ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ 2012
ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο (8ο – 2012):

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(x)\ge e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)**
- **$f(x)f(-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (2)**

α) Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$

β) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

iii) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\ln\alpha+\ln\beta+\ln\gamma=1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha e^{\beta+\gamma}+\beta e^{\alpha+\gamma}+\gamma e^{\alpha+\beta}\ge 3e^3$$

ΛΥΣΗ

α) Για $x=0$ από τις σχέσεις (1) και (2) αντίστοιχα έχουμε:

$$f(0)\ge 1 \quad \text{και} \quad f^2(0)=1$$

Άρα $f(0)=1$

Επίσης, αν θέσουμε όπου x το $-x$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(-x)\ge e^{-x} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)}\ge\frac{1}{e^x}\Rightarrow f(x)\le e^x,\ x\in\mathbb{R} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

β) i) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g(x)=\frac{e^x}{x}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$g'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Είναι:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}>0\Leftrightarrow x>1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=e$

ii) Είναι:

○ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\cdot e^x\right)=+\infty$

○ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0\,,\,1]$, άρα

$$g(\Delta_1)=\Big[g(1)\,,\ \lim_{x\to0^+}g(x)\Big)=[e\,,\,+\infty)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1\,,\,+\infty)$, άρα

$$g(\Delta_2)=\Big[g(1)\,,\ \lim_{x\to+\infty}g(x)\Big)=[e\,,\,+\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)=[e\,,\,+\infty)$$

iii) Είναι:

- $\ln\alpha+\ln\beta+\ln\gamma=1 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma)=1 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma=e \qquad (4)$
- $g(\alpha)=\dfrac{e^\alpha}{\alpha}\ge e\,,\ \ g(\beta)=\dfrac{e^\beta}{\beta}\ge e$ και $g(\gamma)=\dfrac{e^\gamma}{\gamma}\ge e$

Επομένως

$$g(\alpha)g(\beta)+g(\beta)g(\gamma)+g(\gamma)g(\alpha)\ge 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{e^\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e^\beta}{\beta}+\frac{e^\beta}{\beta}\cdot\frac{e^\gamma}{\gamma}+\frac{e^\gamma}{\gamma}\cdot\frac{e^\alpha}{\alpha}\ge 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma e^{\alpha+\beta}+\alpha e^{\beta+\gamma}+\beta e^{\gamma+\alpha}}{\alpha\beta\gamma}\ge 3e^2 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\alpha e^{\beta+\gamma}+\beta e^{\gamma+\alpha}+\gamma e^{\alpha+\beta}}{e}\ge 3e^2 \Rightarrow$$

$$\alpha e^{\beta+\gamma}+\beta e^{\gamma+\alpha}+\gamma e^{\alpha+\beta}\ge 3e^3$$

ΘΕΜΑ 2ο (9ο – 2012):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(R) = R$, οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\text{συν}^2 f(x) + 4f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in R \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = \text{ημ}x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

- $\text{συν}f(x_1) = \text{συν}f(x_2) \Rightarrow \text{συν}^2 f(x_1) = \text{συν}^2 f(x_2) \qquad (2)$
- $4f(x_1) = 4f(x_2) \qquad (3)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\text{συν}^2 f(x_1) + 4f(x_1) = \text{συν}^2 f(x_2) + 4f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1−1», οπότε αντιστρέφεται.

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το R, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι το R

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} απομένει να βρούμε τον τύπο της

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\text{συν}^2 y + 4y = f^{-1}(y) \quad \text{ή} \quad f^{-1}(y) = 4y + \text{συν}^2 y$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι:

$$f^{-1}: R \to R \text{ με } f^{-1}(x) = 4x + \text{συν}^2 x$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η συνάρτηση $\text{συν}f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, όπως επίσης και η συνάρτηση $\text{συν}^2 f(x)$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$2\text{συν}f(x)\left(\text{συν}f(x)\right)' + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$-2\text{συν}f(x)\text{ημ}f(x)f'(x) + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(4 - \text{ημ}2f(x)\right) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{4 - \text{ημ}2f(x)} > 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

γ) Για $x=0$ έχουμε:

$$f^{-1}(0)=1 \Leftrightarrow f(1)=0$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

Όμως:

$$f'(1)=\frac{1}{4-\eta\mu 2f(1)}\overset{f(1)=0}{=}\frac{1}{4}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\frac{1}{4}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f^{-1}(x)-\eta\mu x=4x+\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x\,,\quad x\in R$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}\,,\,0\right]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot h(0)=\underbrace{\frac{1+\sqrt{2}-2\pi}{2}}_{<0}\cdot 1<0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}\,,\,0\right)$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{4}\,,\,0\right)$ είναι:

$$h'(x)=4-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=\underbrace{4-\sigma\upsilon\nu x}_{>0}+(\underbrace{-\eta\mu 2x}_{>0})>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{4}\,,\,0\right)$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 3ο (10ο – 2012):

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0\,,+\infty)\to R$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο α με $\alpha>0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y>0$ (1)**
- **$f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ (2)**

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$

β) $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$

γ) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}$ για κάθε $x>0$

Β) Αν η ευθεία $\varepsilon: x-2\sqrt{\alpha}\cdot y+\alpha=0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\alpha\,,f(\alpha))$, να βρείτε τον τύπο της f.

ΛΥΣΗ

Α) α) Για $y=1$ και $x>0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x\cdot 1)=f(x)f(1)\Leftrightarrow f(x)=f(x)f(1)\Leftrightarrow f(x)\big(1-f(1)\big)=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(1)=1 \qquad (3)$$

Για $x>0$ και $y=\dfrac{1}{x}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \qquad (4)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0\,,+\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0\,,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι :

$$f(x)>0 \quad \text{για κάθε } x\in(0\,,+\infty) \qquad (5)$$

Από την υπόθεση είναι $f(0)=0$, οπότε τελικά έχουμε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha>0$, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ (6)

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_o\in(0\,,+\infty)$

Έστω $x_o\in(0\,,+\infty)$, τότε για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ με $x\neq x_o$ θέτουμε $x=x_o\dfrac{h}{\alpha}$ με $h>0$, οπότε όταν το $x\to x_o$ το $h\to\alpha$ και έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{f\left(x_o\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_o)}{x_o\frac{h}{\alpha}-x_o}\overset{(1)}{=}\frac{f(x_o)f\left(\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_o)}{\frac{x_o(h-\alpha)}{\alpha}}=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f\left(h\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f(h)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha}\overset{(4)}{=}\frac{\alpha f(x_o)}{x_o}\cdot\frac{f(h)\frac{1}{f(\alpha)}-1}{h-\alpha}=\frac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}\cdot\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{h\to\alpha}\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}=\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}$, αφού $\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}$ σταθερά.
- $\lim\limits_{h\to\alpha}\dfrac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}\overset{(6)}{=}f'(\alpha)$

Επομένως

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to\alpha}\left(\frac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}\cdot\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}\right)=$$

$$=\lim_{h\to\alpha}\frac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}\cdot\lim_{h\to\alpha}\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}=\frac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o\in(0\,,+\infty)$ με $f'(x_o)=\dfrac{\alpha f(x_o)}{x_of(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$,

οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)} \cdot f'(\alpha) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \qquad (7)$$

Β) Είναι:

$$M(\alpha, f(\alpha)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha} \cdot f(\alpha) + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{\alpha} \cdot f(\alpha) = 2\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow f(\alpha) = \sqrt{\alpha} \qquad (8)$$

Είναι:

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) έχουμε:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow (\ell n f(x))' = \left(\frac{1}{2}\ell n x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\ell n f(x) = \frac{1}{2}\ell n x + c \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \ell n f(x) = \ell n\sqrt{x} + c, \quad x > 0 \qquad (10)$$

Για $x = \alpha$ από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ell n f(\alpha) = \ell n\sqrt{\alpha} + c \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \ell n\sqrt{\alpha} = \ell n\sqrt{\alpha} + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ell n f(x) = \ell n\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο 0 με $f(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

ΘΕΜΑ 4ο (11ο – 2012):

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha) < f'(x) < f(\beta)$ (1), όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha = \beta - 1 > 0$ (2). Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(\alpha) \cdot x$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(-\beta, \alpha)$

δ) Υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in R$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2\frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} = 4\beta - 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha\,,\,\beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha\,,\,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f\,'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f\,'(\xi) < f(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < f(\beta) \qquad (3)$$

Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 1 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$f(\beta)-f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow -f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha) > 0 \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (5) έχουμε:

$$f\,'(x) > f(\alpha) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) 1ος τρόπος:

Είναι:

$$f\,'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \overset{(4)}{=} f(\beta)-f(\alpha)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f\,'(\xi) \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)-f(\alpha) \Rightarrow 2f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

2ος τρόπος:

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = f\,'(x) - f(\alpha) \qquad (6)$

Από τις σχέσεις (1) και (6) έχουμε:

$$g'(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R

Ισχύει:

$$\alpha < \beta \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha f(\alpha) < f(\beta) - \beta f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) + (\beta-\alpha)f(\alpha) < f(\beta) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} 2f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

γ) Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ -\beta < -1 \end{cases} \Rightarrow -\beta < -1 < 0 < \alpha \qquad (7)$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-\beta\,,\,\alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-\beta\,,\,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f\,'(\xi_1) = \dfrac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha+\beta}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi_1) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) + \beta f(\alpha) - f(\alpha) < -f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha) + (\beta-1)f(\alpha) < -f(-\beta) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\alpha f(\alpha) < -f(-\beta)$$

Από τις σχέσεις (5) και (7) έχουμε:

$$2\alpha f(\alpha) > 0 \quad \text{άρα} \quad -f(-\beta) > 0, \text{ οπότε } f(-\beta) < 0 \quad (8)$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R.
- $f(-\beta)f(\alpha) < 0$, λόγω των σχέσεων (5) και (8)

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, άρα θα υπάρχει ένα $\rho \in (-\beta, \alpha)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$ (9)

δ) Είναι:

$$-\beta < \rho < \alpha < \beta$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα

$$[-\beta, \rho], \ [\rho, \alpha] \text{ και } [\rho, \beta]$$

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $x_1 \in (-\beta, \rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = \dfrac{f(\rho)-f(-\beta)}{\rho-(-\beta)} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_1) = \dfrac{-f(-\beta)}{\rho+\beta} \overset{f'(x_1)>0}{\Leftrightarrow} \rho+\beta = \dfrac{-f(-\beta)}{f'(x_1)}$
- $x_2 \in (\rho, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = \dfrac{f(\alpha)-f(\rho)}{\alpha-\rho} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_2) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha-\rho} \overset{f'(x_2)>0}{\Leftrightarrow} \alpha-\rho = \dfrac{f(\alpha)}{f'(x_2)}$
- $x_3 \in (\rho, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = \dfrac{f(\beta)-f(\rho)}{\beta-\rho} \overset{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_3) = \dfrac{f(\beta)}{\beta-\rho} \overset{f'(x_3)>0}{\Leftrightarrow} \beta-\rho = \dfrac{f(\beta)}{f'(x_3)}$

Είναι:

$$\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2\frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} = (\beta-\rho) + (\alpha-\rho) + 2(\rho+\beta) = \alpha + 3\beta \overset{(2)}{=} 4\beta - 1$$

ΘΕΜΑ 5ο (12ο – 2012):

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\eta\mu\big(f(x)\big) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \ge -\frac{1}{2}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τις ασύμπτωτες.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και η συνάρτηση ημx στο R,

άρα η συνάρτηση ημf(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ως σύνθεση παραγωγισίμων.

Η συνάρτηση $\frac{x}{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$, άρα παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ έχουμε:

$$[\eta\mu f(x)]' = \left(\frac{x}{x+1}\right)' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad (2)$$

Είναι:

$$\eta\mu^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \eta\mu^2 f(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \frac{x^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2} \qquad (3)$$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι:

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu f(x) > 0 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε:

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}\cdot f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad x\in\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι και «1 – 1» , επομένως αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως για κάθε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ υπάρχει μοναδικό $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Άρα για κάθε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η σχέση (1) γράφεται:

$$ημy = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow xημy + ημy = x \Leftrightarrow (1-ημy)x = ημy \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{ημy}{1-ημy} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{ημy}{1-ημy}$$

Επομένως:

$$f^{-1}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R \ \text{ με } \ f^{-1}(x) = \frac{ημx}{1-ημx}$$

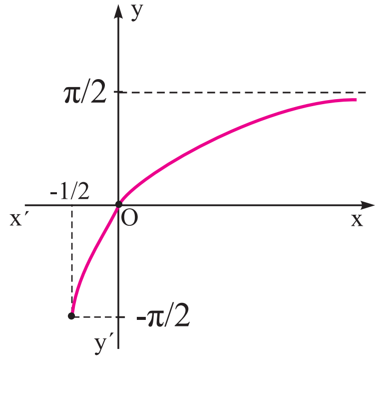
γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $f(A) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ και επειδή $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

Επομένως η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{\pi}{2}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ για $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \in R$, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

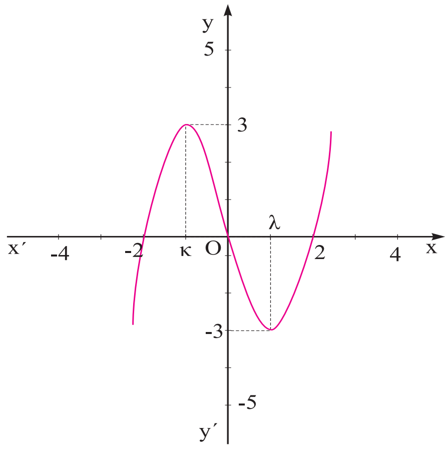
Σημείωση:

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ 6ο (13ο – 2012):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, που έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$ και της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

β) Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει ασύμπτωτες, να τις βρείτε.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτησης g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

δ) Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού, τότε:

i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ και τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x΄x$

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί $f(x) \neq 0$

Είναι:

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \quad \text{και} \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $A_g = R - \{-2, 0, 2\}$

β) • Από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, προκύπτει ότι:

○ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

○ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

• Είναι:

○ $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x < -2$, οπότε $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

○ $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x > -2$, οπότε $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της της συνάρτησης g (*)

• Είναι:

○ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-2, 0)$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

○ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της της συνάρτησης g (*)

- Είναι:
  - $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για $x\in(0\,,\,2)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x>2$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

Επομένως η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της της συνάρτησης g $(*)$

$(*)$ Για την εύρεση μιας κατακόρυφης ασύμπτωτης, ως γνωστόν, αρκεί ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια να είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Εδώ ο υπολογισμός και των δύο πλευρικών ορίων, σε κάθε περίπτωση, έγινε γιατί μας είναι απαραίτητα για την χάραξη της γραφικής παράστασης, που ζητείται στο επόμενο ερώτημα.

γ) Για κάθε $x\in A_g=R-\{-2\,,\,0\,,\,2\}$ έχουμε $g'(x)=\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ (1)

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g', σε κάθε διάστημα που ορίζεται, έχει το αντίθετο πρόσημο από αυτό που έχει η συνάρτηση f', άρα οι συναρτήσεις g και f έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας σε κάθε διάστημα.

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty\,,\,\kappa]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty\,,-2)$ και $(-2\,,\,\kappa]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\kappa\,,\,\lambda]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\kappa\,,\,0)$ και $(0\,,\,\lambda]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\lambda\,,\,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\lambda\,,\,2)$ και $(2\,,\,+\infty)$

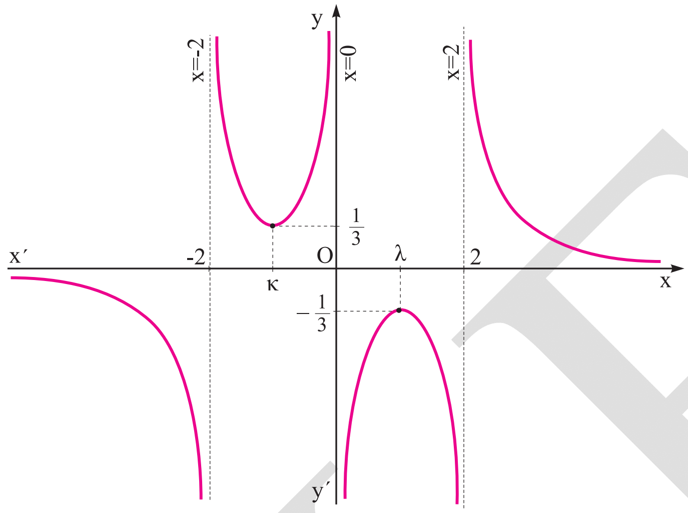
Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		κ		0		λ		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

τοπ. ελάχιστο τοπ. μέγιστο

- ♦ Η συνάρτηση g στο $x_0=\kappa$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $g(\kappa)=\dfrac{1}{f(\kappa)}=\dfrac{1}{3}$
- ♦ Η συνάρτηση g στο $x_1=\lambda$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $g(\lambda)=\dfrac{1}{f(\lambda)}=-\dfrac{1}{3}$

Η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, είναι:



δ) **i)** Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού και έχει τρεις ρίζες, τους αριθμούς $-2, 0, 2$, άρα είναι της μορφής:

$$f(x)=\alpha x(x+2)(x-2)=\alpha x\left(x^2-4\right)=\alpha\left(x^3-4x\right),\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\alpha(3x^2-4)$$

Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \alpha\left(3x^2-4\right)=0\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Άρα:

$$\kappa=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\qquad \text{και}\qquad \lambda=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Είναι:

$$f(\kappa)=3\Leftrightarrow f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=3\Leftrightarrow \alpha\left(\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3-4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)=3\Leftrightarrow$$

$$\alpha\left(-\frac{8\sqrt{3}}{9}+\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)=3\Leftrightarrow\frac{16\sqrt{3}}{9}\alpha=3\Leftrightarrow\alpha=\frac{27}{16\sqrt{3}}\Leftrightarrow\alpha=\frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Άρα:

$$f(x)=\frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3-4x\right),\quad x\in R$$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x΄x$ είναι:

$$E=\int_{-2}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{-2}^{0}f(x)\,dx-\int_{0}^{2}f(x)\,dx=$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3 - 4x\right)dx - \int_{0}^{2} \frac{9\sqrt{3}}{16}\left(x^3 - 4x\right)dx =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} - \frac{9\sqrt{3}}{16}\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(0 - 4 + 8\right) - \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(4 - 8 - 0\right) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot 4 - \frac{9\sqrt{3}}{16}\cdot\left(-4\right) = \frac{8\cdot 9\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

ΘΕΜΑ 7ο (14ο – 2012):

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{|1-\ell nx|}{x}$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν η τετμημένη του σημείου $M\left(x, f(x)\right)$ μεταβάλλεται με ρυθμό $1\,\mu/sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου ΑΟΒ, όπου $A(x,0)$, $O(0,0)$, $B(0,f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0) = 4$

γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση $(1,1)$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $x(t) = t + 1$

ii) Η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $\left[e-1, +\infty\right)$

ΛΥΣΗ

α) Για $0 < x < e$ έχουμε:

$$0 < x < e \overset{\ell n\uparrow}{\Rightarrow} \ell nx < \ell ne \Rightarrow \ell nx < 1 \Rightarrow 1 - \ell nx > 0 \text{ , οπότε } |1-\ell nx| = 1 - \ell nx$$

Για $x \geq e$ έχουμε:

$$x \geq e \overset{\ell n\uparrow}{\Rightarrow} \ell nx \geq \ell ne \Rightarrow \ell nx \geq 1 \Rightarrow 1 - \ell nx \leq 0 \text{ , οπότε } |1-\ell nx| = \ell nx - 1$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\ell nx}{x} , & 0 < x < e \\ \dfrac{\ell nx - 1}{x} , & x \geq e \end{cases}$$

Για $0 < x < e$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\frac{1-\ell nx}{x}\right)' = \frac{(1-\ell nx)'\cdot x - (1-\ell nx)\cdot(x)'}{x^2} =$$

$$=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-(1-\ell nx)\cdot 1}{x^2}=\frac{\ell nx-2}{x^2}<0$$

Για $x>e$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{\ell nx-1}{x}\right)'=\frac{(\ell nx-1)'\cdot x-(\ell nx-1)\cdot(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ell nx-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{2-\ell nx}{x^2}$$

Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2-\ell nx}{x^2}=0\Leftrightarrow 2-\ell nx=0\Leftrightarrow \ell nx=2\Leftrightarrow x=e^2$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{2-\ell nx}{x^2}<0\Leftrightarrow 2-\ell nx<0\Leftrightarrow \ell nx>2\Leftrightarrow x>e^2$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	e		e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$
		ο.ε.		τ.μ.	

Είναι:

- $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ell nx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left[(1-\ell nx)\cdot\frac{1}{x}\right]=+\infty$, γιατί
  - $\lim_{x\to 0^+}(1-\ell nx)=+\infty$
  - $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell nx-1}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ell nx-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $f(e)=\frac{\ell ne-1}{e}=\frac{1-1}{e}=0$
- $f(e^2)=\frac{\ell ne^2-1}{e^2}=\frac{2\ell ne-1}{e^2}=\frac{2\cdot 1-1}{e^2}=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$

Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $|1-\ell nx|$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως απόλυτη τιμή της συνάρτησης $1-\ell nx$, που είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών και η συνάρτηση x είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, οπότε έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,\, e]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[e,\, e^2]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3=[e^2,\, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=e$ με ελάχιστη τιμή $f(e)=0$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=e^2$ με τιμή $f(e^2)=e^{-2}$

β) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ είναι:

$$E=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot|x|\cdot|f(x)|=\frac{1}{2}\cdot\left|x\cdot\frac{1-\ell nx}{x}\right|=\frac{|1-\ell nx|}{2}$$

Άρα:

$$E(t)=\frac{|1-\ell nx(t)|}{2}$$

Επειδή $x(t_0)=4>e$ το $1-\ell nx(t_0)<0$

Άρα για $x(t)>e$ έχουμε:

$$E(t)=\frac{\ell nx(t)-1}{2} \quad \text{και} \quad E'(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t)}\cdot x'(t)$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0)=4$ είναι:

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x(t_0)}\cdot x'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{8}\ \text{τ.μ.}/\text{sec}$$

γ) i) Για $t\geq 0$ έχουμε:

$$x'(t)=1\Leftrightarrow x(t)=t+c$$

Για $t=0$ είναι:

$$x(0)=0+c \overset{x(0)=1}{\Leftrightarrow} c=1$$

Επομένως:

$$x(t)=t+1\ ,\quad t\geq 0$$

ii) Για $t\geq e-1$ έχουμε:

$$E(t)=\frac{|1-\ell n(t+1)|}{2}=\frac{\ell n(t+1)-1}{2}$$

Για $t > e-1$ έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2(t+1)} > 0 \qquad \text{και} \qquad E''(t) = -\frac{1}{2(t+1)^2} < 0$$

Η συνάρτηση $E(t)$ είναι συνεχής στο $[e-1, +\infty)$ και $E''(t) < 0$ για κάθε $t \in (e-1, +\infty)$ άρα η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 8ο (16ο – 2012):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\left(f'(x)\right)^2 - 2f'(x) + \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ **, για κάθε** $x \in R$ **(1)**
- $f'(-1) < 1 < f'(1)$ **(2)**
- $f(0) = 1$ **(3)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ **,** $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ **για κάθε** $x \in R$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ) Αν $h(x) = \ln f(x)$, $x \in R$, **τότε :**

i) Να αποδείξετε ότι $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **,** $x \in R$

ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$

iii) Να αποδείξετε ότι $h(x) > \dfrac{f(x) - x - 1}{x}$ **για κάθε** $x \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\left(f'(x)\right)^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x) - 1\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow g^2(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad (4), \text{ όπου } g(x) = f'(x) - 1,\ x \in R$$

- Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$.

Για $x = -1$ είναι $g(-1) = f'(-1) - 1 \overset{(2)}{<} 0$ οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Αφού $g(x) < 0$, για κάθε $(-\infty, 0)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} g(x) = -\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ , για κάθε } x \in (-\infty\,,\,0)$$

- Για κάθε $x \in (0\,,\,+\infty)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0\,,\,+\infty)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0\,,\,+\infty)$.

Για $x = 1$ είναι $g(1) = f'(1) - 1 \overset{(2)}{>} 0$ οπότε $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0\,,\,+\infty)$

Αφού $g(x) > 0$, για κάθε $(0\,,\,+\infty)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ , για κάθε } x \in (0\,,\,+\infty)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left(f'(0)\right)^2 - 2f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(0) - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Άρα $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, για κάθε $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + c$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0 + \sqrt{0+1} + c \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c = 0$. Άρα $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x \in R$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ (5)

γ) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \overset{(5)}{>} 0$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επίσης η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R, με:

$$f''(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+1} - x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

Είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

δ) i) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R, με

$$h'(x) = \left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in R$$

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι:

$$E = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = I_1 + I_2$$

Είναι:

- $I_1 = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
- $I_2 = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^1 (x)'\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx =$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx + \int_0^1 h'(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{2} - I_2 + \left[h(x)\right]_0^1 = \sqrt{2} - I_2 + h(1) - h(0) = \sqrt{2} - I_2 + \ln f(1) - \ln f(0) =$$

$$= \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \sqrt{2} - I_2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Είναι:

$$I_2=\sqrt{2}-I_2+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow 2I_2=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right),\ \text{οπότε}\ I_2=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$$

Επομένως:

$$E=I_1+I_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}\ \text{τ.μ}$$

ii) Θεωρώ συνάρτηση $\Phi(x)=xh(x)-f(x)+x+1,\ x\in[0,+\infty)$

Η συνάρτηση Φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, με

$$\Phi'(x)=(x)'h(x)+xh'(x)-f'(x)+1=h(x)+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+1=$$

$$=h(x)+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+1=h(x)\qquad(6)$$

Είναι $h'(x)>0$, για κάθε $x\in R$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επομένως, για κάθε $x>0$ είναι $h(x)>h(0)\Rightarrow h(x)>\ln f(0)\Rightarrow h(x)>\ln 1\Rightarrow h(x)>0$ (7)

Από τις σχέσεις (6) και (7) συμπεραίνουμε ότι $\Phi'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Είναι:

$$\begin{cases}\Phi\ \text{συνεχής στο}\ [0,+\infty)\\ \Phi'(x)>0\ \text{στο}\ (0,+\infty)\end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x>0$ είναι:

$$\Phi(x)>\Phi(0)\Rightarrow xh(x)-f(x)+x+1>0\cdot h(0)-f(0)+0+1\overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$xh(x)-f(x)+x+1>0\overset{x>0}{\Rightarrow}h(x)>\frac{f(x)-x-1}{x}$$

Δηλαδή $h(x)>\dfrac{f(x)-x-1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 9ο (17ο – 2012):

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$4f''(x)\left(f(x)\right)^3=-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)**
- **$f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (2)**
- **$2f'(1)=f(1)=1$ (3)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2f(x)f'(x)\right)^2=1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

δ) Αν $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$, τότε:

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M\left(\alpha,f(\alpha)\right)$, με $\alpha>0$.

ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$.

iii) Αν ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.

iv) Να βρείτε $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$4f''(x_o)\left(f(x_o)\right)^3=-1 \Rightarrow 4f''(x_o)\cdot 0=-1 \Rightarrow 0=-1,$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (4)

β) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$4f''(x)\left(f(x)\right)^3=-1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 4f''(x)\left(f(x)\right)^3 f'(x)=-f'(x) \Leftrightarrow$$

$$4f''(x)f'(x)=-\left(f(x)\right)^{-3}f'(x) \Leftrightarrow \left[2\left(f'(x)\right)^2\right]'=\left[-\frac{\left(f(x)\right)^{-2}}{-2}\right]' \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$2\left(f'(x)\right)^2=\frac{1}{2\left(f(x)\right)^2}+c \qquad (5)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (5) έχουμε:

$$2\left(f'(1)\right)^2=\frac{1}{2\left(f(1)\right)^2}+c \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+c \Leftrightarrow c=0 \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε:

$$2\left(f'(x)\right)^2=\frac{1}{2\left(f(x)\right)^2} \Leftrightarrow 4\left(f(x)\right)^2\left(f'(x)\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(2f(x)f'(x)\right)^2=1 \qquad (7)$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=2f(x)f'(x),\ x\in(0,+\infty)$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$g^2(x)=1,\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Από τις σχέσεις (2) και (4), έχουμε ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $g(1)=2f(1)f'(1)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1>0$

συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$g(x)=1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$\left(f^2(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow f^2(x)=x+c_1$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f^2(1)=1+c_1 \Leftrightarrow 1=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$$

Άρα είναι:

$$f^2(x)=x\ ,\ \ x\in(0,+\infty)$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και από τη σχέση (4) έχουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Επομένως έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ \ x\in(0,+\infty)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $x_o=0$ ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$

Άρα είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ , & x\in(0,+\infty)\\ 0\ , & x=0\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}\ ,\ x\in[0\ ,+\infty)$$

δ) i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(\alpha\,, f(\alpha))$, με $\alpha>0$ είναι:

$$\varepsilon: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Είναι:

$$f(\alpha)=\sqrt{\alpha}\qquad \text{και}\qquad f'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Επομένως:

$$\varepsilon: y-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(x-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon: x-2\sqrt{\alpha}\cdot y+\alpha=0 \qquad (7)$$

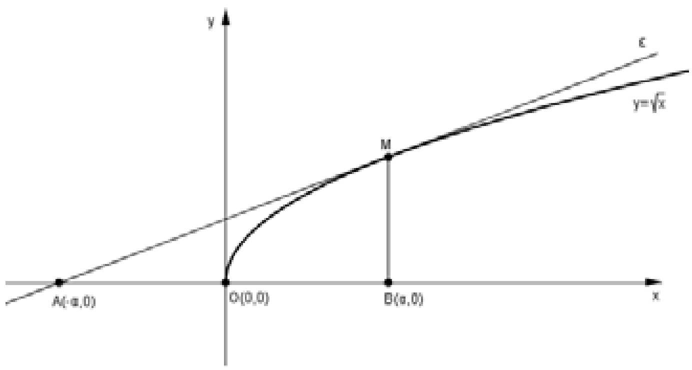
ii) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E=(AMB)-\int_0^{\alpha} f(x)dx=\frac{1}{2}(AB)(BM)-\int_0^{\alpha}\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{2}(2\alpha)\sqrt{\alpha}-\int_0^{\alpha}x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\alpha}=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\left(\frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}-0\right)=$$

$$=\alpha\sqrt{\alpha}-\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}=\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$$



Δηλαδή $E=\dfrac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$ τ.μ.

iii) Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

- $x_M = \alpha(t)$ (τετμημένη του σημείου Μ) και
- $E = E(t)$ (εμβαδόν του χωρίου Ω)

Τη χρονική στιγμή t_o είναι:

- $x_M = \alpha(t_o) = 4$ μονάδες και
- $\alpha'(t_o) = 2$ μονάδες / sec,

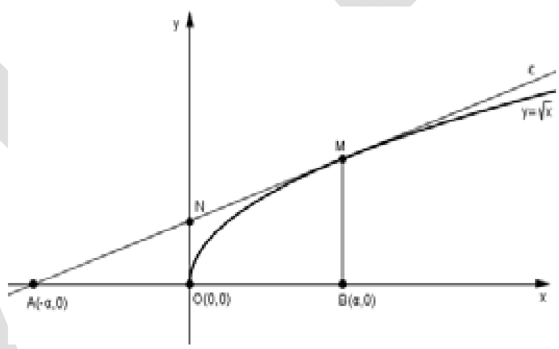
Είναι:

$$E(t) = \frac{1}{3}\big(\alpha(t)\big)^{\frac{3}{2}} \quad \text{και} \quad E'(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\big(\alpha(t)\big)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t) = \frac{1}{2}\big(\alpha(t)\big)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_o είναι:

$$E'(t_o) = \frac{1}{2}\big(\alpha(t_o)\big)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t_o) = \frac{1}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot 2 = 2 \text{ τετραγωνικές μονάδες / sec}$$

iv) Έστω Ν το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) και του άξονα $y'y$.



Για $x=0$ από τη σχέση (7) έχουμε:

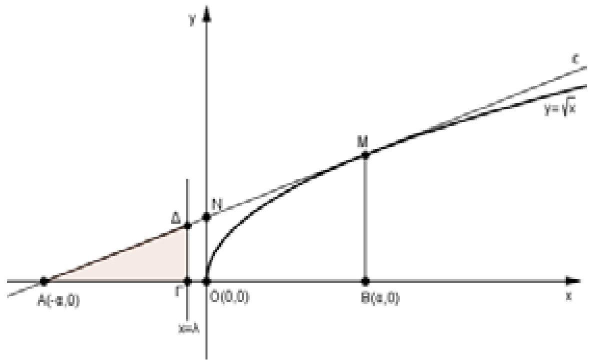
$y = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$, οπότε $N\left(0\,,\,\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right)$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΝ είναι:

$E_1 = (OAN) = \frac{1}{2}(OA)(ON) = \frac{1}{2}\alpha\frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \frac{1}{4}\alpha\sqrt{\alpha}$

Από την προφανή σχέση $\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\alpha} > \frac{1}{6}\alpha\sqrt{\alpha}$ προκύπτει ότι $E_1 > \frac{E}{2}$, οπότε η ζητούμενη ευθεία, που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, θα έχει εξίσωση $x=\lambda$ με $\lambda \in (-\alpha\,,0)$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(\lambda\,,0)$ και την ευθεία ε στο σημείο Δ.



Για $x=\lambda$ από τη σχέση (7) έχουμε $y = \frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$,

οπότε $\Delta\left(\lambda\,,\,\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right)$

Είναι:

$$E_2 = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(\Gamma\Delta) =$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda+\alpha)\frac{\lambda+\alpha}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}$$

Έχουμε:

$$E_2 = \frac{E}{2} \Leftrightarrow \frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{(\lambda+\alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{6}\alpha\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+\alpha)^2=\frac{2}{3}\alpha^2 \Leftrightarrow |\lambda+\alpha|=\frac{\sqrt{6}}{3}|\alpha| \underset{\alpha>0}{\overset{\lambda+\alpha>0}{\Leftrightarrow}} \lambda+\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\lambda=\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha-\alpha \Leftrightarrow \lambda=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right)\alpha \Leftrightarrow \lambda=\frac{\sqrt{6}-3}{3}\alpha$$

ΘΕΜΑ 10ο (18ο – 2012):

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0,+\infty) \to R$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (1)**
- $g^2(x) = g'(x) > 0$ **, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (2)**
- $f(1) = 2$
- $g(1) = -1$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες με $x = 1$ και $x = 2$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{-\frac{1}{g(x)}}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\frac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (3)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε

$$g^2(x)=g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)}=1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{g(x)}\right)'=(x)' \Rightarrow -\frac{1}{g(x)}=x+c_1$$

Είναι:

$$g(1)=-1,\ \text{οπότε}\ c_1=0$$

Άρα:

$$-\frac{1}{g(x)}=x \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{x}\ ,\ x\in(0,+\infty) \qquad (4)$$

Η σχέση (3) λόγω των σχέσεων (2) και (4) γράφεται:

$$f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=f'(x) \Rightarrow f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f(x)=f'(x) \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x)\Rightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'f(x)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{1+\frac{1}{x}}\right)'=0\Rightarrow\frac{f(x)}{1+\frac{1}{x}}=c_2\Rightarrow f(x)=c_2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

Είναι:

$$f(1)=2,\ \text{οπότε}\ \ c_2=1$$

Άρα:

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

β) Στο διάστημα $[1,2]$ ισχύει:

$$f(x)-g(x)=1+\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}>0,$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=[x+2\ln x]_1^2=1+2\ln 2$$

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f(x)=1+\frac{1}{x}\qquad\text{και}\qquad g(x)=-\frac{1}{x}$$

οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}$, αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\overset{+\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1,\ \text{οπότε}\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e$$

δ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\qquad\text{και}\qquad g'(x)=\frac{1}{x^2},$$

οπότε

$$f'(x)-1=-[g'(x)+1]=-\frac{1}{x^2}-1\neq 0$$

και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1,e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1}-2\ln x-3=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=2e^{x-1}-2\ln x-3\ ,\ x\in[1,e]$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,e]$, ως άθροισμα συνεχών
- $h(1)=2-3=-1<0$ και $h(e)=2e^{e-1}-5=2\left(e^{e-1}-\frac{5}{2}\right)>0$, γιατί $e>\frac{5}{2}$ και $e-1>1$,

  οπότε $h(1)\cdot h(e)<0$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Για κάθε $x\in(1,e)$ έχουμε:

$$h'(x)=2\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)>0$$

αφού για $1<x<e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \frac{1}{x}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1}>1 \\ -\frac{1}{x}>-1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1}-\frac{1}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$

ΘΕΜΑ 11ο (19ο – 2012):

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)**
- **$f'(0)=f(0)=0$ (2)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2e^x$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)=3$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x}f(t)\,dt$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x \Leftrightarrow f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)=(4x+2)e^x \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$f''(x)e^{-x}-f'(x)e^{-x}+f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=4x+2 \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)\right)'e^{-x}+f'(x)(e^{-x})'+f'(x)e^{-x}+f(x)(e^{-x})'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)e^{-x}\right)'+\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}\right)'=(2x^2+2x)'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x+c_1 \quad (3)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f'(0)e^0+f(0)e^0=2\cdot 0+2\cdot 0+c_1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_1=0$$

Άρα η σχέση (3) γράφεται:

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x\ ,\quad x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x}=2x^2+2x \overset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow} f'(x)e^{x}+f(x)e^{x}=2x^2e^{2x}+2xe^{2x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{x}+f(x)(e^{x})'=x^2(e^{2x})'+(x^2)'e^{2x}\Leftrightarrow (f(x)e^{x})'=(x^2e^{2x})'\Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{x}=x^2e^{2x}+c_2 \quad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0)e^0=0\cdot e^0+c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_2=0$$

Άρα η σχέση (4) γράφεται:

$$f(x)e^{x}=x^2e^{2x}\Leftrightarrow f(x)=x^2e^{x}\ ,\quad x\in R$$

β) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Για $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν έχει ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$ στο $+\infty$

• Για $x\in(-\infty,0)$ είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2e^x)\overset{(+\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}\underset{D.LH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{-x})'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\underset{D.LH}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(-e^{-x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}(2e^x)=2\cdot 0=0 \quad (5)$$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

γ) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x=0 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	
			τ. μ.		ο. ε.		

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0]$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-2$ με τιμή $f(-2)=4e^{-2}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_2=0$ με ελάχιστη τιμή $f(0)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, (σχέση (5))

δ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $[-1,0]$ και $[0,1]$, οπότε θα υπάρχουν:

- $\xi_1 \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_1)=\dfrac{f'(0)-f'(-1)}{0-(-1)}=\dfrac{0-(-1)\cdot 1\cdot e^{-1}}{1}=e^{-1}$
- $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_2)=\dfrac{f'(1)-f'(0)}{1-0}=\dfrac{1\cdot 3\cdot e-0}{1}=3e$

Άρα έχουμε:

$$f''(\xi_1)f''(\xi_2)=e^{-1}\cdot 3e \Leftrightarrow f''(\xi_1)f''(\xi_2)=3$$

ε) Για $t\in[x-1,x]$ με $x<-2$ έχουμε:

$$x-1\le t\le x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x-1)\le f(t)\le f(x)$$

Επομένως:

$$\int_{x-1}^{x} f(x-1)dt \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le \int_{x-1}^{x} f(x)dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1)\int_{x-1}^{x} 1dt \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x)\int_{x-1}^{x} 1dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1)\cdot\big(x-(x-1)\big)\le\int_{x-1}^{x}f(t)dt\le f(x)\cdot\big(x-(x-1)\big)\Leftrightarrow$$

$$f(x-1)\le\int_{x-1}^{x}f(t)dt\le f(x)$$

Για $x\in(-\infty\,,0)$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\big($σχέση (5)$\big)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x-1)\overset{x-1=t}{=}\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=0$, $\big($σχέση (5)$\big)$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x}f(t)dt=0$

ΘΕΜΑ 12ο (20ο – 2012):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(1)=2\ln2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\ ,\ x>0 \qquad (1)$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Αν $f(x)=(x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$, $x>0$, τότε:

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τις ασύμπτωτές της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+1=xe^{\frac{2017}{x+1}}$, $x>0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x)+2\ln2\ge2f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$, $x>0$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{x}^{2017}tf(t)dt>x\int_{x}^{2017}f(t)dt$, $x\in(0\,,2017)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'=\big(\ln(x+1)-\ln x\big)'\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x+c\ ,\ c\in R\ ,\ x>0 \qquad (2)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε

$$\frac{f(1)}{2}=\ln2-\ln1+c\Leftrightarrow\frac{2\ln2}{2}=\ln2+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x \ , \ x>0 \Leftrightarrow f(x) = \left(x+1\right)\ln\frac{x+1}{x} \ , \quad x>0$$

β) i) Η f είναι παραγωγίμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f\,'(x) = \left(\left(x+1\right)\ln\frac{x+1}{x}\right)' = \left(x+1\right)'\ln\frac{x+1}{x} + \left(x+1\right)\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)' =$$

$$= \ln\frac{x+1}{x} + \left(x+1\right)\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)' = \ln\frac{x+1}{x} + x\cdot\frac{(x+1)'x-(x+1)(x)'}{x^2} =$$

$$= \ln\frac{x+1}{x} + \frac{x-(x+1)}{x} = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \ , \ x>0$$

Η συνάρτηση $g(t) = \ln t$ σε κάθε διάστημα $\left[x \, , \, x+1\right]$, $x>0$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x \, , \, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln\frac{x+1}{x} \qquad (3)$$

Είναι:

$$0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} < 0 \qquad (4)$$

Λόγω της (4) είναι $f\,'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(x+1\right)\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$ και

  $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$, $t = \frac{x+1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{x}\right] = +\infty$

  Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(x+1\right)\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right) \overset{(+\infty)0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x+1}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x+1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'x-(x+1)(x)'}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)=(1\ ,\ +\infty)$

ii) Για $x>0$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$x+1=x\cdot e^{\frac{2017}{x+1}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x}=e^{\frac{2017}{x+1}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln e^{\frac{2017}{x+1}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{2017}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$(x+1)\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2017 \Leftrightarrow f(x)=2017 \qquad (5)$$

Η f είναι συνάρτηση $1-1$, ως γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ και $2017\in f(A)$, άρα η εξίσωση (5) έχει μία ακριβώς λύση ως προς x στο $A=(0,+\infty)$.

Δηλαδή η εξίσωση $x+1=x\cdot e^{\frac{2017}{x+1}}$, $x>0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

iii) **1ος τρόπος: (ανισότητα Jensen)** $f(x)+2\ln 2\geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)+f(1)\geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \qquad (6)$

που ισχύει για κάθε $x>0$, γιατί η f είναι κυρτή . Πράγματι:
Για $x=1$ η (6) ισχύει ως ισότητα.

Για $x>1$ η f στα διαστήματα $\left[1\ ,\ \frac{x+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{x+1}{2},\ x\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(1\ ,\ \frac{x+1}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{x+1}{2}\ ,\ x\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x+1}{2}-1}=\frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x-1}{2}} \qquad \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x-\frac{x+1}{2}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}}$$

Για κάθε $x>0$ η f' είναι παραγωγίμη με $f''(x)=\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Είναι:

$$0<\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)}{\frac{x-1}{2}}<\frac{f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}} \overset{x-1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f(1)<f(x)-f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)+f(1)>2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)+2\ln 2>2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Ομοίως αν $0 < x < 1$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι:

$$f(x) + 2\ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right), \text{ για κάθε } x > 0$$

2^{ος} τρόπος (με τη βοήθεια ακρότατου)

Υπόδειξη: αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\ln 2,\ x > 0 \text{ έχει ελάχιστο το } 0.$$

iv) Για κάθε $x \in (0\,,\,2017)$ είναι :

$$\int_x^{2017} tf(t)dt > x\int_x^{2017} f(t)dt \Leftrightarrow \int_x^{2017} tf(t)dt - x\int_x^{2017} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{2017} tf(t)dt - \int_x^{2017} xf(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^{2017} (t-x)f(t)\,dt > 0$$

που ισχύει γιατί η συνάρτηση $(t-x)f(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x\,,\,2017]$, αφού $x \in (0\,,\,2017)$ και $(t-x)f(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [x\,,\,2017]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $t = x$, άρα $\int_x^{2017} (t-x)f(t)dt > 0$

ΘΕΜΑ 13ο (21ο – 2012):

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(f'(x)) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ (1)**
- **$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ (2)**
- **$f(1) = 0$ (3)**

α) i) Να βρείτε το $f'(1)$

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(f'(x)) = x$, $x \in (0\,,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0\,,+\infty)$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in R$ η ευθεία ε:y=x+κ έχει δυο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

δ) Αν $\kappa < -1$ και $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ με $\alpha < \beta$, τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε $\alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$

ΛΥΣΗ

α) i) Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,+\infty)$, άρα είναι και «1−1»

Από τη σχέση (1) για $x = 1$ έχουμε:

$$f(f'(1)) + f(1) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f(f'(1)) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f(f'(1)) = f(1) \overset{f:«1\text{-}1»}{\Rightarrow} f'(1) = 1 \qquad (4)$$

ii) Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $f'(x)$ έχουμε:

$$f\left(f'\left(f'(x)\right)\right)+f\left(f'(x)\right)=0 \overset{+f(x)}{\Rightarrow}$$

$$f\left(f'\left(f'(x)\right)\right)+\underbrace{f\left(f'(x)\right)+f(x)}_{=0}=f(x) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f\left(f'\left(f'(x)\right)\right)=f(x) \overset{f:«1\text{-}1»}{\Rightarrow} f'\left(f'(x)\right)=x\ ,\quad x\in(0,+\infty) \qquad (5)$$

β) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και η συνάρτηση $f\left(f'(x)\right)$ είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$f\left(f'(x)\right)+f(x)=0 \Rightarrow \left(f\left(f'(x)\right)+f(x)\right)'=\left(0\right)' \Rightarrow$$

$$f'\left(f'(x)\right)\cdot f''(x)+f'(x)=0 \overset{(5)}{\Rightarrow} xf''(x)+f'(x)=0 \Rightarrow$$

$$\left(xf'(x)\right)'=0 \Rightarrow xf'(x)=c_1\ ,\ x\in(0,+\infty) \text{ και } c_1\in\mathbb{R} \qquad (6)$$

Από τη σχέση (6) για $x=1$ έχουμε:

$$1\cdot f'(1)=c_1 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} c_1=1$$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)=1 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln x\right)' \Leftrightarrow f(x)=\ln x+c_2\ ,\ c_2\in\mathbb{R} \quad (7)$$

Από τη σχέση (7) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1)=\ln 1+c_2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c_2=0$$

Άρα:

$$f(x)=\ln x\ ,\quad x\in(0,+\infty) \qquad (8)$$

γ) Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $\ln x=x+\kappa$ έχει δύο λύσεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-x-\kappa\ ,\ x\in(0,+\infty)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\ ,\quad x\in(0,+\infty)$$

Είναι:

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$
- $g'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$-1-\kappa$	↘	

μέγιστο

Είναι:

$$g(1) = \ln 1 - 1 - \kappa = -1 - \kappa$$

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0\,,\,1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1\,,\,+\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ με μέγιστη τιμή $g(1) = -1 - \kappa$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - x - \kappa) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x - \kappa) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1 - \dfrac{\kappa}{x}\right)\right] = -\infty$, γιατί
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1 - \dfrac{\kappa}{x}\right) = 0 - 1 - 0 = -1$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0\,,\,1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\,,\, g(1)\right] = (-\infty\,,\,-1-\kappa]$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1\,,\,+\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x)\,,\, g(1)\right] = (-\infty\,,\,-1-\kappa]$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = (-\infty\,,\,-1-\kappa]$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, η συνάρτηση g λαμβάνει κάθε τιμή του συνόλου τιμών της, εκτός από την μέγιστη, ακριβώς δύο φορές.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει δύο ρίζες σε κάθε περίπτωση που η μέγιστη τιμή της είναι θετική, δηλαδή όταν $-1-\kappa > 0$ που σημαίνει ότι $\kappa < -1$

δ) 1^{ος} τρόπος:

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\alpha = \alpha + \kappa \Rightarrow \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} = 1 + \dfrac{\kappa}{\alpha}$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\beta = \beta + \kappa \Rightarrow \dfrac{\ln\beta}{\beta} = 1 + \dfrac{\kappa}{\beta}$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{\ln\beta}{\beta}=\left(1+\frac{\kappa}{\alpha}\right)-\left(1+\frac{\kappa}{\beta}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{\ln\beta}{\beta}=\frac{\kappa}{\alpha}-\frac{\kappa}{\beta}\Rightarrow\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{\ln\beta}{\beta}=\kappa\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\Rightarrow$$

$$\frac{\ln\beta}{\beta}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}=-\kappa\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\Rightarrow\frac{\frac{\ln\beta}{\beta}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta-\alpha}=-\frac{\kappa}{\alpha\beta}\qquad(9)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\in[\alpha,\ \beta]$

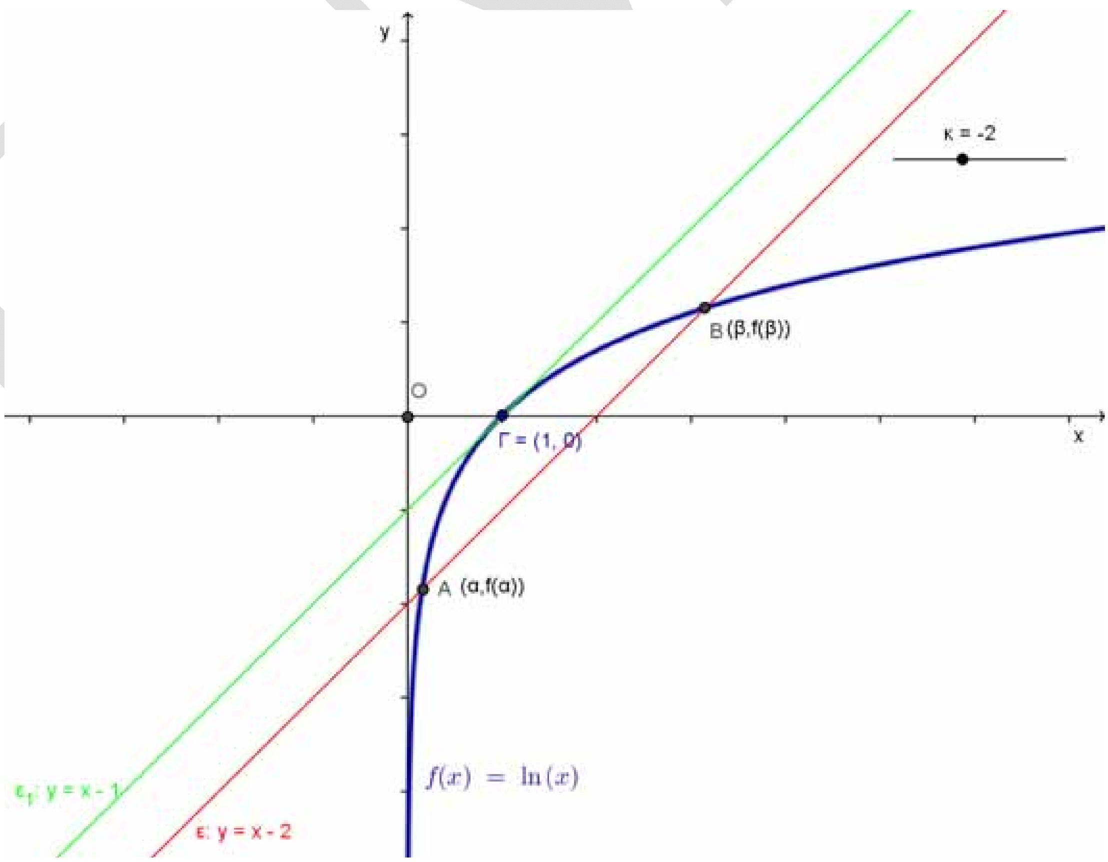
Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\ \beta]$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\qquad(10)$$

Η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$h'(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(10)}{\Rightarrow}\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}=\frac{\frac{\ln\beta}{\beta}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta-\alpha}\overset{(9)}{\Rightarrow}$$

$$=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}=-\frac{\kappa}{\alpha\beta}\Rightarrow\alpha\beta(1-\ln\xi)=-\kappa\xi^2\Rightarrow\alpha\beta(\ln\xi-1)=\kappa\xi^2$$



2ος τρόπος:

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\alpha = \alpha + \kappa$, με $0 < \alpha < 1$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \overset{(8)}{\Rightarrow} \ln\beta = \beta + \kappa$, με $\beta > 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha\beta(\ln x - 1) - \kappa x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$

♦ Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

♦ ○ $\varphi(\alpha) = \alpha\beta(\ln\alpha - 1) - \kappa\alpha^2 \overset{\ln\alpha=\alpha+\kappa}{=} \alpha\beta(\alpha + \kappa - 1) - \kappa\alpha^2 =$

$$= \alpha(\alpha\beta + \beta\kappa - \beta - \kappa\alpha) = \alpha\left[\underbrace{\beta(\alpha-1)}_{<0} + \underbrace{\kappa(\beta-\alpha)}_{<0}\right] < 0$$

○ $\varphi(\beta) = \alpha\beta(\ln\beta - 1) - \kappa\beta^2 \overset{\ln\beta=\beta+\kappa}{=} \alpha\beta(\beta + \kappa - 1) - \kappa\beta^2 =$

$$= \beta(\alpha\beta + \alpha\kappa - \alpha - \kappa\beta) = \beta\left[\underbrace{\alpha(\beta-1)}_{>0} + \underbrace{\kappa(\alpha-\beta)}_{>0}\right] > 0$$

οπότε $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$

Η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) - \kappa\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$$

ΘΕΜΑ 14ο (22ο – 2012):

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$, με:

- $\mathbf{f(x) = x e^x + \alpha}$
- $\mathbf{g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + \beta}$, $\boldsymbol{\alpha, \beta \in R}$

Αν οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα δέχονται, σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε), που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 0\ ,\ \beta = -\frac{3}{2} \text{ και η κοινή εφαπτομένη (ε) είναι η ευθεία με εξίσωση } y = x$$

β) Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν E_2 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $E_1(t) < E_2(t) + t e^t$ για κάθε $t > 0$

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα δέχονται κοινή εφαπτομένη (ε), σε κοινό τους σημείο $M(x_0, y_0)$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0)=y_0 \\ f'(x_0)=g'(x_0)=\lambda \end{cases}, \quad \big(\text{όπου } \lambda \text{ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας } (\varepsilon)\big)$$

Η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$

Άρα:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0)=\lambda x_0 & (1) \\ f'(x_0)=g'(x_0)=\lambda & (2) \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R, με:

- $f'(x)=(xe^x+\alpha)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x \ , \ x\in R$
- $g'(x)=\left(-\dfrac{1}{2}e^{2x}+2e^x+\beta\right)'=-e^{2x}+2e^x=e^x(2-e^x) \ , \ x\in R$

Για $x=x_0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow (x_0+1)e^{x_0}=e^{x_0}(2-e^{x_0})\Leftrightarrow x_0+1=2-e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}+x_0-1=0 \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=e^x+x-1 \ , \ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$h'(x)=(e^x+x-1)'=e^x+1>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι και «1 – 1»

Η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(x_0)=h(0)\overset{«1-1»}{\Leftrightarrow} x_0=0$$

Για $x_0=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

- $f(0)=\lambda\cdot 0 \Leftrightarrow \alpha=0$
- $g(0)=\lambda\cdot 0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}e^0+2e^0+\beta=0\Leftrightarrow \beta=-2+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \beta=-\dfrac{3}{2}$

Για $x_0=0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

- $f'(0)=\lambda\Leftrightarrow \lambda=(0+1)e^0\Leftrightarrow \lambda=1$

Άρα η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) είναι: $y=x$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

- $f'(x)=(x+1)e^x$
- $f''(x)=\big((x+1)e^x\big)'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

Είναι:

$$f''(x)=(x+2)e^x>0 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty)\subseteq(-2,+\infty)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y=x$ και «πάνω», δηλαδή ισχύει:

$$f(x)\geq x\Leftrightarrow f(x)-x\geq 0 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x=0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν E_1 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, είναι:

$$E_1(t) = \int_0^t \big(f(x) - x\big)dx = \int_0^t (xe^x - x)dx = \int_0^t xe^x dx - \int_0^t xdx = \int_0^t x(e^x)'dx - \int_0^t xdx =$$

$$= \left[xe^x\right]_0^t - \int_0^t (x)'e^x dx - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^t = te^t - \int_0^t e^x dx - \frac{1}{2}t^2 =$$

$$= te^t - e^t + 1 - \frac{1}{2}t^2 = te^t - e^t - \frac{1}{2}t^2 + 1\ ,\ \ t > 0$$

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $g'(x) = e^x(2 - e^x) = -e^{2x} + 2e^x$
- $g''(x) = \left(-e^{2x} + 2e^x\right)' = -2e^{2x} + 2e^x = 2e^x(1 - e^x)$

Είναι:

$$g''(x) = 2e^x(1 - e^x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επίσης η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα είναι κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_g βρίσκεται από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = x$ και «κάτω», δηλαδή ισχύει:

$$g(x) \le x \Leftrightarrow g(x) - x \le 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν E_2 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, είναι:

$$E_2(t) = \int_0^t \big(x - g(x)\big)dx = \int_0^t x\,dx - \int_0^t g(x)dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \frac{3}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^t - 2\left[e^x\right]_0^t + \frac{3}{2}(t - 0) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 1\right) - 2\left(e^t - 1\right) + \frac{3}{2}t =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4} - 2e^t + 2 + \frac{3}{2}t = \frac{1}{4}e^{2t} - 2e^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}\ ,\ \ t > 0$$

δ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $t > 0$ είναι:

$$E_1(t) < E_2(t) + te^t \Leftrightarrow$$

$$te^t - e^t - \frac{1}{2}t^2 + 1 < \frac{1}{4}e^{2t} - 2e^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4} + te^t$$

$$e^t - \frac{1}{4}e^{2t} - t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} < 0\ ,\ \ t > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

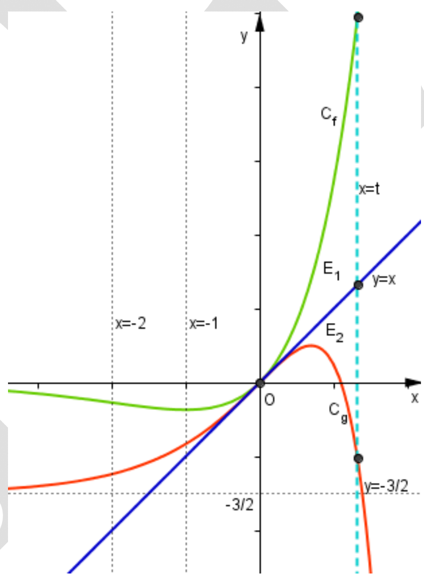
$$\Phi(t) = e^t - \frac{1}{4}e^{2t} - t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\ ,\ t \ge 0$$

Για κάθε $t > 0$ είναι:

- $\Phi'(t) = e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - 2t - \frac{3}{2}$
- $\Phi''(t) = \left(e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - 2t - \frac{3}{2}\right)' = e^t - e^{2t} - 2 = e^t(1-e^t) - 2$

Είναι:

$$\Phi''(t) = e^t(\underbrace{1-e^t}_{<0}) - 2 < 0\ ,\ \text{για κάθε}\ t > 0$$



Αφού για:

$$t > 0 \Leftrightarrow e^t > e^0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow 1 - e^t < 0$$

Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση Φ' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $t > 0$ είναι:

$$t > 0 \overset{\Phi'\downarrow}{\Rightarrow} \Phi'(t) < \Phi'(0)$$

Όμως

$$\Phi'(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 < 0$$

Άρα:

$$\Phi'(t) < 0\ ,\ t > 0$$

Επειδή η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Επομένως για κάθε $t > 0$ είναι:

$$t > 0 \overset{\Phi\downarrow}{\Rightarrow} \Phi(t) < \Phi(0)$$

Όμως

$$\Phi(0) = e^0 - \frac{1}{4}e^0 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

Άρα:

$$\Phi(t) < 0\ ,\ t > 0$$

Δηλαδή:

$$E_1(t) < E_2(t) + t \cdot e^t\ ,\ t > 0$$

ΘΕΜΑ 15ο (23ο – 2012):

α) **Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to R$, $\alpha>0$ με $f(\alpha-x)+f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$**

Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx$ **(1)**

β) **Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, τότε:**

i) **Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα** $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

ii) **Αν επιπλέον g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει η σχέση $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g'(x)$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (1), τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $2g'(\xi)=g(\xi)$**

ΛΥΣΗ

α) Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους θέτουμε $x=\alpha-u$, οπότε $\alpha-x=u$ και $dx=-du$

Για $x=0$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $u=0$

Έχουμε:

$$\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx=\int_{\alpha}^{0}\frac{f(\alpha-u)}{f(u)+f(\alpha-u)}(-du)=-\int_{\alpha}^{0}\frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}du=$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)}du=\int_0^{\alpha}\frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)}dx$$

β) **i)** Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Επομένως, για $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $\alpha=\frac{\pi}{2}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x}dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

Θέτουμε:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx \qquad \text{και} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

Είναι:

- $I = J$ και
- $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$

Άρα $2I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

ii) Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, με

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ \ x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x)g'(x),\ x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \qquad (3)$$

Για κάθε $x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $f'(x) = -\eta\mu x$, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

$$(-\eta\mu x)\cdot g(x) + \sigma\upsilon\nu x\cdot g'(x) = (-\eta\mu x)\cdot g'(x) \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\cdot g'(x) = \eta\mu x\cdot g(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\ ,\ x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \qquad (4)$$

Είναι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)}{g(x)}dx \overset{(4)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως έχουμε:

$$\left[\ln g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0) = \frac{\pi}{4} \qquad (5)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \ln g(x),\ x \in \left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$, με $h'(x) = (\ln g(x))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Επομένως η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ , οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0)}{\frac{\pi}{2}} \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2g'(\xi) = g(\xi)$$

ΘΕΜΑ 16ο (24ο – 2012):

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $xf'(x) + x^2 f''(x) = 2$ **, για κάθε** $x \in (0,+\infty)$ **(1)**
- $f(1) = 0$ **(2)**
- $f'(1) = 2$ **(3)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln^2 x + 2\ln x,\ \ x \in (0,+\infty)$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{\alpha} f(x)dx$ **και στη συνέχεια το όριο** $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\eta\mu\alpha + \int_1^{\alpha} f(x)dx}{\alpha\ln^2\alpha + 1}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x f'(x) + x^2 f''(x) = 2 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) + x f''(x) = \frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(x f'(x)\right)' = \left(2\ln x\right)' \Rightarrow x f'(x) = 2\ln x + c_1 \ , \ c_1 \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) για $x = 1$ έχουμε:

$$1 \cdot f'(1) = 2\ln 1 + c_1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c_1 = 2$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x f'(x) = 2\ln x + 2 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2\ln x\left(\ln x\right)' + 2\left(\ln x\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \left(\ln^2 x + 2\ln x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x + c_2 \ , \ c_2 \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Από τη σχέση (5) για $x = 1$ έχουμε:

$$f(1) = \ln^2 1 + 2\ln 1 + c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x \ , \ x \in (0, +\infty)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$, είναι:

$$E = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(\ln^2 x + 2\ln x\right)dx = \int_1^e (x)'\ln^2 x\, dx + 2\int_1^e \ln x\, dx =$$

$$= [x\ln^2 x]_1^e - 2\int_1^e x\ln x \cdot \frac{1}{x}dx + 2\int_1^e \ln x\, dx = e\ln^2 e - 2\int_1^e \ln x dx + 2\int_1^e \ln x dx = e$$

γ) Με διαδικασία ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του εμβαδού, βρίσκουμε ότι:

$$\int_1^\alpha f(x)\,dx = [x\ln^2 x]_1^\alpha - 2\int_1^\alpha \ln x\, dx + 2\int_1^\alpha \ln x\, dx = \alpha\ln^2\alpha \quad (6)$$

οπότε για κάθε $\alpha \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \int_1^\alpha f(x)dx}{\alpha\ln^2\alpha + 1} \overset{(6)}{=} \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \alpha\ln^2\alpha}{\alpha\ln^2\alpha + 1} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha \ln^2\alpha\left(1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2\alpha}\right)}{\alpha \ln^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\alpha \ln^2\alpha}\right)} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2\alpha}}{1+\dfrac{1}{\alpha \ln^2\alpha}} = 1 \text{ , γιατί}$$

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(\alpha \ln^2\alpha\right) = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha \ln^2\alpha} = 0$

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha \ln^2\alpha}\right) = 1$

- $\left|\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2\alpha}\right| \le \dfrac{1}{\alpha \ln^2\alpha} \Rightarrow -\dfrac{1}{\alpha \ln^2\alpha} \le \dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2\alpha} \le \dfrac{1}{\alpha \ln^2\alpha}$

Είναι:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha \ln^2\alpha}\right) = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha \ln^2\alpha} = 0$$

οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι:

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2\alpha} = 0$, οπότε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2\alpha}\right) = 1$

ΘΕΜΑ 17ο (25ο – 2012):

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(0)=0$ και $f(1)<\dfrac{3}{2}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\,'(x) = 3x^2 e^{x^6} \text{ για κάθε } x \in R$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο σημείο της $O(0,0)$ είναι ο άξονας $x΄x$

β) $f(x) \ge \dfrac{1}{3}x^9$ για κάθε $x \ge 0$

γ) $6\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx < 4 - e$

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο σημείο της $O(0,0)$ είναι:

$$(\varepsilon): \ y - f(0) = f\,'(0)(x - 0)$$

Είναι:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f\,'(0) = 0\cdot e^0 = 0$$

Άρα:

$$(\varepsilon): \ y - 0 = 0\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = 0$$

Δηλαδή, ο άξονας $x΄x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο σημείο της $O(0,0)$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^9 \;, \quad x \in R$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη , ως διαφορά παραγωγισίμων με παράγωγο:

$$g'(x) = f'(x) - 3x^8 = 3x^2 e^{x^6} - 3x^8 = 3x^2\left(e^{x^6} - x^6\right), \quad x \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$e^x \geq x + 1 > x$$

Πράγματι:

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $\ln x \leq x - 1$ (1) (Εφαρμογή Σχολικού Βιβλίου σελίδα 148)

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $e^x > 0$, $x \in R$, τότε:

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \ln e \leq e^x - 1 \overset{\ln e = 1}{\Leftrightarrow} x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$$

Οπότε

$$e^x > x \text{, για κάθε } x \in R \quad (2)$$

Επομένως:

$$e^{x^6} > x^6 \text{ , για κάθε } x \in R$$

Άρα:

$$g'(x) = 3x^2\left(e^{x^6} - x^6\right) > 0 \text{ , για κάθε } x \in R^*$$

Είναι:

$$\begin{cases} g \text{ συνεχής στο } R \\ g'(x) > 0 \quad \text{στο } R^* \end{cases} \text{, οπότε η συνάρτηση } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } R$$

Επομένως για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$x \geq 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) \geq g(0) \Rightarrow f(x) - \frac{1}{3}x^9 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x^9$$

δ) Είναι:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 3x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 (x^3)' f(x)dx =$$

$$= 2\left(\left[x^3 f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x^3 f'(x)dx\right) = 2f(1) - 2\int_0^1 x^3 f'(x)dx =$$

$$= 2f(1) - 2\int_0^1 x^3 \cdot 3x^2 e^{x^6} dx = 2f(1) - \int_0^1 6x^5 e^{x^6} dx =$$

$$= 2f(1) - \int_0^1 e^{x^6}(x^6)'dx = 2f(1) - \int_0^1 \left(e^{x^6}\right)' dx =$$

$$= 2f(1) - \left[e^{x^6}\right]_0^1 = 2f(1) - e + 1$$

Δείξαμε ότι:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx = 2f(1) - e + 1 \quad (2)$$

Είναι:

$$f(1) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2f(1) < 3 \Leftrightarrow 2f(1) - e + 1 < 3 - e + 1 \Leftrightarrow 2f(1) - e + 1 < 4 - e \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx < 4 - e$$

ΘΕΜΑ 18ο (27ο – 2012):

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $\mathbf{f(x)>0}$ **για κάθε** $\mathbf{x\in R}$
- $\mathbf{f(0)=1}$
- $\mathbf{\left(\dfrac{1}{f(x)}+\ln f(x)\right)f'(x)=f'(x)\left(x+\ln(x^2+1)\right)+\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}}$**, για κάθε** $\mathbf{x\in R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=e^x\left(x^2+1\right),\ x\in R}$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x_0\in(0,1)}$ **τέτοιο, ώστε** $\mathbf{f(x_0)=3}$

γ) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $\mathbf{h:R\to R}$ **ισχύει:**

$$\mathbf{h\left(f(x)+x-3\right)=f\left(h(x)\right)+h(x)-3}\text{, για κάθε } \mathbf{x\in R}$$

τότε, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y=x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi\in(0\,,1)}$ **τέτοιο, ώστε** $\mathbf{f'(\xi)=2e-1}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$\left(\frac{1}{f(x)}+\ell n f(x)\right)f'(x)=f'(x)\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)+\frac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)\ell n f(x)=f'(x)\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)+\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)\Rightarrow$$

$$\left(\ell n f(x)\right)'+f'(x)\ell n f(x)=f'(x)\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)+\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)'\overset{\cdot\, e^{f(x)}}{\Rightarrow}$$

$$e^{f(x)}\left(\left(\ell n f(x)\right)'+f'(x)\ell n f(x)\right)=e^{f(x)}f'(x)\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)+e^{f(x)}\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)'\Rightarrow$$

$$e^{f(x)}\left(\ell n f(x)\right)'+\left(e^{f(x)}\right)'\ell n f(x)=\left(e^{f(x)}\right)'\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)+e^{f(x)}\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)'\Rightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\ell n f(x)\right)' = \left(e^{f(x)}\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)\right)' \Rightarrow$$

$$e^{f(x)}\ell n f(x) = e^{f(x)}\left(x+\ell n\left(x^2+1\right)\right)+c,\ c\in R$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$e^{f(0)}\ell n f(0) = e^{f(0)}\left(0+\ell n\left(0^2+1\right)\right)+c \overset{f(0)=1}{\Rightarrow} c=0$$

Άρα για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$e^{f(x)}\ell n f(x) = e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right] \overset{e^{f(x)}\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\ell n f(x) = x+\ell n\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow \ell n f(x) = \ell n e^x + \ell n\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\ell n f(x) = \ell n\left[e^x\left(x^2+1\right)\right] \Leftrightarrow f(x) = e^x\left(x^2+1\right),\quad x\in R$$

β) 1ος τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-3\ ,\quad x\in[0\,,1]$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0\,,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- ○ $g(0)=f(0)-3=1-3=-2<0$

  ○ $g(1)=f(1)-3=2e-3>0$

  οπότε $g(0)g(1)<0$

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0\,,1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0\,,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=3$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x(x^2+1)\right)' = e^x(x^2+1)+2xe^x = e^x\left(x^2+1+2x\right)=e^x\left(x+1\right)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x)>0$, για κάθε $(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,+\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

2ος τρόπος:

Η συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[0\,,1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, διότι είναι συνεχής σε αυτό ως γινόμενο συνεχών και $f(0)=1\neq 2e=f(1)$

Είναι $f(0)=1<3<2e=f(1)$, άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x(x^2+1)\right)' = e^x(x^2+1)+2xe^x = e^x\left(x^2+1+2x\right)=e^x\left(x+1\right)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) > 0$, για κάθε $(-\infty\ ,\ -1)\cup(-1\ ,\ +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

γ) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$h\big(f(x)+x-3\big)=f\big(h(x)\big)+h(x)-3$$

Για $x=x_0$ έχουμε:

$$h\big(f(x_0)+x_0-3\big)=f\big(h(x_0)\big)+h(x_0)-3 \overset{f(x_0)=3}{\Rightarrow}$$

$$h\big(3+x_0-3\big)=f\big(h(x_0)\big)+h(x_0)-3 \Rightarrow h(x_0)=f\big(h(x_0)\big)+h(x_0)-3 \Rightarrow$$

$$f\big(h(x_0)\big)=3 \overset{f(x_0)=3}{\Rightarrow} f\big(h(x_0)\big)=f(x_0) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} h(x_0)=x_0$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y=x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

δ) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0\ ,1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R , με $f'(x)=e^x(x+1)^2$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0\ ,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{e^1(1^2+1)-e^0(0^2+1)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=2e-1$$

ΘΕΜΑ 19ο (30ο – 2012):

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0\ ,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}+2\text{ , για κάθε } x\in(0\ ,+\infty)\quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β) Να αποδείξετε ότι $f(4-x)+f(x)\geq 2f(2)$, για κάθε $x\in(0,\ 4)$ και ότι $\int_1^3 f(x)dx > 2f(2)$

γ) Αν επιπλέον είναι $f'(1)=0$ και $f(1)=-1$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x)=2\ln^2 x+x^2-2x,\ x>0$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-\big(f'(x-h)-f'(x)\big)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right)=\frac{1}{2}\big(f''(x)+f''(x)\big)=f''(x),$$

γιατί

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\overset{-h=\omega}{=}\lim_{\omega\to 0}\frac{f'(x+\omega)-f'(\omega)}{\omega}=f''(x)$$

επειδή η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Από την (1) έχουμε:

$$f''(x) = 4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow f''(x) = 2\cdot\frac{2-2\ln x + x^2}{x^2},\ x>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 - 2\ln x + x^2,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,+\infty)$ με $g'(x) = -\dfrac{2}{x} + 2x = \dfrac{2(x^2-1)}{x},\ x>0$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$ και
- $g'(x) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$

Το πρόσημο της g' καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\ ,1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = 3$

Άρα $g(x) \ge 3$, για κάθε $x>0$.

Επομένως $f''(x) = 2\cdot\dfrac{g(x)}{x^2} > 0$, για κάθε $x>0$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β) 1ος τρόπος: (με τη βοήθεια ακρότατου)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(4-x) + f(x),\ x\in(0,4)$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = -f'(4-x) + f'(x),\ x\in(0,4)$

Είναι:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(4-x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(4-x) = f'(x) \overset{f'\ 1-1}{\Leftrightarrow} 4 - x = x \Leftrightarrow x = 2$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow -f'(4-x) + f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(4-x) < f'(x) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} 4 - x < x \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

Το πρόσημο της h' καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0		2		4
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$2f(2)$	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

- Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\ ,\ 2]$
- Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2\ ,4)$

- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 2$, με ελάχιστη τιμή $h(2) = 2f(2)$

Άρα για κάθε $x \in (0,4)$ είναι $h(x) \geq 2f(2) \Leftrightarrow f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$ (2)

2^{ος} τρόπος (ανισότητα Jensen)

Υπόδειξη:

Για $x = 2$ ισχύει ως ισότητα

Για $x \in (2, 4)$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[4-x, 2]$ και $[2, x]$

Για $0 < x < 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[x, 2]$ και $[2, 4-x]$

και επειδή f' γνησίως αύξουσα γιατί f κυρτή, … προκύπτει το ζητούμενο.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(4-x) + f(x) - 2f(2),\ x \in (0, 4)$

Η Φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $\Phi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1, 3]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = 2$, λόγω της σχέσης (2). Άρα

$$\int_1^3 \big(f(4-x) + f(x) - 2f(2)\big)dx > 0 \Rightarrow \int_1^3 f(4-x)dx + \int_1^3 f(x)dx - 2f(2)\int_1^3 dx > 0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$2\int_1^3 f(x)dx > 2f(2)\int_1^3 dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx > f(2)\cdot(3-1) \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx > 2f(2)$$

$(*)$ Είναι:

$$\int_1^3 f(4-x)dx = \int_1^3 f(x)dx$$

Πράγματι, αν θέσουμε $4 - x = t$, τότε $dt = (4-x)'\,dx = -dx$

Για $x = 1$ είναι $t = 3$ και $x = 3$ είναι $t = 1$, οπότε έχουμε:

$$\int_1^3 f(4-x)dx = -\int_3^1 f(t)dt = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(x)dx$$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f''(x) = 4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow \big(f'(x)\big)' = 4\cdot\frac{(\ln x)'x - (x)'\ln x}{x^2} + (2x)' \Leftrightarrow$$

$$\big(f'(x)\big)' = 4\left(\frac{\ln x}{x}\right)' + (2x)' \Leftrightarrow \big(f'(x)\big)' = \left(4\frac{\ln x}{x} + 2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 4\frac{\ln x}{x} + 2x + c,\ \ c \in R,\ \ x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) = 2 + c \Leftrightarrow c = -2$, γιατί $f'(1) = 0$

Άρα $f'(x) = 4\dfrac{\ln x}{x} + 2x - 2,\ \ x > 0$

Για κάθε $x \in (0\ ,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 4\frac{\ln x}{x} + 2x - 2 \Leftrightarrow f'(x) = 4\ln x(\ln x)' + \left(x^2 - 2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(2\ln^2 x + x^2 - 2x\right)' \Leftrightarrow f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x + c\ ,\ c \in R,\ x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$, γιατί $f(1) = -1$

Άρα:

$$f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x\ ,\ \ x > 0$$

ΘΕΜΑ 20ο (33ο – 2012):

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2+y^2}{xy}$, **για κάθε** $x\,,y \in (0,+\infty)$ **(1)**
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$

β) Να βρείτε το $f(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0\,,+\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{x^2}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $x\left(x + συν\frac{\pi}{x}\right) = x - 1$ στο διάστημα $(0\,,+\infty)$

στ) Αν g είναι μια συνεχής συνάρτηση στο R και $α > 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\frac{1}{α}}^{α} g\left(f(x)\right)\frac{\ln x}{x}dx$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός $ρ$ τέτοιος, ώστε $f(ρ) = 0$ (2)

Για $x = ρ$ και $y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(ρ) = 0 - \frac{ρ^2+1}{ρ} \overset{(2)}{\Rightarrow} ρ^2 + 1 = 0 \Rightarrow ρ^2 = -1$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$

β) Για $x = y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1) = f^2(1) - 2 \Leftrightarrow f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 2 \quad ή \quad f(1) = -1$$

Το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει θετικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε για οποιοδήποτε $M > 0$ να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x > x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f για για κατάλληλο x, παίρνει θετική τιμή. Εξάλλου η f, ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x, διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$, οπότε $f(1) = 2$

γ) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και $y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x)=2f(x)-\frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{x}$$

δ) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=e^1=e \text{ , γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\overset{+\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=1$$

ε) Στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$x\left(x+\text{συν}\frac{\pi}{x}\right)=x-1 \Leftrightarrow x+\text{συν}\frac{\pi}{x}=1-\frac{1}{x} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=1-\text{συν}\frac{\pi}{x} \Leftrightarrow f(x)=1-\text{συν}\frac{\pi}{x} \quad (3)$$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2+1\geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

Επομένως για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $f(x)=x+\frac{1}{x}\geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=2$

Επίσης για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $1-\text{συν}\frac{\pi}{x}\leq 2$

Επομένως η εξίσωση (3) θα έχει λύση αν και μόνο αν $\begin{cases} f(x)=2 \\ 1-\text{συν}\frac{\pi}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \\ \text{συν}\frac{\pi}{x}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

στ) Είναι:

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g\left(f(x)\right)\frac{\ln x}{x}dx=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx$$

Θέτουμε:

$$u=\frac{1}{x}\text{, οπότε } x=\frac{1}{u} \text{ και } dx=-\frac{1}{u^2}du$$

Για $x=\frac{1}{\alpha}$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $u=\frac{1}{\alpha}$

Έχουμε:

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} g\left(\frac{1}{u}+u\right)\cdot\ln\frac{1}{u}\cdot u\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=$$

$$= \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} g\left(\frac{1}{u}+u\right)\cdot(-\ln u)\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)du = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} g\left(\frac{1}{u}+u\right)\frac{\ln u}{u}du =$$

$$= -\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g\left(\frac{1}{u}+u\right)\frac{\ln u}{u}du = -I$$

Είναι $I=-I$, δηλαδή $2I=0$, οπότε $I=0$

ΘΕΜΑ 21ο (34ο – 2012):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\ln f(x)+2xf'(x)=0$, **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$ **(1)**
- $f(x)>0$, **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$ **(2)**
- $f(1)=e$ **(3)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x\in(0,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι $2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq 3-x$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{e}^{e^2} f^{-1}(x)\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)dx$

ε) Να αποδείξετε ότι $e+\sqrt[7]{e}>2\sqrt[5]{e}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f(x)\ln f(x)+2xf'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln f(x)+\sqrt{x}\,\frac{f'(x)}{f(x)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x}\ln f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln f(x)=c$$

Είναι:

$$f(1)=e,\ \text{οπότε}\ \ c=1$$

Άρα:

$$\sqrt{x}\ln f(x)=1 \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}},\ x\in(0,+\infty)$$

β) Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x_1}}}=e^{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{1}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1 – 1 » , οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f, θέτουμε $f(x)=y$ και λύνουμε ως προς x.

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=y \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}=\ln y \\ y>0 \\ \ln y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{1}{\ln y} \\ y>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\ln^2 y} \\ y>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=\frac{1}{\ln^2 y} \\ y>1 \end{cases}$$

Άρα

$$f^{-1}:(1,+\infty)\to R \text{ με } f^{-1}(x)=\frac{1}{\ln^2 x}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

$$f'(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}}<0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο στο $(0,+\infty)$

Η συνάρτηση f΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με:

$$f''(x)=-\frac{\frac{-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}}\cdot 2x\sqrt{x}-3\sqrt{x}\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{4x^3}=\frac{3\sqrt{x}+1}{4x^3}\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}>0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_o=1$, είναι:

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

Είναι:

$$f(1)=e \quad \text{και} \quad f'(1)=-\frac{e}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y-e=-\frac{e}{2}(x-1) \Rightarrow (\varepsilon): y=-\frac{e}{2}x+\frac{3e}{2}$$

Η συνάρτηση είναι κυρτή, οπότε η εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής, είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\geq-\frac{e}{2}x+\frac{3e}{2}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\geq-\frac{e}{2}x+\frac{3e}{2}\Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq\frac{-x+3}{2}\Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq 3-x$$

δ) Με δεδομένο ότι $f^{-1}(x)=\frac{1}{\ln^2 x}$, έχουμε:

$$I=\int_e^{e^2} f^{-1}(x)\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx-\int_e^{e^2}\frac{2}{\ln^3 x}dx$$

Αν θέσουμε $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx$, τότε

$$I_1 = \int_e^{e^2} x' \frac{1}{\ln^2 x} dx = \left[\frac{x}{\ln^2 x} \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \frac{-1}{\ln^3 x} \cdot \frac{2}{x} dx = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx$$

οπότε

$$I = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx = \frac{e^2}{4} - e$$

ε) Σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 25]$ και $[25, 49]$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 25)$ και $\xi_2 \in (25, 49)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(25) - f(1)}{24} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(49) - f(25)}{24}$$

και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(25) - f(1) < f(49) - f(25) \Rightarrow$$

$$2f(25) < f(1) + f(49) \Rightarrow 2e^{\frac{1}{5}} < e + e^{\frac{1}{7}} \Rightarrow e + \sqrt[7]{e} > 2\sqrt[5]{e}$$

ΘΕΜΑ 22ο (35ο – 2012):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f'(-x) f(x) = -x$, για κάθε $x \in R$ (1)**
- **$f(0) = 1$ (2)**

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}$, $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, το οποίο και να προσδιορίσετε.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in R$

ε) Έστω h μια παράγουσα της f στο R με $h(1) = 0$. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(0) \cdot f(0) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f'(0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

β) Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ (3)

Για $x = x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(-x_0)\cdot f(x_0) = -x_0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f'(-x_0)\cdot 0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

δηλαδή $f(0)=0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f(0)=1$

Επομένως για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \neq 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο R, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, και επειδή $f(0)=1>0$, θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in R$

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = \frac{-f'(-x)\cdot f(x) - f'(x)\cdot f(-x)}{f^2(x)}, \quad x \in R \qquad (4)$$

Αν στη σχέση (1), όπου x θέσουμε το $-x$ έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x) = x, \quad x \in R \qquad (5)$$

Η σχέση (4) με βάση τις σχέσεις (1) και (5) γράφεται:

$$g'(x) = \frac{-(-x)-x}{f^2(x)} = 0, \quad x \in R$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R, οπότε $g(x)=c$, για κάθε $x \in R$

Για $x=0$ είναι:

$$g(0) = c \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1$$

οπότε:

$$g(x) = 1, \quad x \in R$$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(x)f'(x) = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \Rightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

και επειδή $f(x)>0$ θα είναι $f(x) = \sqrt{x^2+c}$ για κάθε $x \in R$

Για $x=0$ είναι:

$$f(0) = \sqrt{0+c} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{c} \quad \text{άρα} \quad c = 1$$

οπότε ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}, \text{ για κάθε } x \in R$$

ε) Η συνάρτηση h είναι μια παράγουσα της f στο R, άρα $h'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$. Όμως από το (β) ερώτημα έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x \in R$, επομένως $h'(x)>0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Είναι $h(1)=0$, άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $h(x)=0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και «$1-1$» στο R

Επομένως έχουμε:

- Για $x\in(-\infty\,,\,1)\overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$
- Για $x\in(1\,,\,+\infty)\overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0$

στ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής και $h(x)<0$ για κάθε $x\in[0\,,\,1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$, είναι:

$$E=-\int_0^1 h(x)dx=-\int_0^1 x'h(x)dx=-\left[x\,h(x)\right]_0^1+\int_0^1 x\,h'(x)\,dx=$$

$$=-h(1)+\int_0^1 x\,f(x)\,dx\overset{(8)}{=}\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Θέτουμε:

$$x^2+1=u\text{, οπότε } 2x\,dx=du$$

Όταν $x=0$ το $u=1$ και όταν $x=1$ το $u=2$

Επομένως έχουμε:

$$E=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

ΘΕΜΑ 23ο (36ο – 2012):

Δίνεται η συνάρτηση $G(x)=\ln\dfrac{2x}{1+x}$, $x>0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση G ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το πρόσημο της G, για τις διάφορες τιμές του x

γ) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης G, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$, $0<\lambda<1$

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)=\ln 2$

ΛΥΣΗ

α) Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,\,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$G'(x)=\frac{1}{\frac{2x}{x+1}}\cdot\left(\frac{2x}{x+1}\right)'=\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)}>0 \qquad (2)$$

Επομένως η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

β) Είναι:

$$G(1)=\ln\frac{2\cdot 1}{1+1}=\ln 1=0$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $G(x)=0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 – 1» στο $(0,+\infty)$

Επομένως:

- Για $0<x<1 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G(x)<G(1) \Leftrightarrow G(x)<0$
- Για $x>1 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G(x)>G(1) \Leftrightarrow G(x)>0$
- Για $x=1 \Rightarrow G(x)=G(1) \Leftrightarrow G(x)=0$

γ) Η συνάρτηση G είναι συνεχής και $G(x)<0$ για κάθε $x\in[\lambda,1]\subseteq[0,1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_G, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$, $0<\lambda<1$ είναι:

$$E=-\int_\lambda^1 G(x)dx=\int_1^\lambda G(x)dx=\int_1^\lambda x'G(x)dx=\left[x\,G(x)\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda xG'(x)dx\overset{(1),(2)}{=}$$

$$=\left[x\ln\frac{2x}{x+1}\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda x\frac{1}{x(x+1)}dx=\lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1}-\int_1^\lambda\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1}-\left[\ln|x+1|\right]_1^\lambda=\lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1}-\ln(\lambda+1)+\ln2,\ \ 0<\lambda<1$$

δ) Είναι:

$$\lim_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to0^+}\left[\lambda\ln2\lambda-\lambda\ln(\lambda+1)-\ln(\lambda+1)+\ln2\right]=$$

$$=\lim_{\lambda\to0^+}\left[\lambda\ln2\lambda-(\lambda+1)\ln(\lambda+1)+\ln2\right]=\ln2$$

διότι:

- $\lim_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln2\lambda)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{\lambda\to0^+}\dfrac{\ln2\lambda}{\frac{1}{\lambda}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{\lambda\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}=\lim_{\lambda\to0^+}(-\lambda)=0$
- $\lim_{\lambda\to0^+}\left[(\lambda+1)\ln(\lambda+1)\right]=0$

ΘΕΜΑ 24ο (38ο – 2012):

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-e^{-x^2+x}$, $x\in R$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

ii) $f(x)\le0$ για κάθε $x\in[0,1]$

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu(12x)\right)$

ii) $\lim_{x\to-\infty}\left(12\cdot f(x)+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(2x-1)f(x)$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{1}{2}$ και $x=1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο:

$$f'(x)=-e^{-x^2+x}(-x^2+x)'=(2x-1)e^{-x^2+x}$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x}>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$1-\sqrt[4]{e}$	$\nearrow$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty\,,\,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}\,,\,+\infty\right)$. Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{2}$ με ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)=-e^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}+1=-e^{\frac{1}{4}}+1=1-\sqrt[4]{e}$

β)
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Για $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2+x}\right)\overset{-x^2+x=t}{=}\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x^2+x}+1\right)=0+1=1 \qquad (2)$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$

- Για $x\in(-\infty\,,0)$ είναι:
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x^2+x}\right)\overset{-x^2+x=t}{=}\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-x^2+x}+1\right)=0+1=1 \qquad (3)$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

γ) Το πρόσημο της συνάρτησης $-x^2+x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x^2+x$	$-$	$+$	0	$-$

i) Για κάθε $x \in (-\infty\,,0)\cup(0\,,+\infty)$ είναι:

$$-x^2+x<0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}<e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}<1 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x}>-1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x}+1>0 \Leftrightarrow f(x)>0$$

ii) Για κάθε $x \in [0\,,1]$ είναι:

$$-x^2+x\ge 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}\ge e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}\ge 1 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x}\le -1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x}+1\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le 0$$

δ) i) Για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu(12x)}{x}\right| = \frac{|\eta\mu(12x)|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left|\frac{\eta\mu(12x)}{x}\right| \le \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu(12x)}{x} \le \frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(12x)}{x}=0$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu(12x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\frac{\eta\mu(12x)}{x}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

ii) Για κάθε $x \in (-\infty\,,0)$ είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{x}\right) \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Από τη σχέση (3) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(12\cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 12\cdot 1 + 0 = 12$$

ε) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}\,,\,1\right]$. Επίσης για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}\,,\,1\right] \subseteq [0\,,\,1]$ είναι $2x - 1 \ge 0$ και $f(x) \le 0$, οπότε $g(x) = (2x-1)f(x) \le 0$. Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$, είναι:

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -g(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -(2x-1)f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)\left(-e^{-x^2+x}+1\right)dx =$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)\cdot e^{-x^2+x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(e^{-x^2+x}\right)'dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-x^2\right)'dx =$$

$$= -\left[e^{-x^2+x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x-x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\left(1-e^{\frac{1}{4}}\right) + \left(0-\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} - \frac{5}{4} = \sqrt[4]{e} - \frac{5}{4}$$