_2: y=2x-3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=-3$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Οπότε:

$$f(A)=(0,+\infty)$$

γ) i) Θέτουμε $u=\dfrac{1}{f(x)}>0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]=\lim_{u\to0^+}\left(\frac{1}{u^2}\cdot\eta\mu u\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{\eta\mu u}{u}\right)=+\infty\text{, διότι}$$

- $\lim\limits_{u\to0^+}\left(\dfrac{1}{u}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{u\to0^+}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=1$

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)=1$.

Άρα:

$$\lim_{x\to0}\left(\ln f(x)\right)=\ln 1=0$$

Επειδή η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο R, έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln[f(x)]}{f(x)-2x-1}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln[f(x)]\right)'}{\left(f(x)-2x-1\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{f'(x)-2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)\left(f'(x)-2\right)}=\frac{f'(0)}{f(0)\left(f'(0)-2\right)}=\frac{1}{1\cdot(1-2)}=-1\text{, αφού } f'(0)=\varepsilon\varphi 45^0=1$$

δ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, επομένως η f είναι «$1-1$», οπότε αντιστρέφεται. Η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f ως προς την ευθεία $y=x$. Άρα αντιμεταθέτοντας τις μεταβλητές x,y στις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1: y=0$ και $\varepsilon_2: y=2x-3$, οι ασύμπτωτες της $C_{f^{-1}}$ είναι οι ευθείες $\zeta_1: x=0$ και $\zeta_2: x=2y-3 \Leftrightarrow \zeta_2: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$, οι οποίες είναι συμμετρικές των ευθειών ε_1 και ε_2, αντιστοίχως, ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) i) Είναι:

$$f(0)=1 \quad\text{και}\quad f'(0)=1$$

οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, 1)$ έχει εξίσωση:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x+1.$$

Έστω $M(x,y)$ το σημείο τομής των ευθειών ε: $y=x+1$ και $\varepsilon_2: y=2x-3$.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου M λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x+1 = 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

Άρα $M(4,5)$

ii) Είναι:

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx \qquad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή, άρα για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$f(x) \geq x+1$ (το «ίσον» ισχύει μόνο για $x = 0$)

Οπότε

$$\int_0^4 f(x)dx > \int_0^4 (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^4 = 12 \quad (2)$$

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f βρίσκεται «πάνω» από την ασύμπτωτή της $\varepsilon_2 : y = 2x-3$, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$f(x) > 2x-3$

Επομένως έχουμε:

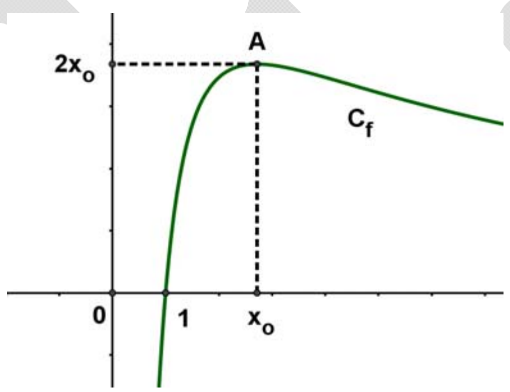
$$\int_4^5 f(x)dx > \int_4^5 (2x-3)dx = \left[x^2 - 3x\right]_4^5 = (5^2 - 3\cdot 5) - (4^2 - 3\cdot 4) = 6 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) οπότε έχουμε:

$$\int_0^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx > 12 + 6 = 18 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \int_0^5 f(x)dx > 18$$

ΘΕΜΑ 21ο



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : (0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν:

- **Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.**
- **Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x_0 με τιμή $f(x_0) = 2x_0$.**
- **$f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, x_0]$.**
- **Έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 0$.**

α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f(x)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+f(x)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-2x}{(x-x_0)f(x)}$

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $0 < \dfrac{2x_0}{x_0-1} < f'(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν $E(\Omega)$ το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = x_0$, να αποδείξετε ότι:

$$E(\Omega) < 2x_0(x_0 - 1)$$

ΛΥΣΗ

α) i) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και συνεχής, οπότε είναι:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$$

Για $0 < x < 1$ έχουμε $f(x) < 0$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Για $1 < x < x_0$ έχουμε $f(x) > 0$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{f(x)},$$

οπότε δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

ii) Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + f(x)}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ είναι της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

Διαιρώντας με $x \neq 0$ τους όρους του κλάσματος έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x+f(x)}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{f(x)}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}} \qquad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 0$.

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad (2)$$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}{x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - \dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right) = 1 \quad (3), \text{ διότι } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+f(x)}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{f(x)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}\overset{(2)}{\underset{(3)}{=}}\frac{1+0}{1}=1$$

iii) Για x κοντά x_0 έχουμε:

$$\frac{f(x)-2x}{(x-x_0)f(x)}=\left(\frac{f(x)-2x_0}{x-x_0}-\frac{2(x-x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\frac{1}{f(x)}=\left(\frac{f(x)-2x_0}{x-x_0}-2\right)\cdot\frac{1}{f(x)}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-2x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$,

  αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(0,+\infty)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(x_0)}=\frac{1}{2x_0}$,

  αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0\in(0,+\infty)$ και $f(x_0)=2x_0\neq 0$

Οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-2x}{(x-x_0)f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-2x_0}{x-x_0}-2\right)\cdot\frac{1}{f(x)}=\left(f'(x_0)-2\right)\frac{1}{2x_0}\overset{\text{Fermat}}{\underset{f'(x_0)=0}{=}}-\frac{1}{x_0}$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in(0,+\infty)$, οπότε από το Θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(x_0)=0$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x_0)$, διότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $[1,x_0]\subseteq(0,+\infty)$. Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1,x_0]$. Δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x_0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}\overset{f(1)=0}{\underset{f(x_0)=2x_0}{\Leftrightarrow}}f'(\xi)=\frac{2x_0}{x_0-1}$$

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,x_0]$, οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,x_0)\subseteq(0,x_0]$.

Επειδή $1<\xi<x_0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, έχουμε:

$$f'(1)>f'(\xi)>f'(x_0)\overset{\text{Fermat}}{\underset{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow}}0<\frac{2x_0}{x_0-1}<f'(1)\quad(4)$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $x_1\in(1,x_0)$ είναι:

$$(\varepsilon): y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$$

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχουμε:

$$0-f(x_1)=f'(x_1)(0-x_1)\Leftrightarrow x_1f'(x_1)-f(x_1)=0\quad(5)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in(1,x_0)$ για το οποίο ισχύει η σχέση (5).
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$, η οποία είναι ορισμένη και συνεχή στο $[1,x_0]$

Ε.Μ.Ε.

Έχουμε:

- $\varphi(1) = f'(1) - f(1) = f'(1) > 0$, λόγω της σχέσης (4)
- $\varphi(x_0) = x_0 f'(x_0) - f(x_0) \underset{f'(x_0)=0}{\overset{\text{Fermat}}{=}} -2x_o < 0$, αφού $x_o > 0$

Επομένως η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, x_0)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει η σχέση (5)

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, x_0]$ με:

$$\varphi'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = xf''(x)$$

Για κάθε $x \in (1, x_0) \subseteq (0, x_0]$ είναι $\varphi'(x) = xf''(x) < 0$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x_0]$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, x_0]$

Επομένως το $x_1 \in (1, x_0)$ για το οποίο ικανοποιείται η σχέση (5) είναι μοναδικό.

δ) Από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στο διάστημα $[1, x_0]$ παρατηρούμε ότι:

$$f(1) \le f(x) \le f(x_0) \Rightarrow 0 \le f(x) \le 2x_0, \text{ για κάθε } x \in [1, x_0]$$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ και $x = x_0$

Επομένως:

$$\int_1^{x_0} f(x)\,dx < \int_1^{x_0} 2x_0\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{x_0} f(x)\,dx < 2x_0(x_0 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{x_0} f(x)\,dx < 2x_0(x_0 - 1) \Rightarrow$$

Είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^{x_0} f(x)\,dx$$

Οπότε:

$$E(\Omega) < 2x_0(x_0 - 1)$$

Σημειώσεις:

I) Από το σχήμα που δόθηκε, μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι, το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τις ευθείες $x=1$, $x=x_0$ και $y=0$, $y=2x_0$

II) Το όριο του ερωτήματος **α) ii)** μπορεί να υπολογιστεί και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ορίων, αφού εύκολα προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + f(x)}{\sqrt{x^2+1} - 1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1} - 1} + \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1} - 1} \right)$$

και τα επιμέρους όρια υπολογίζονται εύκολα

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - 1} = \ldots = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1} - 1} = \ldots = 0$$

ΘΕΜΑ 22ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με $f(1)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(x)\ge x\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=1$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$

Αν επιπλέον ισχύει $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=1$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x\in[1,e]$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο διάστημα $[1,e]$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} διέρχεται από το σημείο $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2},\sqrt{e}\right)$ και στη συνέχεια θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της A

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,e]$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\ln\dfrac{e+1}{2}<\dfrac{e}{e+1}$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f(x)\ge x\ln x \Leftrightarrow f(x)-x\ln x\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge g(1)$$

Επομένως η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=f'(x)-\ln x-1$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=1$ με $g'(1)=f'(1)-1$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα ισχύει:

$$g'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=1$$

β) 1ος τρόπος:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, άρα για $x\ne 1$ είναι:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Όμως $f(1)=0$ και $f'(1)=1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1 \qquad (1)$$

Ε.Μ.Ε.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x$, $x \in (0,+\infty)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x) = \dfrac{1}{x}$, άρα και στο $x_0 = 1$ με $h'(1) = 1$

Για κάθε $x \neq 1$ είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1)$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad (2)$$

Για κάθε $x \neq 1$ είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{f(x)}{x-1}}{\dfrac{\ln x}{x-1}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}} \overset{(1),(2)}{=} \frac{1}{1} = 1$$

$2^{ος}$ τρόπος:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι και συνεχής. Επομένως η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{\ln x}$ θα είναι συνεχής στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Άρα το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $f(x) \geq x\ln x$, οπότε:

- Για $x > 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)}{\ln x} \geq x \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{\ln x} \geq \lim_{x\to 1^+} x \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{\ln x} \geq 1$$

- Για $0 < x < 1$ έχουμε:

$$\frac{f(x)}{\ln x} \leq x \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{\ln x} \leq \lim_{x\to 1^-} x \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{\ln x} \leq 1$$

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$ και είναι πραγματικός αριθμός τα πλευρικά όρια θα είναι ίσα, άρα θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x} = 1$.

γ) **$1^{ος}$ τρόπος:**

Για κάθε $x \in [1,e] \subseteq (0,+\infty)$ είναι:

$$f(x) \geq x\ln x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \ln x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} - \ln x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0 \quad (3)$$

όπου $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x} - \ln x$, $x \in [1,e]$

Είναι:

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e (x)'\ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'dx = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e x\frac{1}{x}dx =$$

$$= e\cdot 1 - 1\cdot 0 - \int_1^e 1\,dx = e - 0 - 1(e-1) = e - e + 1 = 1 \quad (4)$$

Έχουμε:

$$\int_1^e \varphi(x)dx = \int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} - \ln x\right)dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx - \int_1^e \ln x dx \overset{(4)}{=} 1 - 1 = 0$$

Παρατηρούμε ότι:

- $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x} - \ln x \geq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και
- $\displaystyle\int_1^e \varphi(x)dx = 0 \quad (5)$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [1,e]$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) \neq 0$, τότε $\varphi(x_0) > 0$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,e]$, αλλά η συνεχής συνάρτηση φ δεν είναι παντού μηδέν, οπότε $\displaystyle\int_1^e \varphi(x)dx > 0$, που είναι άτοπο λόγω της σχέσης (5)

Επομένως για κάθε $x \in [1,e]$ είναι:

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x \Leftrightarrow f(x) = x\ln x$$

2^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in [1,e] \subseteq (0,+\infty)$ είναι:

$$f(x) \geq x\ln x \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \ln x \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx \geq \int_1^e \ln x dx \quad (3\alpha)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $f(x) = x\ln x$ για κάθε $x \in [1,e]$

Είναι:

$$\int_1^e \ln x dx = ... = 1 \quad (4\alpha)$$

Δηλαδή η σχέση (3α) ισχύει ως ισότητα, οπότε αναγκαστικά, $f(x) = x\ln x$ για κάθε $x \in [1,e]$

i) Για κάθε $x \in [1,e]$ είναι:

$$f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1 > 0,$$

αφού για $1 \leq x \leq e \Rightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$, άρα $1 \leq \ln x + 1 \leq 2$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,e]$, άρα είναι και «1−1», οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,e]$ έχουμε:

$$A_{f^{-1}} = f(A) = [f(1), f(e)] = [0, e]$$

ii) Το σημείο $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right) \in C_{f^{-1}}$ αν και μόνο αν το συμμετρικό του ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$, δηλαδή το σημείο $B\left(\sqrt{e}, \dfrac{\sqrt{e}}{2}\right) \in C_f$

Είναι:

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\ln\sqrt{e} = \sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}\ln e = \frac{\sqrt{e}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

Άρα το σημείο $B\left(\sqrt{e}, \dfrac{\sqrt{e}}{2}\right) \in C_f$, οπότε το σημείο $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right) \in C_{f^{-1}}$

1ος τρόπος:

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $[0, e]$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right)$ είναι:

$$\varepsilon_A : y - f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$$

Είναι:

- $f\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right) = \sqrt{e}$
- Για κάθε $x \in [0, e]$ είναι $f(f^{-1}(x)) = x \quad (6)$

Η συνάρτηση $f o f^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, e]$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (6) έχουμε:

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = (x)' \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \quad (7)$$

Για $x = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$ από τη σχέση (7) έχουμε:

$$f'\left(f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)\right) \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \overset{f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \sqrt{e}}{\Rightarrow} f'\left(\sqrt{e}\right) \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\ln\sqrt{e} + 1\right) \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

Επομένως:

$$\varepsilon_A : y - \sqrt{e} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) \Rightarrow y - \sqrt{e} = \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{e}}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{e}}{3}$$

2ος τρόπος:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης} - 3^{ης}$ γωνίας των αξόνων, δηλαδή την ευθεία $y = x$

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \sqrt{e}$$

Οπότε το σημείο $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}, \sqrt{e}\right) \in C_{f^{-1}}$ και το συμμετρικό του ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$, δηλαδή το σημείο $B\left(\sqrt{e}, \dfrac{\sqrt{e}}{2}\right) \in C_f$

Βρίσκουμε την εφαπτομένη ε_B της C_f στο σημείο της $B\left(\sqrt{e}\,,\dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)$

$$\varepsilon_B : y - f\left(\sqrt{e}\right) = f'\left(\sqrt{e}\right)\left(x - \sqrt{e}\right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \frac{\sqrt{e}}{2} = \left(\ln\sqrt{e} + 1\right)\cdot\left(x - \sqrt{e}\right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{3}{2}\cdot\left(x - \sqrt{e}\right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{e}}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y = \frac{3}{2}x - \sqrt{e}$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη ε_A της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2},\sqrt{e}\right)$ είναι συμμετρική της ε_B ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$.

Λύνουμε την εξίσωση $\varepsilon_B : y = \dfrac{3}{2}x - \sqrt{e}$ ως προς x στο διάστημα $[1,e]$.

Έχουμε:

$$y = \frac{3}{2}x - \sqrt{e} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = y + \sqrt{e} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + \frac{2\sqrt{e}}{3}$$

Αντιμεταθέτουμε τις μεταβλητές x και y, οπότε είναι $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2\sqrt{e}}{3}$

Άρα η εφαπτομένη ε_A της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2},\sqrt{e}\right)$ είναι $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2\sqrt{e}}{3}$

iii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,e]$ και για κάθε $x \in (1,e)$ είναι $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,e]$.

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[1,\dfrac{e+1}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{e+1}{2},e\right]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in \left(1,\dfrac{e+1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{e+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{e+1}{2} - 1} = \dfrac{f\left(\frac{e+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{e-1}{2}}$

- $\xi_2 \in \left(\dfrac{e+1}{2},e\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(e) - f\left(\frac{e+1}{2}\right)}{e - \frac{e+1}{2}} = \dfrac{f(e) - f\left(\frac{e+1}{2}\right)}{\frac{e-1}{2}}$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,e]$, επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

$$1<\xi_1<\frac{e+1}{2}<\xi_2<e\Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f\left(\frac{e+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{e-1}{2}}<\frac{f(e)-f\left(\frac{e+1}{2}\right)}{\frac{e-1}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{e+1}{2}\right)-f(1)<f(e)-f\left(\frac{e+1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f\left(\frac{e+1}{2}\right)<f(1)+f(e)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{e+1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)<1\cdot\ln1+e\ln e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e+1)\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)<e\Rightarrow\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)<\frac{e}{e+1}$$

Σημείωση:

Στα ερωτήματα (γ) i) και (γ) ii), γράφοντας f^{-1} εννοούμε την αντίστροφη της συνάρτησης $f:[1,e]\to R$ με $f(x)=x\ln x$, («περιορισμός» της $f:(0,+\infty)\to R$ στο διάστημα $[1,e]$).

ΘΕΜΑ 23ο

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$, με $f(e)=g(1)=1$, $f(e^{-1})=-1$ και $g(e)=e^{-1}$, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

- **$f'(x)=g(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)**
- **$xf(x)f'(x)+x^2g^2(x)+x^2f(x)g'(x)=1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (2)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)g(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)g(x)$, $x\in(0,+\infty)$, τότε:

β) i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $x^e\le e^x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ) Να βρείτε:

i) Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h.

ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν E του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_h της συνάρτησης h, την εφαπτομένη της ε και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

ε) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g.

Ε.Μ.Ε.

ΛΥΣΗ

α) Από τις σχέσεις (1) και (2) για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf(x)g(x) + x^2 f'(x)g(x) + x^2 f(x)g'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$f(x)g(x) + xf'(x)g(x) + xf(x)g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\left(xf(x)g(x)\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow xf(x)g(x) = \ln x + c$$

Για $x = e$ έχουμε:

$$ef(e)g(e) = \ln e + c \Leftrightarrow e \cdot 1 \cdot e^{-1} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$xf(x)g(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x)g(x) = \frac{\ln x}{x},\ x \in (0,+\infty)$$

β) i) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$h'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων της συνάρτησης h είναι ο παρακάτω:

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h(e)$	$\searrow$	

Μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0,e]$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,e)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[e,+\infty)$ και $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (e,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$
- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$ με μέγιστη τιμή $h(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$

ii) Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$, οπότε για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$h(x) \le h(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{\ln e}{e} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} e\ln x \le x\ln e \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln e^x \Leftrightarrow x^e \le e^x$$

γ) i) Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{-\infty}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right) = -\infty\text{, διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$$

Επομένως η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H.}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h.

ii) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, άρα ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_h της συνάρτησης h σε κάθε σημείο της. Αν $A\left(x_0, h(x_0)\right)$ το σημείο επαφής και (ε) η εφαπτομένη της C_h στο A, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon):\ y-h(x_0)=h'(x_0)\cdot(x-x_0)\Rightarrow y-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\cdot(x-x_0) \quad (3).$$

Όμως το $O(0,0)\in(\varepsilon)$, αν και μόνο αν, η εξίσωση (3) επαληθεύεται για $x=0$ και $y=0$.

Έτσι έχουμε:

$$0-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\cdot(0-x_0)\Leftrightarrow\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\cdot x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0=1-\ln x_0\Leftrightarrow 2\ln x_0=1\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_0=e^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x_0=\sqrt{e}$$

Για $x_0=\sqrt{e}$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_h στο σημείο $A\left(\sqrt{e}, h\left(\sqrt{e}\right)\right)$ είναι:

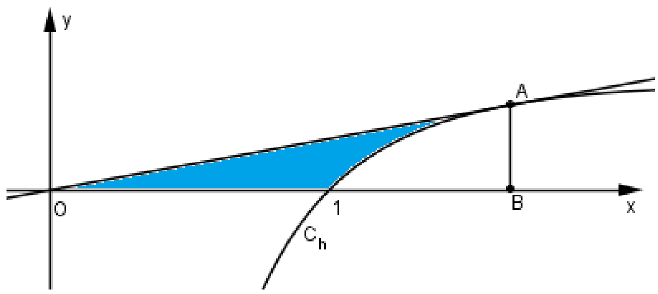
$$(\varepsilon):\ y-h\left(\sqrt{e}\right)=h'\left(\sqrt{e}\right)\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)\Rightarrow y-\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}=\frac{1-\ln\sqrt{e}}{e}\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-\frac{\frac{1}{2}\cdot\ln e}{\sqrt{e}}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\ln e}{e}\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)\Rightarrow y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}\cdot x-\frac{1}{2e}\cdot\sqrt{e}\Rightarrow y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}\cdot x-\frac{1}{2\sqrt{e}}\Rightarrow y=\frac{1}{2e}\cdot x$$

δ) Το εμβαδόν E του επιπέδου χωρίου, το οποίο ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_h της συνάρτησης h, την εφαπτομένη της ε και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$, είναι:

$$E=(OAB)-\int_1^{\sqrt{e}}h(x)dx$$



Είναι:

- $(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OB)\cdot(BA)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{e}\cdot h(\sqrt{e})=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{4}$

- $\int_1^{\sqrt{e}} h(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^{\sqrt{e}}\ln x\cdot(\ln x)'dx=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}=\frac{\ln^2\sqrt{e}}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}=$

$$=\frac{(\ln\sqrt{e})^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{8}$$

Επομένως έχουμε:

$$E=(OAB)-\int_1^{\sqrt{e}} h(x)dx=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

ε) ♦ Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)g(x)=\frac{\ln x}{x}\overset{(1)}{\Rightarrow}f(x)f'(x)=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)f'(x)=\ln x\cdot(\ln x)'\Rightarrow\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\frac{\ln^2 x}{2}+c\Rightarrow f^2(x)=\ln^2 x+2c$$

Για $x=e$ έχουμε:

$$f^2(e)=\ln^2 e+2c\Leftrightarrow 1=1+2c\Leftrightarrow c=0$$

Επομένως:

$$f^2(x)=\ln^2 x,\ x\in(0,+\infty)$$

Είναι:

$$f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow \ln^2 x=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $(0,+\infty)$ μοναδική ρίζα την $x=1$

- Η συνάρτηση f στο $(0,1)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε στο διάστημα αυτό διατηρεί σταθερό πρόσημο.

  Επομένως για κάθε $x\in(0,1)$:

  ή θα είναι $f(x)>0$ ή θα είναι $f(x)<0$

  Επειδή $f(e^{-1})=-1<0$ θα είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$

  Οπότε έχουμε:

  $$f(x)=\ln x,\ x\in(0,1)$$

- Η συνάρτηση f στο $(1,+\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε στο διάστημα αυτό διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επομένως για κάθε $x \in (1,+\infty)$:

ή θα είναι $f(x) > 0$ ή θα είναι $f(x) < 0$

Επειδή $f(e) = 1 > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$

Οπότε έχουμε:

$$f(x) = \ln x\,,\ x \in (1,+\infty)$$

Επειδή $f(1) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = \ln x\,,\ x \in (0,+\infty) \qquad (4)$$

- Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$g(x) = f'(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}\,,\ x \in (0,+\infty)$$

Ε.Μ.Ε.