ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 27^o:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_1^{f(x)} e^t\left(\frac{1}{t}+\ell nt\right)dt = e^{f(x)}\left[x+\ell n(x^2+1)\right],\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$

δ) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h\left(f(x)+x-3\right)=f\left(h(x)\right)+h(x)-3\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

τότε, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y=x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2e-1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $e^t\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις 1 και f(x) (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο R. Επειδή το $1\in(0,+\infty)$, για να ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^{f(x)} e^t\left(\frac{1}{t}+\ell nt\right)dt$ πρέπει και αρκεί $f(x)\in(0,+\infty)$

Δηλαδή:

$$f(x)>0\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\int_1^{f(x)} e^t\left(\frac{1}{t}+\ell nt\right)dt = e^{f(x)}\left[x+\ell n(x^2+1)\right]\Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)}\left(e^t\frac{1}{t}+e^t\ell nt\right)dt=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)}(e^t\ell nt)'dt=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\left[e^t\ell nt\right]_1^{f(x)}=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}\ell nf(x)=e^{f(x)}\left[x+\ell n\left(x^2+1\right)\right]\overset{e^{f(x)}\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\ell nf(x)=x+\ell n\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow \ell nf(x)=\ell ne^x+\ell n\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\ell nf(x)=\ell n\left[e^x\left(x^2+1\right)\right]\Leftrightarrow f(x)=e^x\left(x^2+1\right),\quad x\in R$$

γ) $1^{ος}$ τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-3\ ,\quad x\in[0\,,1]$

- ♦ Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0\,,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ ○ $g(0)=f(0)-3=1-3=-2<0$
  - ○ $g(1)=f(1)-3=2e-3>0$

  οπότε $g(0)g(1)<0$

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0\,,1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0\,,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=3$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x(x^2+1)\right)'=e^x(x^2+1)+2xe^x=e^x\left(x^2+1+2x\right)=e^x\left(x+1\right)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x)>0$, για κάθε $(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,+\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

$2^{ος}$ τρόπος:

Η συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[0\,,1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, διότι είναι συνεχής σε αυτό ως γινόμενο συνεχών και $f(0)=1\neq 2e=f(1)$

Είναι $f(0)=1<3<2e=f(1)$, άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x(x^2+1)\right)'=e^x(x^2+1)+2xe^x=e^x\left(x^2+1+2x\right)=e^x\left(x+1\right)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) > 0$, για κάθε $(-\infty , -1)\cup(-1 , +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

δ) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$h\big(f(x)+x-3\big)=f\big(h(x)\big)+h(x)-3$$

Για $x = x_0$ έχουμε:

$$h\big(f(x_0)+x_0-3\big)=f\big(h(x_0)\big)+h(x_0)-3 \overset{f(x_0)=3}{\Rightarrow}$$

$$h\big(3+x_0-3\big)=f\big(h(x_0)\big)+h(x_0)-3 \Rightarrow h(x_0)=f\big(h(x_0)\big)+h(x_0)-3 \Rightarrow$$

$$f\big(h(x_0)\big)=3 \overset{f(x_0)=3}{\Rightarrow} f\big(h(x_0)\big)=f(x_0) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} h(x_0)=x_0$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y = x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ε) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0 , 1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R , με $f'(x)=e^x(x+1)^2$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0 , 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{e^1(1^2+1)-e^0(0^2+1)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=2e-1$$

ΘΕΜΑ 28ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=1+e^{x^2}$, $x\in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Αν $h(x)=\int_1^{x^3} f(t)dt$, $x\in R$, να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 h(x)dx+\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx = 0$

ii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=-\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}$ είναι συνεχής στο R , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις συναρτήσεις $-x$ και x (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο R

Επομένως η συνάρτηση $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}dt$ έχει πεδίο ορισμού το R

Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = \int_{-x}^{0} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt + \int_{0}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt =$$

$$= \int_{0}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt - \int_{0}^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{0}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$. Επίσης η συνάρτηση $\varphi(-x) = \int_{0}^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\int_{0}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \right)' - \left(\int_{0}^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \right)' =$$

$$= \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} - \frac{e^{-x} + e^{x^2}}{e^{-x} + 1}(-x)' = \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{\frac{1}{e^x} + e^{x^2}}{\frac{1}{e^x} + 1} =$$

$$= \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{1 + e^x e^{x^2}}{1 + e^x} = \frac{e^x + e^{x^2} + 1 + e^x e^{x^2}}{e^x + 1} =$$

$$= \frac{e^x(1 + e^{x^2}) + (1 + e^{x^2})}{e^x + 1} = \frac{(1 + e^{x^2})(e^x + 1)}{e^x + 1} = 1 + e^{x^2}, \quad x \in R$$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(1 + e^{x^2}\right)' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$$

Είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$

Σ.Κ.

Είναι:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } (-\infty, 0] \\ f''(x) < 0 \quad \text{στο } (-\infty, 0) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ f''(x) > 0 \quad \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$

- $f''(0) = 0$ και εκατέρωθεν του $x_o = 0$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης f, άρα το σημείο $(0, f(0))$, δηλαδή το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$w(x) = \int_1^x f(t)\,dt, \quad x \in R$$

Είναι:

$$h(x) = \int_1^{x^3} f(t)\,dt = w(x^3), \quad x \in R \qquad (1)$$

Η συνάρτηση w είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f, με παράγωγο:

$$w'(x) = \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \quad x \in R \qquad (2)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$h'(x) \overset{(1)}{=} \left(w(x^3)\right)' = w'(x^3)\cdot(x^3)' \overset{(2)}{=} 3x^2\cdot f(x^3), \quad x \in R$$

Είναι:

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 (x)'h(x)dx = \left[x h(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x h'(x)dx =$$

$$= h(1) - \int_0^1 x\cdot 3x^2\cdot f(x^3)dx \overset{h(1)=0}{=} -\int_0^1 x\cdot 3x^2\cdot f(x^3)dx$$

Θέτουμε:

$$u = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{u}, \ u \geq 0 \quad \text{και} \quad du = 3x^2dx$$

Για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 1$ είναι $u = 1$

Άρα έχουμε:

$$\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 x\cdot 3x^2\cdot f(x^3)dx = -\int_0^1 \sqrt[3]{u}\, f(u)du = -\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx$$

Οπότε:

$$\int_0^1 h(x)dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)dx = 0 \qquad (3)$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\int_0^x h(t)\,dt+\int_0^x \sqrt[3]{t}\,f(t)\,dt\,,\ \ x\in[0\,,1]$$

Η συνάρτηση $\int_0^x h(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0\,,1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης h και η συνάρτηση $\int_0^x \sqrt[3]{t}\,f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0\,,1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\sqrt[3]{t}\,f(t)$, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0\,,1]$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x)=\left(\int_0^x h(t)\,dt\right)'+\left(\int_0^x \sqrt[3]{t}\,f(t)\,dt\right)'=$$

$$=h(x)+\sqrt[3]{x}\,f(x)\,,\ \ x\in[0\,,1]$$

Είναι:

- $g(0)=0$ και
- $g(1)=\int_0^1 h(x)\,dx+\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,f(x)\,dx\overset{(\beta)}{=}0$

οπότε $g(0)=g(1)$

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0\,,1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0\,,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_0)=0\Leftrightarrow h(x_0)+\sqrt[3]{x_0}\,f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=-\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$$

Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,1)$, με παράγωγο:

$$g''(x)=h'(x)+\left(\sqrt[3]{x}\right)'f(x)+\sqrt[3]{x}\,f'(x)=$$

$$=h'(x)+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'f(x)+\sqrt[3]{x}\,f'(x)=$$

$$=3x^2f\left(x^3\right)+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}f(x)+\sqrt[3]{x}\left(1+e^{x^2}\right)=$$

$$=3x^2f\left(x^3\right)+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x)+\sqrt[3]{x}\left(1+e^{x^2}\right)$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$f'(x)=1+e^{x^2}>0 \text{ για κάθε } x\in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επίσης έχουμε:

$$f(0)=\int_0^0 \frac{e^t+e^{t^2}}{e^t+1}\,dt=0$$

Επομένως:

- για $x<0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<0$
- για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$

Άρα για κάθε $x \in (0,1)$ είναι:

$$f(x)>0 \quad \text{και} \quad f(x^3)>0$$

Επομένως:

$$g''(x)>0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Οπότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$, άρα το $x_0 \in (0,1)$ είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ 29ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

- $f(x-y)=f(x)-f(y)-1$, **για κάθε** $x, y \in \mathbb{R}$ **(1)**
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=2$ **(2)**
- $|z-i|\big(f(x)+1\big) \le \eta\mu 2x$, **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **και** $z \in \mathbb{C}$ **(3)**

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου με $|z_1-z_2|=2$, τότε να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|=2$

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii) $f(x)=2x-1$, $x\in\mathbb{R}$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$, $x\in\mathbb{R}$

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$ και ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt$

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1+2\rho_2>1$

ΛΥΣΗ

α) Για $x=y=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(0)=f(0)-f(0)-1 \Leftrightarrow f(0)=-1 \quad (4)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = |z - i|\big(f(x)+1\big) - ημ2x\,,\ x \in R$
- Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$|z-i|\big(f(x)+1\big) \le ημ2x \Leftrightarrow$$

$$|z-i|\big(f(x)+1\big) - ημ2x \le 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) \le 0 \Leftrightarrow g(x) \le g(0)$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_o = 0$ του πεδίου ορισμού της.

- Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(-1)}{x} = 2 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2 \Leftrightarrow f\,'(0) = 2 \qquad (5)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με $f\,'(0) = 2$, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με $g'(0) = |z-i|f\,'(0) - 2συν0 \overset{(5)}{=} 2|z-i| - 2 \quad (6)$

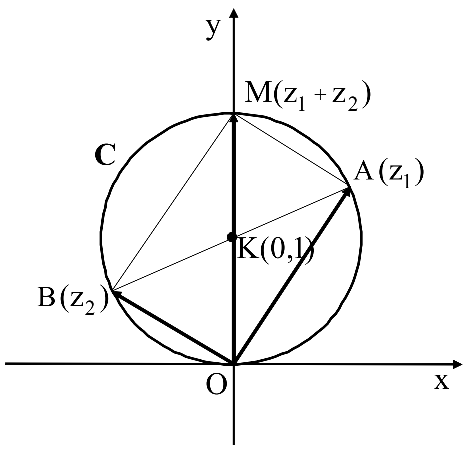
Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε

$$g'(0) = 0 \overset{(6)}{\Leftrightarrow} 2|z-i| - 2 = 0 \Leftrightarrow |z-i| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0\,,1)$ και ακτίνα $ρ = 1$

β) Έστω Α και Β οι εικόνες αντίστοιχα των μιγαδικών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι: $(AB) = |z_1 - z_2|$, άρα $(AB) = 2$. Επειδή τα σημεία $A\,,B$ ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο, που έχει ακτίνα $ρ = 1$, συμπεραίνουμε ότι τα $A\,,B$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου αυτού.

Αν Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού $z_1 + z_2$, τότε το παραλληλόγραμμο ΟΑΜΒ είναι ορθογώνιο, αφού η γωνία $A\widehat{O}B$ βαίνει σε ημικύκλιο.



1ος τρόπος:

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσοι, δηλαδή

$$(OM) = (AB) \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

Επομένως $|z_1 + z_2| = 2$

2ος τρόπος:

Οι διαγώνιοι ΟΜ και ΑΒ διχοτομούνται, άρα το κέντρο Κ του κύκλου, θα είναι το κοινό μέσο των δύο διαγωνίων,

Άρα $|z_1 + z_2| = (OM) = 2(OK) = 2ρ = 2\cdot 1 = 2$

γ) **i)** Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο R, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o \in R$. Έστω $x_o \in R$, τότε για κάθε $x \in R$ με $x \neq x_o$ θέτουμε $x = x_o - h$, οπότε όταν το $x \to x_o$ το $h \to 0$ και έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{x_o-h-x_o}\overset{(1)}{=}$$

$$\frac{f(x_o)-f(h)-1-f(x_o)}{-h}=\frac{-f(h)-1}{-h}=\frac{f(h)+1}{h}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1}{h}\overset{(2)}{=}2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o \in R$ με $f'(x_o)=2$. Γενικά η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2$

ii) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x)=2 \Leftrightarrow f'(x)=(2x)', \text{ οπότε } f(x)=2x+c,\ x\in R$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=2\cdot 0+c \overset{(4)}{\Leftrightarrow} c=-1$$

Άρα

$$f(x)=2x-1,\ x\in R$$

δ) Είναι:

$$\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt=\int_0^x \frac{2t-1}{e^t}dt=\int_0^x (2t-1)e^{-t}dt=-\int_0^x (2t-1)(e^{-t})'dt=$$

$$=-\left[(2t-1)e^{-t}\right]_0^x+\int_0^x (2t-1)'e^{-t}dt=-\left((2x-1)e^{-x}-(2\cdot 0-1)e^0\right)+\int_0^x 2e^{-t}dt=$$

$$=-(2x-1)e^{-x}-1-2\int_0^x e^{-t}(-t)'dt=-(2x-1)e^{-x}-1-2\left[e^{-t}\right]_0^x=$$

$$=-(2x-1)e^{-x}-1-2(e^{-x}-e^0)=-2xe^{-x}+e^{-x}-1-2e^{-x}+2=$$

$$=-2xe^{-x}-e^{-x}+1=\frac{-2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+1=\frac{e^x-2x-1}{e^x}$$

ε) Είναι:

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-2x-1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=1$, γιατί

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(e^{-x})\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to-\infty}(e^u)=0$ και
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x})\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to-\infty}(1-e^u)=1-0=1$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-2x-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+(-2x-1)e^{-x}\right] = +\infty$, γιατί

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$

στ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt \overset{(\delta)}{=} \frac{e^x-2x-1}{e^x}$, $x\in R$

Η συνάρτηση $\frac{f(t)}{e^t}$ είναι συνεχής στο R , άρα η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R , με

$$F΄(x) = \left(\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt\right)' = \frac{f(x)}{e^x} = \frac{2x-1}{e^x}$$

Είναι:

- $F΄(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- $F΄(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $F΄(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατά της F φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F΄(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	↘	ελάχιστο	↗	1

Για $x=0$ είναι $F(0) = \int_0^0 \frac{f(t)}{e^t}dt = 0$, άρα η εξίσωση $F(x) = 0$ στο διάστημα $\Delta_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ έχει ρίζα την $\rho_1 = 0$, που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

Είναι:

- $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{1}{2} - 1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} < 0$, γιατί $e < 4 \Rightarrow \sqrt{e} < 2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{f(t)}{e^t}dt \overset{(\varepsilon),(i)}{=} 1$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι

$$F(\Delta_2) = \left[F\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x\to+\infty}F(x)\right) = \left[\frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}, 1\right)$$

Το $0 \in F(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $F(x) = 0$ στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ έχει μια ρίζα ρ_2, που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2

Επειδή $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $\rho_2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\rho_2 > 1$, οπότε $\rho_1 + 2\rho_2 = 0 + 2\rho_2 = 2\rho_2 > 1$

Επομένως η εξίσωση $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 + 2\rho_2 > 1$

ΘΕΜΑ 30ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = 4 \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} + \kappa , \quad x > 0 \qquad (1)$$

όπου κ είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 2 \cdot \left(8 + |z^2 - 9|\right) \qquad (2)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$, για κάθε $x > 0$ και ότι $\int_1^3 f(x)dx > 2f(2)$

δ) Αν επιπλέον είναι $f'(1) = 0$ και $f(1) = -1$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x$, $x > 0$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 2 \cdot \left(8 + |z^2 - 9|\right) \Leftrightarrow |z-3|^2 - 2|z-3||z+3| + |z+3|^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\left(|z-3| - |z+3|\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \left||z-3| - |z+3|\right| = 4 \quad \text{(Ορισμός υπερβολής)}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία $E(3, 0)$, $E'(-3, 0)$, κορυφές τα σημεία $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$ και εξίσωση $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

β) Λόγω του ερωτήματος (α) ισχύει $|z| \geq \alpha = 2$ για κάθε μιγαδικό z που η εικόνα του ανήκει στην υπερβολή C, άρα $\kappa = 2$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - \left(f'(x-h) - f'(x)\right)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right) = \frac{1}{2}\left(f''(x) + f''(x)\right) = f''(x),$$

γιατί

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h} \overset{-h=\omega}{=} \lim_{\omega\to 0}\frac{f'(x+\omega)-f'(\omega)}{\omega} = f''(x)$$

και η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Από την (1) έχουμε:

$$f''(x) = 4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}+2 \Leftrightarrow f''(x) = 2\cdot\frac{2-2\ln x+x^2}{x^2},\ x>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2-2\ln x + x^2,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $g'(x) = -\dfrac{2}{x}+2x = \dfrac{2(x^2-1)}{x},\ x>0$

Είναι:

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$ και
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\,,1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=3$

Άρα $g(x)\ge 3$, για κάθε $x>0$.

Επομένως $f''(x) = 2\cdot\dfrac{g(x)}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) 1ος τρόπος: (με τη βοήθεια ακρότατου)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(4-x)+f(x),\ x>0$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = -f'(4-x)+f'(x),\ x>0$

Είναι:

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow -f'(4-x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(4-x)=f'(x) \overset{f'\ 1-1}{\Leftrightarrow} 4-x=x \Leftrightarrow x=2$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow -f'(4-x)+f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(4-x)<f'(x) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} 4-x<x \Leftrightarrow x>2$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$2f(2)$	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

- Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0\ ,\ 2\right]$
- Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[2\ ,+\infty\right)$
- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 2$, με ελάχιστη τιμή $h(2) = 2f(2)$

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \geq 2f(2) \Leftrightarrow f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$ (3)

2^{ος} τρόπος (ανισότητα Jensen)

Υπόδειξη:

Για $x = 2$ ισχύει ως ισότητα

Για $x > 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $\left[4-x\ ,\ 2\right]$ και $\left[2\ ,\ x\right]$

Για $0 < x < 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $\left[x\ ,\ 2\right]$ και $\left[2\ ,\ 4-x\right]$

και επειδή f' γνησίως αύξουσα γιατί f κυρτή, … προκύπτει το ζητούμενο.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(4-x) + f(x) - 2f(2)$, $x > 0$

Η Φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1\ ,\ 3\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $\Phi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1\ ,\ 3]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = 2$, λόγω της σχέσης (3), άρα

$$\int_1^3 \left(f(4-x) + f(x) - 2f(2)\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(4-x)dx + \int_1^3 f(x)dx - 2f(2)\int_1^3 dx > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$2\int_1^3 f(x)dx > 2f(2)\int_1^3 dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx > f(2)\cdot(3-1) \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx > 2f(2)$$

$(*)$ Είναι:

$$\int_1^3 f(4-x)\,dx = \int_1^3 f(x)dx$$

Πράγματι, αν θέσουμε $4 - x = t$, τότε $dt = (4-x)'\,dx = -dx$

Για $x = 1$ είναι $t = 3$ και $x = 3$ είναι $t = 1$, οπότε έχουμε:

$$\int_1^3 f(4-x)dx = -\int_3^1 f(t)dt = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(x)dx$$

δ) Για κάθε $x \in (0\ ,+\infty)$ έχουμε:

$$f''(x) = 4\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)' = 4\cdot\frac{(\ln x)'x - (x)'\ln x}{x^2} + (2x)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)\right)' = 4\left(\frac{\ln x}{x}\right)' + (2x)' \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)' = \left(4\frac{\ln x}{x} + 2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 4\frac{\ln x}{x} + 2x + c\ ,\ c \in R\ ,\ x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) = 2 + c \Leftrightarrow c = -2$, γιατί $f'(1) = 0$

Άρα $f'(x) = 4\dfrac{\ln x}{x} + 2x - 2\ ,\ \ x > 0$

Για κάθε $x \in (0\ ,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 4\frac{\ln x}{x} + 2x - 2 \Leftrightarrow f'(x) = 4\ln x\,(\ln x)' + \left(x^2 - 2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(2\ln^2 x + x^2 - 2x\right)' \Leftrightarrow f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x + c\ ,\ c \in \mathbb{R},\ x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$, γιατί $f(1) = -1$

Άρα $f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x\ ,\ \ x > 0$

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z \neq -1$, και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\mathbf{x e^x f'(e^x) = 2x^2 + \left|(z+1)\cdot x\right|}$, **για κάθε $\mathbf{x \in R^*}$ (1)**
- $\mathbf{f(1) = -1}$ **(2)**

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1|\cdot \ln x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1|\cdot \ln x - 1, & x \geq 1 \end{cases}}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1, \xi_2 \in (0\ ,+\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{\xi_1 \cdot \xi_2 = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|}}$$

δ) Έστω Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όπου $\mathbf{g(x) = \ln^2 x - 1}$, $\mathbf{x > 0}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\mathbf{x = e}$ και $\mathbf{x = e^2}$. Αν $\mathbf{E = e^2}$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$x e^x f'(e^x) = 2x^2 + \left|(z+1)\cdot x\right| \Leftrightarrow x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |z+1|\cdot|x| \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(e^x) = 2x + |z+1|\cdot\frac{|x|}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x f'(e^x) = 2x - |z+1|\ ,\ \ x < 0 \\ e^x f'(e^x) = 2x + |z+1|\ ,\ \ x > 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in (-\infty\ ,\ 0)$ έχουμε:

$$e^x f'(e^x) = 2x - |z+1| \Leftrightarrow \left(f(e^x)\right)' = \left(x^2 - |z+1|\cdot x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 - |z+1|\cdot x + c_1\ \ ,\ \ \ x < 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x < 0$ είναι $e^x < e^0 = 1$, άρα $0 < u < 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u - |z+1|\cdot \ln u + c_1\ \ ,\ \ \ 0 < u < 1$$

Για κάθε $x \in (0\,,\,+\infty)$ έχουμε:

$$e^x f'(e^x) = 2x + |z+1| \Leftrightarrow \left(f(e^x)\right)' = \left(x^2 + |z+1|\cdot x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 + |z+1|\cdot x + c_2 \quad , \quad x > 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x > 0$ είναι $e^x > e^0 = 1$, άρα $u > 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u + |z+1|\cdot \ln u + c_2 \quad , \quad u > 1$$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1|\cdot \ln u + c_1 & , \quad 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1|\cdot \ln u + c_2 & , \quad u > 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, οπότε $\lim\limits_{u\to 1^-} f(u) = \lim\limits_{u\to 1^+} f(u) = f(1)$, δηλαδή $c_1 = c_2 = -1$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1|\cdot \ln u - 1 & , \quad 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1|\cdot \ln u - 1 & , \quad u \geq 1 \end{cases}$$

Επομένως

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1|\cdot \ln x - 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1|\cdot \ln x - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

γ)
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,1)$ με $f'(x) = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} - |z+1|\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x - |z+1|}{x}$
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1\,,+\infty)$ με

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + |z+1|\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\ln x + |z+1|}{x}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,1)\cup(1\,,+\infty)$, με:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln x - |z+1|}{x} & , \quad x \in (0\,,1) \\ \dfrac{2\ln x + |z+1|}{x} & , \quad x \in (1\,,+\infty) \end{cases}$$

- Για κάθε $x \in (0\,,1)$ είναι $\ln x < 0$, οπότε $f'(x) = \dfrac{2\ln x - |z+1|}{x} < 0$
- Για κάθε $x \in (1\,,+\infty)$ είναι $\ln x > 0$, οπότε $f'(x) = \dfrac{2\ln x + |z+1|}{x} > 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	//	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	
			ελάχιστο		

Έχουμε:

- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } (0,1] \\ f'(x)<0 \text{ στο } (0,1) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$
- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } [1,+\infty) \\ f'(x)>0 \text{ στο } (1,+\infty) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=-1$

Είναι:

○ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x - |z+1|\cdot \ln x - 1\right) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-|z+1|\cdot \ln x\right)=+\infty$, αφού $|z+1|>0$

○ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln^2 x + |z+1|\cdot \ln x - 1\right) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln^2 x\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(|z+1|\cdot \ln x\right)=+\infty$, αφού $|z+1|>0$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_1)=\left[f(1),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=[-1,+\infty)$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_2)=\left[f(1),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=[-1,+\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$$

γ)
- Το $0\in f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα $\xi_1\in(0,1)$, ($\xi_1\neq 1$, επειδή $f(1)=-1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$
- Το $0\in f(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα $\xi_2\in(1,+\infty)$, ($\xi_2\neq 1$, αφού $f(1)=-1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$

Επομένως υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1,\xi_2\in(0,+\infty)$, με $\xi_1\neq\xi_2$ αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα τέτοια, ώστε $f(\xi_1)=0$ και $f(\xi_2)=0$

Δηλαδή

$$\ln^2\xi_1 - |z+1|\cdot\ln\xi_1 - 1 = 0 \ \text{, με } \xi_1\in(0,1)$$

$$\ln^2\xi_2 + |z+1|\cdot\ln\xi_2 - 1 = 0 \ \text{, με } \xi_2\in(1,+\infty)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\ln^2\xi_1-\ln^2\xi_2-|z+1|\cdot\ln\xi_1-|z+1|\cdot\ln\xi_2=0\Leftrightarrow$$

$$(\ln\xi_1-\ln\xi_2)\cdot(\ln\xi_1+\ln\xi_2)-|z+1|\cdot(\ln\xi_1+\ln\xi_2)=0\Leftrightarrow$$

$$(\ln\xi_1+\ln\xi_2)\cdot(\ln\xi_1-\ln\xi_2-|z+1|)=0\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\ln\xi_1+\ln\xi_2=0\\ \quad ή\\ \ln\xi_1-\ln\xi_2-|z+1|=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\ln(\xi_1\xi_2)=0\\ \quad ή\\ \ln\dfrac{\xi_1}{\xi_2}=|z+1|\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\xi_1\xi_2=1\\ \quad ή\\ \dfrac{\xi_1}{\xi_2}=e^{|z+1|}\end{array}\right.$$

δ) Για κάθε $x\in\left[e,\ e^2\right]$ έχουμε:

$$f(x)-g(x)=\ln^2x+|z+1|\cdot\ln x-1-\ln^2x+1=|z+1|\cdot\ln x>0$$

Επίσης η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο $\left[e,\ e^2\right]\subseteq(0,+\infty)$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=e$ και $x=e^2$ είναι:

$$E=\int_e^{e^2}(f(x)-g(x))\,dx$$

Από υπόθεση είναι $E=e^2$, οπότε έχουμε:

$$e^2=\int_e^{e^2}(|z+1|\cdot\ln x)\,dx\Leftrightarrow e^2=|z+1|\cdot\int_e^{e^2}\ln x\,dx\Leftrightarrow e^2=|z+1|\cdot\int_e^{e^2}(x)'\ln x\,dx\Leftrightarrow$$

$$e^2=|z+1|\cdot\left([x\ln x]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}x(\ln x)'dx\right)\Leftrightarrow e^2=|z+1|\cdot\left(e^2\ln e^2-e\ln e-\int_e^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)\Leftrightarrow$$

$$e^2=|z+1|\cdot\left(2e^2-e-\int_e^{e^2}1\,dx\right)\Leftrightarrow e^2=|z+1|\cdot\left(2e^2-e-(e^2-e)\right)\Leftrightarrow e^2=|z+1|\cdot e^2\Leftrightarrow|z+1|=1$$

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(-1,\ 0)$ και ακτίνα $\rho=1$

ΘΕΜΑ 32ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$\left|z+\frac{3}{2}i\right|>\left|3z+\frac{1}{2}i\right| \qquad (1)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|z|^x + 2012^{1-x}\right)$$

γ) Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, που είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο R και και z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, που ικανοποιούν την (1), τότε να αποδείξετε ότι, για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α, με $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω z ένας τυχαίος μιγαδικός που ικανοποιεί την (1). Τότε έχουμε:

$$\left|z + \frac{3}{2}i\right| > \left|3z + \frac{1}{2}i\right| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i| > |6z + i| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i|^2 > |6z + i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z+3i)(2\overline{z}-3i) > (6z+i)(6\overline{z}-i) \Leftrightarrow$$

$$4z\overline{z} - 6zi + 6\overline{z}i + 9 > 36z\overline{z} - 6zi + 6\overline{z}i + 1 \Leftrightarrow$$

$$32z\overline{z} < 8 \Leftrightarrow z\overline{z} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z|^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

β) Επειδή $|z| < \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$0 < |z|^x + (2012)^{1-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x} \qquad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(2012)^{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2012}{(2012)^x} = 0, \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty}(2012)^x = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x}\right] = 0 \qquad (3)$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ (4)

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[|z|^x + (2012)^{1-x}\right] = 0$$

γ) Είναι:

$$\frac{|3z_1+7z_2|}{5} \le \frac{3|z_1|+7|z_2|}{5} < \frac{3\cdot\frac{1}{2}+7\cdot\frac{1}{2}}{5}=1$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f\left(\frac{|3z_1+7z_2|}{5}\right)<f(1) \Rightarrow 2f\left(\frac{|3z_1+7z_2|}{5}\right)<2f(1)$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\ge 0$, ισχύει:

$$2f(1)\le f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha=0$ τότε η ισχύει η ισότητα.
- Αν $\alpha>0$ τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f σε καθένα από τα διαστήματα $[1-\alpha\,,1]$ και $[1\,,1+\alpha]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(1-\alpha\,,1)$ και $\xi_2\in(1\,,1+\alpha)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)}=\frac{f(1)-f(1-\alpha)}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1+\alpha)-f(1)}{1+\alpha-1}=\frac{f(1+\alpha)-f(1)}{\alpha}$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

$$1-\alpha<\xi_1<1<\xi_2<1+\alpha \Rightarrow \xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$$

Άρα

$$\frac{f(1)-f(1-\alpha)}{\alpha}<\frac{f(1+\alpha)-f(1)}{\alpha} \Rightarrow$$

$$f(1)-f(1-\alpha)<f(1+\alpha)-f(1) \Rightarrow$$

$$2f(1)<f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει $2f(1)\le f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$

Άρα για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α, με $\alpha\ge 0$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{|3z_1+7z_2|}{5}\right)<f(1-\alpha)+f(1+\alpha)$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(xy)=f(x)f(y)-\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ **, για κάθε** $x\,,y\in(0\,,+\infty)$ **(1)**
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ne 0$ **, για κάθε** $x\in(0\,,+\infty)$

β) Να βρείτε το $f(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$**,** $x\in(0\,,+\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{x^2}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $x\left(x+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\right)=x-1$ **στο διάστημα** $(0,+\infty)$

στ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\sigma\varphi x}\frac{1}{t^2f(t)}dt=1$, **για κάθε** $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

ζ) Αν g **είναι μια συνεχής συνάρτηση στο** $\mathbb{R}$ **και** $\alpha>0$**, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα**

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\big(f(x)\big)\frac{\ln x}{x}dx$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός ρ τέτοιος, ώστε $f(\rho)=0$ (2)

Για $x=\rho$ και $y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\rho)=0-\frac{\rho^2+1}{\rho}\overset{(2)}{\Rightarrow}\rho^2+1=0\Rightarrow\rho^2=-1$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x)\neq0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) Για $x=y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1)=f^2(1)-2\Leftrightarrow f^2(1)-f(1)-2=0\Leftrightarrow f(1)=2\quad ή\quad f(1)=-1$$

Το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει θετικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε για οποιοδήποτε $M>0$ να ισχύει $f(x)>M$ για κάθε $x>x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f για για κατάλληλο x, παίρνει θετική τιμή. Εξάλλου η f, ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x, διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε $f(1)=2$

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x)=2f(x)-\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{x}$$

δ) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=e^1=e\ ,\ \text{γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\overset{+\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=1$$

ε) Στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$x\left(x+\text{συν}\frac{\pi}{x}\right)=x-1 \Leftrightarrow x+\text{συν}\frac{\pi}{x}=1-\frac{1}{x} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=1-\text{συν}\frac{\pi}{x} \Leftrightarrow f(x)=1-\text{συν}\frac{\pi}{x} \qquad (3)$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2+1\geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=2$

Επίσης για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $1-\text{συν}\dfrac{\pi}{x}\leq 2$

Επομένως η εξίσωση (3) θα έχει λύση αν και μόνο αν $\begin{cases} f(x)=2 \\ 1-\text{συν}\dfrac{\pi}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ \text{συν}\dfrac{\pi}{x}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

στ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{\text{εφ}x}\frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)}dt+\int_{\frac{1}{e}}^{\text{σφ}x}\frac{1}{t^2 f(t)}dt\ ,\quad x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $h(x)=1$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$

Στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{\text{εφ}x}\right)}\cdot(\text{εφ}x)'+\frac{1}{\text{σφ}^2x\cdot f(\text{σφ}x)}\cdot(\text{σφ}x)'=$$

$$=\frac{1}{f\left(\frac{1}{\text{εφ}x}\right)}\cdot\frac{1}{\text{συν}^2x}+\frac{1}{\text{σφ}^2x\cdot f(\text{σφ}x)}\cdot\frac{-1}{\text{ημ}^2x}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\text{εφ}x}+\text{εφ}x}\cdot\left(1+\text{εφ}^2x\right)-\frac{1}{\text{σφ}^2x\cdot\left(\frac{1}{\text{σφ}x}+\text{σφ}x\right)}\cdot\left(1+\text{σφ}^2x\right)=$$

$$=\frac{\text{εφ}x}{1+\text{εφ}^2x}\cdot\left(1+\text{εφ}^2x\right)-\frac{\text{σφ}x}{\text{σφ}^2x\cdot\left(1+\text{σφ}^2x\right)}\cdot\left(1+\text{σφ}^2x\right)=$$

$$=\text{εφ}x-\frac{1}{\text{σφ}x}=\text{εφ}x-\text{εφ}x=0$$

Δηλαδή η h είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$

Είναι:

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\,dt+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t^2\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{t}{t^2+1}\,dt+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t(t^2+1)}\,dt=$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t(t^2+1)}\right)dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{t^2+1}{t(t^2+1)}\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln t\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=$$

$$=\ln 1-\ln\frac{1}{e}=\ln 1-\left(\ln 1-\ln e\right)=\ln e=1$$

Άρα $h(x)=1$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

ζ) Είναι**:**

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\big(f(x)\big)\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\,dx$$

Θέτουμε:

$$u=\frac{1}{x},\ \text{οπότε}\ x=\frac{1}{u}\ \text{και}\ dx=-\frac{1}{u^2}\,du$$

Για $x=\frac{1}{\alpha}$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $u=\frac{1}{\alpha}$

Έχουμε:

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\cdot\ln\frac{1}{u}\cdot u\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\cdot(-\ln u)\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)du=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\frac{\ln u}{u}\,du=$$

$$=-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}g\left(\frac{1}{u}+u\right)\frac{\ln u}{u}\,du=-I$$

Είναι $I=-I$, δηλαδή $2I=0$, οπότε $I=0$

ΘΕΜΑ 34ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(x)\ln f(x)+2xf'(x)=0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)**
- **$f(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (2)**

- $\mathbf{f(1) = e}$ **(3)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι $2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3 - x$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x)\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)dx$

ε) Να αποδείξετε ότι $e + \sqrt[7]{e} > 2\sqrt[5]{e}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x)\ln f(x) + 2x f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln f(x) + \sqrt{x}\,\frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x}\ln f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln f(x) = c$$

Είναι:

$f(1) = e$, οπότε $c = 1$

Άρα:

$$\sqrt{x}\ln f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}},\ x \in (0, +\infty)$$

β) Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x_1}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1 – 1 », οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f, θέτουμε $f(x) = y$ και λύνουμε ως προς x.

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = y \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ln y \\ y > 0 \\ \ln y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{\ln y} \\ y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\ln^2 y} \\ y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln^2 y} \\ y > 1 \end{cases}$$

Άρα

$$f^{-1} : (1, +\infty) \to R \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο στο $(0, +\infty)$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f''(x) = -\frac{\dfrac{-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}} \cdot 2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{4x^3} = \frac{3\sqrt{x}+1}{4x^3} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$, είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

Είναι:

$$f(1) = e \quad \text{και} \quad f'(1) = -\frac{e}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon) : y - e = -\frac{e}{2}(x-1) \Rightarrow (\varepsilon) : y = -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2}$$

Η συνάρτηση είναι κυρτή, οπότε η εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής, είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \geq \frac{-x+3}{2} \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \geq 3 - x$$

δ) Με δεδομένο ότι $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$, έχουμε:

$$I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x)\left(1 - \frac{2}{\ln x}\right)dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx$$

Αν θέσουμε $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x}dx$, τότε

$$I_1 = \int_e^{e^2} x' \frac{1}{\ln^2 x}dx = \left[\frac{x}{\ln^2 x}\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \frac{-1}{\ln^3 x} \cdot \frac{2}{x}dx = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx$$

οπότε

$$I = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x}dx = \frac{e^2}{4} - e$$

ε) Σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 25]$ και $[25, 49]$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 25)$ και $\xi_2 \in (25, 49)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(25) - f(1)}{24} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(49) - f(25)}{24}$$

και η συνάρτηση $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(25) - f(1) < f(49) - f(25) \Rightarrow$$

$$2f(25) < f(1) + f(49) \Rightarrow 2e^{\frac{1}{5}} < e + e^{\frac{1}{7}} \Rightarrow e + \sqrt[7]{e} > 2\sqrt[5]{e}$$

ΘΕΜΑ 35ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f'(-x)f(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)**
- **$f(0) = 1$ (2)**

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(-x)}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να προσδιορίσετε.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

ε) Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση $h(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(0) \cdot f(0) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f'(0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

β) Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ (3)

Για $x = x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(-x_0) \cdot f(x_0) = -x_0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f'(-x_0) \cdot 0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

δηλαδή $f(0) = 0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f(0) = 1$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, και επειδή $f(0) = 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = \frac{-f'(-x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f(-x)}{f^2(x)} \ , \quad x \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Αν στη σχέση (1), όπου x θέσουμε το $-x$ έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x)=x\ ,\quad x\in R \qquad (5)$$

Η σχέση (4) με βάση τις σχέσεις (1) και (5) γράφεται:

$$g'(x)=\frac{-(-x)-x}{f^2(x)}=0\ ,\quad x\in R$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R, οπότε $g(x)=c$, για κάθε $x\in R$

Για $x=0$ είναι:

$$g(0)=c\Leftrightarrow \frac{f(0)}{f(0)}=c\Leftrightarrow c=1$$

οπότε:

$$g(x)=1\ ,\quad x\in R$$

δ) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g(x)=1\Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=1\Leftrightarrow f(-x)=f(x) \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f(x)f'(x)=x\Rightarrow\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\Rightarrow f^2(x)=x^2+c$$

και επειδή $f(x)>0$ θα είναι $f(x)=\sqrt{x^2+c}$ για κάθε $x\in R$

Για $x=0$ είναι:

$$f(0)=\sqrt{0+c}\Leftrightarrow 1=\sqrt{c} \quad \text{άρα} \quad c=1$$

οπότε ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1},\ \text{για κάθε } x\in R$$

ε) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f με $h'(x)=f(x)>0$, για κάθε $x\in R$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Είναι:

$$h(1)=\int_1^1 f(t)dt=0 \qquad (8)$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $h(x)=0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση
h
είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1 – 1» στο R

Επομένως:

- Για $x\in(-\infty\,,\,1)\overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)<h(1)\Leftrightarrow h(x)<0$
- Για $x\in(1\,,\,+\infty)\overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)>h(1)\Leftrightarrow h(x)>0$

στ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής και $h(x)<0$ για κάθε $x\in[0\,,\,1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$, είναι:

$$E = -\int_0^1 h(x)\,dx = -\int_0^1 x' h(x)dx = -\left[x\,h(x)\right]_0^1 + \int_0^1 x\,h'(x)\,dx =$$

$$= -h(1) + \int_0^1 x\,f(x)\,dx \overset{(8)}{=} \int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Θέτουμε:

$x^2+1 = u$, οπότε $2x\,dx = du$

Όταν $x=0$ το $u=1$ και όταν $x=1$ το $u=2$

Επομένως έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται η συνάρτηση $G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t + x}\,dt$, $x > 0$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης G

β) Αν $G(x) = \ln\frac{2x}{1+x}$, $x > 0$**, τότε:**

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση G **ως προς τη μονοτονία.**

ii) Να βρείτε το πρόσημο της G**, για τις διάφορες τιμές του** x

iii) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ **του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης** G**, τον άξονα** $x'x$ **και την ευθεία με εξίσωση** $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$

iv) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \ln 2$

v) Να αποδείξετε ότι $\int_e^x \frac{1}{G(t)}\,dt > \frac{x-e}{G(x)}$**, για κάθε** $x > e$

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος:

Θέτουμε:

$e^t + x = u$, οπότε $e^t dt = du$

Όταν $t=0$ το $u = x+1$ και όταν $t = \ln x$ το $u = 2x$

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t + x}\,dt = \int_{x+1}^{2x} \frac{1}{u}\,du = \left[\ln u\right]_{x+1}^{2x} = \ln(2x) - \ln(x+1) = \ln\frac{2x}{x+1} \quad (1)$$

2ος τρόπος:

$$G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t + x}\,dt = \int_0^{\ln x} \frac{(e^t + x)'}{e^t + x}\,dt = \int_0^{\ln x} \left[\ln(e^t + x)\right]'\,dt =$$

$$= \left[\ln(e^t + x)\right]_0^{\ln x} = \ln(e^{\ln x} + x) - \ln(e^0 + x) =$$

$$= \ln(2x) - \ln(x+1) = \ln\frac{2x}{x+1}\ , \quad x > 0$$

β) i) Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = \frac{1}{\frac{2x}{x+1}}\cdot\left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{2x}\cdot\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} > 0 \qquad (2)$$

Επομένως η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

ii) Είναι:

$$G(1) = \int_0^0 \frac{e^t}{e^t + x}dt = 0$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $G(x)=0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1 – 1» στο $(0,+\infty)$

Επομένως:

- Για $0 < x < 1 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G(x) < G(1) \Leftrightarrow G(x) < 0$
- Για $x > 1 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G(x) > G(1) \Leftrightarrow G(x) > 0$
- Για $x = 1 \Rightarrow G(x) = G(1) \Leftrightarrow G(x) = 0$

iii) Η συνάρτηση G είναι συνεχής και $G(x) < 0$ για κάθε $x \in [\lambda,\ 1] \subseteq [0\ ,1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_G, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ είναι:

$$E = -\int_\lambda^1 G(x)dx = \int_1^\lambda G(x)\,dx = \int_1^\lambda x'\,G(x)dx = \left[x\,G(x)\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda x\,G'(x)\,dx \overset{(1),(2)}{=}$$

$$= \left[x\ln\frac{2x}{x+1}\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda x\,\frac{1}{x(x+1)}\,dx = \lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1} - \int_1^\lambda \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1} - \left[\ln|x+1|\right]_1^\lambda = \lambda\ln\frac{2\lambda}{\lambda+1} - \ln(\lambda+1) + \ln 2\ , \quad 0 < \lambda < 1$$

iv) Είναι:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}\left[\lambda\ln 2\lambda - \lambda\ln(\lambda+1) - \ln(\lambda+1) + \ln 2\right] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0^+}\left[\lambda\ln 2\lambda - (\lambda+1)\ln(\lambda+1) + \ln 2\right] = \ln 2$$

διότι:

- $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}(\lambda\ln 2\lambda) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{\ln 2\lambda}{\frac{1}{\lambda}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}(-\lambda) = 0$
- $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left[(\lambda+1)\ln(\lambda+1)\right] = 0$

v) Για $e < t \le x \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} 0 < G(t) \le G(x) \Rightarrow \dfrac{1}{G(t)} \ge \dfrac{1}{G(x)} \Rightarrow \dfrac{1}{G(t)} - \dfrac{1}{G(x)} \ge 0$, οπότε

$$\int_e^x \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)}\right) dt > 0 \quad (3)$$, αφού $\dfrac{1}{G(t)} - \dfrac{1}{G(x)}$ δεν είναι παντού μηδέν.

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \int_e^x \frac{1}{G(x)} dt \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{1}{G(x)}(x-e) \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{x-e}{G(x)}, \quad x > e$$

ΘΕΜΑ 37ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$ (1)**
- **$f(0) = 1$ (2)**

Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι $E(u) = u\int_0^u f(t)dt + \frac{1}{2}f(u)$ (3), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \ge 0$

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x g(t)dt}{x^\nu}$ για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ με $\nu \ge 1$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx > \dfrac{1}{2\sqrt[4]{e}}$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$f(t) > 0$ για κάθε $t \in [0, x]$, με $x > 0$

οπότε

$g(x) = \int_0^x f(t)dt > 0$ για κάθε $x > 0$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι:

$$E(u)=\int_0^u\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\int_0^u\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx=u\int_0^u f(t)\,dt+\frac{1}{2}f(u) \qquad (5)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (5) έχουμε:

$$\int_0^u f(t)\,dt=\int_0^u f(t)\,dt+u\,f(u)+\frac{1}{2}f'(u)\Leftrightarrow$$

$$u\,f(u)+\frac{1}{2}f'(u)=0\Leftrightarrow f'(u)=-2u\,f(u)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=-2u\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left(\ln f(u)\right)'=\left(-u^2\right)'\Leftrightarrow \ln f(u)=-u^2+c \qquad (6)$$

Είναι:

$$f(0)=1,\ \text{οπότε}\ c=0$$

Άρα η σχέση (6) γράφεται:

$$\ln f(u)=-u^2\Leftrightarrow f(u)=e^{-u^2},\quad u>0 \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (2) και (7) συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x)=e^{-x^2},\quad x\geq 0$$

β) **i)** Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\nu=1$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^\nu}\overset{\nu=1}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}(*)}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)\,dt=0$$

(*) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, οπότε είναι και συνεχής, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)=0$

- Αν $\nu\geq 2$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^\nu}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{\nu x^{\nu-1}}\ \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{g'(x)}{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2}}{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x^2}}{\nu(\nu-1)}\cdot\frac{1}{x^{\nu-2}}\right)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2}}{\nu(\nu-1)}=\frac{1}{\nu(\nu-1)}\quad \text{και}\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\nu-2}}=\begin{cases}1\ , & \text{αν}\ \nu=2\\ +\infty\ , & \text{αν}\ \nu>2\end{cases}$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x^\nu}=\begin{cases}0 & ,\ \text{αν}\ \ \nu=1\\ \frac{1}{2} & ,\ \text{αν}\ \ \nu=2\\ +\infty & ,\ \text{αν}\ \ \nu>2\end{cases}$$

ii) Για $x>0$ έχουμε:

$$x\le t\le x+1\Rightarrow x^2\le t^2\le (x+1)^2\Leftrightarrow -(x+1)^2\le -t^2\le -x^2\overset{e^t\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{-(x+1)^2}\le e^{-t^2}\le e^{-x^2}$$

οπότε:

$$\int_x^{x+1} e^{-(x+1)^2}dt\le \int_x^{x+1} e^{-t^2}dt\le \int_x^{x+1} e^{-x^2}dt\Leftrightarrow$$

$$e^{-(x+1)^2}\left(x+1-x\right)\le \int_x^{x+1} e^{-t^2}dt\le e^{-x^2}\left(x+1-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^{(x+1)^2}}\le \int_x^{x+1} f(t)\,dt\le \frac{1}{e^{x^2}}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{(x+1)^2}}=0\quad \text{και}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0$

γ) Για κάθε $x>0$ έχουμε:

- $f'(x)=-2xe^{-x^2}$
- $f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$

Είναι:

- $f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)>0\Leftrightarrow x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	

Είναι:

- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } \left[0\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ f''(x)<0 \ \text{ στο } \left(0\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[0\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

- $\begin{cases} \text{f συνεχής στο } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+\infty\right) \\ f''(x)>0 \ \text{ στο } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+\infty\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+\infty\right)$

- $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ και εκατέρωθεν του $x_o=\frac{\sqrt{2}}{2}$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης f, άρα

  το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, δηλαδή το $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f

δ) Στο (γ) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=-2xe^{-x^2}<0$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0\,,+\infty)$, άρα και στο $\left(0\,,\ \frac{1}{2}\right)$,

οπότε έχουμε:

$$0<x<\frac{1}{2}\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(0)>f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)>0$$

Άρα:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)dx>0\Leftrightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx>\int_0^{\frac{1}{2}}f\left(\frac{1}{2}\right)dx\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx>e^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}-0\right)\Leftrightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx>\frac{1}{2\sqrt[4]{e}}$$

ΘΕΜΑ 38ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_x^{x^2}e^{x-t}dt$, $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-e^{-x^2+x}$, $x\in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty\,,0)\cup(1\,,+\infty)$

ii) $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0\,,1]$

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot \eta\mu(2012x)\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2012\cdot f(x)+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(2x-1)f(x)$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{1}{2}$ και $x=1$

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)=\int_x^{x^2} e^{x-t}dt=-\int_x^{x^2} e^{x-t}(x-t)'dt=-\left[e^{x-t}\right]_x^{x^2}=$$

$$=-\left(e^{x-x^2}-e^{x-x}\right)=-e^{-x^2+x}+1$$

2^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)=\int_x^{x^2} e^{x-t}dt=\int_x^{x^2} e^{x}e^{-t}dt=e^x\int_x^{x^2} e^{-t}dt=e^x\left(\int_0^{x^2} e^{-t}dt-\int_0^{x} e^{-t}dt\right)$$

Η συνάρτηση e^{-t} είναι συνεχής στο R, επομένως οι συναρτήσεις $\int_0^{x^2} e^{-t}dt$ και $\int_0^{x} e^{-t}dt$ είναι παραγωγίσιμες στο R. Επίσης η e^x είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(\int_0^{x^2} e^{-t}dt-\int_0^{x} e^{-t}dt\right)+e^x\left(\int_0^{x^2} e^{-t}dt-\int_0^{x} e^{-t}dt\right)'=$$

$$=e^x\left(\int_0^{x^2} e^{-t}dt-\int_0^{x} e^{-t}dt\right)+e^x\left(e^{-x^2}(x^2)'-e^{-x}\right)=$$

$$=f(x)+e^x\left(2xe^{-x^2}-e^{-x}\right)=f(x)+2xe^{-x^2+x}-1,\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=f(x)+2xe^{-x^2+x}-1\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2xe^{-x^2+x}-1\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=2xe^{-x^2+x}e^{-x}-e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-x}+(e^{-x})'f(x)=2xe^{-x^2}-e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(-e^{-x^2}+e^{-x}\right)'$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)e^{-x}=-e^{-x^2}+e^{-x}+c \qquad (1)$$

Για $x = 0$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε $f(0) = \int_0^0 e^{0-t}dt = 0$ και από τη σχέση (1) έχουμε $c = 0$, οπότε:

$$f(x)e^{-x} = -e^{-x^2} + e^{-x} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} f(x) = -e^{-x^2+x} + 1\ ,\quad x \in R$$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο:

$$f'(x) = -e^{-x^2+x}(-x^2+x)' = (2x-1)e^{-x^2+x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$1-\sqrt[4]{e}$ ελάχιστο	$\nearrow$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right)$. Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} + 1 = -e^{\frac{1}{4}} + 1 = 1 - \sqrt[4]{e}$

γ)
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Για $x \in (0\ ,+\infty)$ είναι:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2+x}\right) \overset{-x^2+x=t}{=} \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x^2+x}+1\right) = 0+1 = 1 \qquad (2)$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$

- Για $x \in (-\infty\ ,\ 0)$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x^2+x}\right)\overset{-x^2+x=t}{=}\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-x^2+x}+1\right)=0+1=1 \qquad (3)$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

δ) Το πρόσημο της συνάρτησης $-x^2+x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$-x^2+x$	$-$		$+$	0	$-$

i) Για κάθε $x\in(-\infty\,,0)\cup(0\,,+\infty)$ είναι:

$$-x^2+x<0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}<e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}<1 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x}>-1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x}+1>0 \Leftrightarrow f(x)>0$$

ii) Για κάθε $x\in\left[0\,,1\right]$ είναι:

$$-x^2+x\ge 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}\ge e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x}\ge 1 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x}\le -1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x}+1\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le 0$$

ε) **i)** Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\right|=\frac{\left|\eta\mu(2012x)\right|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left|\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\right|\le\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\le\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(2012x)}{x}=0$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu(2012x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\frac{\eta\mu(2012x)}{x}\right)=1\cdot 0=0$$

ii) Για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$ είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{x}\right) \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le -\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Από τη σχέση (3) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2012\cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 2012\cdot 1 + 0 = 2012$$

στ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}\,,\,1\right]$. Επίσης για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}\,,\,1\right] \subseteq [0\,,\,1]$ είναι $2x - 1 \ge 0$ και $f(x) \le 0$, οπότε $g(x) = (2x-1)f(x) \le 0$. Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$, είναι:

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -g(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -(2x-1)f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)\left(-e^{-x^2+x}+1\right)dx =$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)\cdot e^{-x^2+x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2x)dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(e^{-x^2+x}\right)'dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-x^2\right)'dx =$$

$$= -\left[e^{-x^2+x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x - x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\left(1 - e^{\frac{1}{4}}\right) + \left(0 - \frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} - \frac{5}{4} = \sqrt[4]{e} - \frac{5}{4}$$

ΘΕΜΑ 39ο :

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\left(f''(x)+1\right)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du = 0\ ,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ **(1)**
- $f''(0)+1 = f'(0) = f(0) = 0$ **(2)**

α) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du = \eta\mu x\ ,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{-x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du+\int_{0}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du \qquad (3)$$

Είναι:

$$I_1=\int_{-x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du$$

Θέτουμε:

$$u=-t\text{, οπότε } du=-dt$$

Για $u=-x$ είναι $t=x$ και για $u=0$ είναι $t=0$

Έχουμε:

$$I_1=\int_{x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu(-t)}{1+e^{-t}}(-dt)=-\int_{x}^{0}\frac{e^t\sigma\upsilon\nu t}{e^t(1+e^{-t})}dt=\int_{0}^{x}\frac{e^t\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt=\int_{0}^{x}\frac{e^u\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{0}^{x}\frac{e^u\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du+\int_{0}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{0}^{x}\left(\frac{e^u\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}+\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}\right)du=$$

$$=\int_{0}^{x}\frac{(e^u+1)\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{0}^{x}\sigma\upsilon\nu u\,du=\left[\eta\mu u\right]_0^x=\eta\mu x-\eta\mu 0=\eta\mu x \qquad (5)$$

β) Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\left(f''(x)+1\right)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=0\overset{(5)}{\Leftrightarrow}\left(f''(x)+1\right)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\eta\mu x=0\Leftrightarrow$$

$$f''(x)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f'(x)\sigma\upsilon\nu x\right)'=\left(-\eta\mu x\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)συνx = -ημx + c_1\ ,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0)συν0 = -ημ0 + c_1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0\cdot 1 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x)συνx = -ημx \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{συνx}(συνx)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(συνx\right)\right)' \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(συνx\right) + c_2\ ,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln\left(συν0\right) + c_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0 = \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln\left(συνx\right)\ ,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$$

γ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\ln\left(συνx\right)\right)' = \frac{1}{συνx}(συνx)' = -\frac{ημx}{συνx} = -εφx$$

$$f''(x) = (-εφx)' = -\frac{1}{συν^2x} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $α = β$, τότε ισχύει η ισότητα.
- Αν $α < β$, τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $\left[α\,,\,\frac{α+β}{2}\right]$ και $\left[\frac{α+β}{2}\,,\,β\right]$, οπότε θα υπάρχουν:
  - $ξ_1 \in \left(α\,,\,\frac{α+β}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(ξ_1) = \dfrac{f\left(\frac{α+β}{2}\right) - f\left(α\right)}{\frac{α+β}{2} - α} \Leftrightarrow f'(ξ_1) = \dfrac{f\left(\frac{α+β}{2}\right) - f\left(α\right)}{\frac{β-α}{2}}$
  - $ξ_2 \in \left(\frac{α+β}{2}\,,\,β\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(ξ_2) = \dfrac{f\left(β\right) - f\left(\frac{α+β}{2}\right)}{β - \frac{α+β}{2}} \Leftrightarrow f'(ξ_2) = \dfrac{f\left(β\right) - f\left(\frac{α+β}{2}\right)}{\frac{β-α}{2}}$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε ισχύει:

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\xi_1<\xi_2<\beta<\frac{\pi}{2} \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)>f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \overset{\beta-\alpha>0}{\Rightarrow}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) > f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)+f(\beta) \Rightarrow$$

$$2\ln\left(\text{συν}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\text{συν}\alpha)+\ln(\text{συν}\beta) \Rightarrow \ln\left(\text{συν}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta) \Rightarrow$$

$$\text{συν}^2\frac{\alpha+\beta}{2} > \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta$$

- Αν $\alpha>\beta \Leftrightarrow \beta<\alpha$, τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $\left[\beta\,,\,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\,\alpha\right]$, οπότε με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στην αποδεικτέα σχέση.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει η σχέση:

$$\text{συν}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta,\ \text{για κάθε } \alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

ε) Για x « κοντά στο 0 » έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\text{ημ}^2x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{\left(\text{ημ}^2x\right)'} = \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2\text{ημ}x\,\text{συν}x} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\cdot\frac{x}{2\text{ημ}x\,\text{συν}x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{2\frac{\text{ημ}x}{x}\text{συν}x}\right) = f''(0)\cdot\frac{1}{2\cdot1\cdot\text{συν}0} = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$