ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 25ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\int_1^{f(x)} (3t^2+2)\,dt = x$, για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+2f(x)=x+3$, για κάθε $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f, της συνάρτησης f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, που διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\int_1^{f(x)} (3t^2+2)\,dt = x \Rightarrow \left[t^3+2t\right]_1^{f(x)} = x \text{ άρα } f^3(x)+2f(x)-3=x \Leftrightarrow f^3(x)+2f(x)=x+3 \quad (1).$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+2\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+2} \quad (2).$$

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}>0$ για κάθε $x \in R$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \quad \text{με } x, y \in R, \text{ αφού } f(R)=R.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $y^3+2y=f^{-1}(y)+3 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+2y-3$, $y \in R$.

Άρα $f^{-1}: R \to R$ με $f^{-1}(x)=x^3+2x-3$ (3).

γ) 1ος τρόπος:

Είναι $f^{-1}(0)=-3$, άρα $f(-3)=0$, οπότε το $K(-3,0)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα x΄x.

Είναι $f^{-1}(1)=0$, άρα $f(0)=1$, οπότε το $\Lambda(0,1)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα y΄y.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες x΄x και y΄y είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{0}|f(x)|\,dx\,.$$

Θέτουμε $y=f(x)$ άρα $x=f^{-1}(y)=y^3+2y-3$ οπότε $dx=\left(y^3+2y-3\right)'dy=\left(3y^2+2\right)dy$.

Επίσης ισχύουν οι ισοδυναμίες $x=-3\Leftrightarrow y=0$ και $x=0\Leftrightarrow y=1$, οπότε έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{0}|f(x)|\,dx=\int_{0}^{1}|y|(3y^2+2)\,dy=\int_{0}^{1}y(3y^2+2)\,dy=$$

$$=\int_{0}^{1}(3y^3+2y)\,dy=\left[\frac{3y^4}{4}+y^2\right]_0^1=\frac{3}{4}+1-0=\frac{7}{4}\ \text{τ. μ.}$$

2ος τρόπος:

Τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες x΄x και y΄y είναι αντίστοιχα τα $K(-3,0)$ και $\Lambda(0,1)$.

Τα συμμετρικά των K,Λ ως προς την ευθεία δ: y=x είναι τα σημεία $K'(0,-3)$ και $\Lambda'(1,0)$.

Είναι $f^{-1}(x)=x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$, οπότε στο διάστημα $[0,1]$ είναι $f^{-1}(x)\le 0$.

Λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία δ: y=x το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=-\int_{0}^{1}f^{-1}(x)\,dx=-\int_{0}^{1}(x^3+2x-3)\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}+x^2-3x\right]_0^1=-\left(\frac{1}{4}+1-3\right)=\frac{7}{4}\ \text{τ.μ.}$$

δ) 1ος τρόπος:

Έστω $M\left(x_o,f(x_o)\right)$ το σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\varepsilon:\ y-f(x_o)=\frac{1}{3f^2(x_o)+2}(x-x_o)\,.$$

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$, θα ισχύει:

$$0-f(x_o)=\frac{1}{3f^2(x_o)+2}(-1-x_o)\Leftrightarrow 3f^3(x_o)+2f(x_o)=x_o+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f^3(x_o)+\left(f^3(x_o)+2f(x_o)\right)=x_o+1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2f^3(x_o)+x_o+3=x_o+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x_o)=-1\Leftrightarrow f(x_o)=-1\,.$$

Από την (1) έχουμε $(-1)^3+2(-1)=x_o+3\Leftrightarrow x_o=-6$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(-6,-1)$ είναι:

$$\varepsilon:\ y-(-1)=\frac{1}{3(-1)^2+2}\big(x-(-6)\big) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}.$$

2^{ος} τρόπος:

Το συμμετρικό του σημείου $A(-1,0)$ ως προς την ευθεία $\delta:\ y=x$ είναι το σημείο $B(0,-1)$. Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ που διέρχεται από το σημείο Β.

Έστω $N\big(x_o, f^{-1}(x_o)\big)$ το σημείο επαφής και ζ η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο N, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\zeta:\ y-f^{-1}(x_o)=\big(f^{-1}\big)'(x_o)\cdot(x-x_o) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \zeta:\ y-\big(x_o^3+2x_o-3\big)=\big(3x_o^2+2\big)(x-x_o).$$

Επειδή η ευθεία ζ διέρχεται από το σημείο $B(0,-1)$, θα ισχύει:

$$-1-\big(x_o^3+2x_o-3\big)=\big(3x_o^2+2\big)(0-x_o) \Leftrightarrow -x_o^3-2x_o+2=-3x_o^3-2x_o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_o^3=-2 \Leftrightarrow x_o^3=-1 \Leftrightarrow x_o=-1.$$

Για κάθε $x\in R$ είναι $\big(f^{-1}\big)'(x)=\big(x^3+2x-3\big)'=3x^2+2$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) για $x_o=-1$ έχουμε $f^{-1}(-1)=-6$ και $\big(f^{-1}\big)'(-1)=5$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N(-1,-6)$ είναι:

$$\zeta:\ y-(-6)=5\big(x-(-1)\big) \Leftrightarrow \zeta:\ y=5x-1.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συμμετρική της $\zeta:\ y=5x-1$, ως προς την ευθεία $\delta:\ y=x$, που είναι η ευθεία ε. Αντιμεταθέτοντας τις μεταβλητές x, y έχουμε $\varepsilon:\ x=5y-1 \Leftrightarrow \varepsilon:\ y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ 26ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x=(x-2)\cdot\big(\sqrt{e^{2x}-2}+i\sqrt{2}\big)$, $1\le x\le 2$ και η συνάρτηση $f(x)=|z_x|$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=(2-x)e^x$, $1\le x\le 2$.

β) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z με το μέγιστο μέτρο.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται.

ii) Η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} και η ευθεία $y=x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_o\in(1,2)$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\left|z_x\right| = |x-2|\cdot\left|\sqrt{e^{2x}-2}+i\sqrt{2}\right| = |x-2|\cdot\sqrt{e^{2x}-2+2} = (2-x)e^x$, αφού $1 \le x \le 2$.

Άρα $f(x) = (2-x)e^x$, $x \in [1,2]$.

β) Για κάθε $x \in (1,2)$ είναι:

$$f'(x) = [(2-x)e^x]' = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών και $f'(x)<0$ στο $(1,2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = 1$.

Άρα ο μιγαδικός αριθμός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z = -\sqrt{e^2-2} - i\sqrt{2}$.

γ) **i)** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η C_f με την ευθεία $\delta: y = x$, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αφού η ευθεία δ είναι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Τα κοινά σημεία των C_f και της ευθείας δ: $y=x$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = x \Leftrightarrow (2-x)e^x - x = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (2-x)e^x - x$, $x \in [1,2]$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως πράξεις συνεχών.
- $g(1)g(2) = (e-1)(-2) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Για κάθε $x \in [1,2]$ είναι:

$$g'(x) = [(2-x)e^x - x]' = -e^x + (2-x)e^x - 1 = \underbrace{(1-x)e^x}_{\le 0}\ \underbrace{-1}_{<0} < 0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

iii) Είναι $I = \int_0^e f^{-1}(x)\,dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$, άρα $dx = f'(u)du$.

Για $x = 0$ έχουμε $u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 2$.

Για $x = e$ έχουμε $u = f^{-1}(e) \Leftrightarrow f(u) = e \Leftrightarrow f(u) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$.

Άρα έχουμε:

$$I = \int_0^e f^{-1}(x)\,dx = \int_2^1 u f'(u)\,du = \left[u f(u)\right]_2^1 - \int_2^1 f(u)\,du = f(1) - 2f(2) + \int_1^2 (2-u)e^u\,du =$$

$$= e + \int_1^2 (2-u)(e^u)'\,du = e + \left[(2-u)e^u\right]_1^2 - \int_1^2 (2-u)'e^u\,du = e - e + \int_1^2 e^u\,du = \left[e^u\right]_1^2 = e^2 - e.$$

ΘΕΜΑ 27ο :

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ για τον οποίο ισχύει:

$$\left(e^{|z-1|} - e\right)x \geq e^{|z+i|x^2} - 1, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Α. **Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.**

Β. **Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - 2 + 3i|$.**

Γ. **Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0,2)$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και ικανοποιεί τις σχέσεις $f^2(x) + x^2 = 2x$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.**

α) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f είναι τμήμα του κύκλου στον οποίο ανήκουν οι εικόνες του z.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \int_1^{\ell nx} f(t)dt$.

ΛΥΣΗ

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \left(e^{|z-1|} - e\right)x - e^{|z+i|x^2} + 1$, $x \in R$.

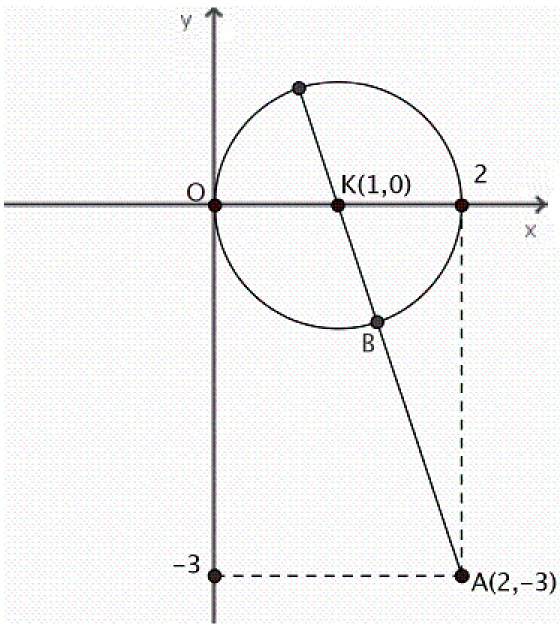
Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\left(e^{|z-1|} - e\right)x \geq e^{|z+i|x^2} + 1 \Leftrightarrow \left(e^{|z-1|} - e\right)x - e^{|z+i|x^2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_o = 0$ του πεδίου ορισμού της. Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = -2|z+i|xe^{|z+i|x^2} + e^{|z-1|} - e$, επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_o = 0$. Άρα ισχύει το Θεώρημα Fermat, οπότε

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{|z-1|} - e = 0 \Leftrightarrow e^{|z-1|} = e \Leftrightarrow |z-1| = 1.$$

Άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.



Β. Το μέτρο $|z - 2 + 3i|$ ισούται με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο $A(2,-3)$.

$$|z - 2 + 3i|_{min} = (AB) = (AK) - R = \sqrt{1+9} - 1 = \sqrt{10} - 1.$$

Γ. α) Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι:

- $2f(x)f'(x) + 2x = 2$
- $2\left(f'(x)\right)^2 + 2f(x)f''(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2 + f(x)f''(x) + 1 = 0$ (1).

Έστω ότι η C_f έχει σημείο καμπής στο x_o, τότε $f''(x_o) = 0$.

Για $x = x_o$ από την (1) προκύπτει $\left(f'(x_o)\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x_o)\right)^2 = -1$, που είναι άτοπο.

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

β) Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι:

$$f^2(x) + x^2 = 2x \overset{f(x)=y}{\Leftrightarrow} y^2 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad (2).$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(0,2)$, επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

- $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $x \in (0,2)$ ή
- $f(x) = -\sqrt{1-(x-1)^2}$, $x \in (0,2)$

Επομένως η C_f είναι τμήμα του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

γ) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $(0,2)$ και οι συναρτήσεις $h(x) = 1$ και $\varphi(x) = \ell nx$, ορίζονται αντίστοιχα στο R και στο $(0,+\infty)$. Επομένως:

$$x \in A_G \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \cap A_\varphi \\ h(x),\ \varphi(x) \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } f. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \cap (0,+\infty) \\ \varphi(x) \in (0,2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,+\infty) \\ 0 < \ell nx < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,+\infty) \\ e^0 < x < e^2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < e^2.$$ Άρα $A_G = (1, e^2)$.

ΘΕΜΑ 28ο :

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $xy \neq 0$ με $\left|z^2 + i\right| = \left|z^2 - 3i\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{2x}$, $x \neq 0$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R^*$ ισχύουν:

i) $(f \circ f)(x) = x$ και ii) $Im(iz) - (f \circ f)(x) = 0$.

γ) Έστω τυχαίο σημείο $M(x_o, f(x_o))$ της C_f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τους άξονες x΄x και y΄y είναι σταθερό.

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \displaystyle\int_2^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left|z^2+i\right| = \left|z^2-3i\right| \Leftrightarrow \left|z^2+i\right|^2 = \left|z^2-3i\right|^2 \Leftrightarrow \left(z^2+i\right)\left(\bar{z}^2-i\right) = \left(z^2-3i\right)\left(\bar{z}^2+3i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{z^2\bar{z}^2} - iz^2 + i\bar{z}^2 + 1 = \cancel{z^2\bar{z}^2} + 3iz^2 - 3i\bar{z}^2 + 9 \Leftrightarrow 4i\bar{z}^2 - 4iz^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i\left(\bar{z}^2 - z^2\right) - 2 = 0 \overset{z=x+iy}{\Leftrightarrow} i\left(-4xyi\right) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}\ ,\ x \neq 0.\ \text{Άρα } f(x) = \frac{1}{2x}\ ,\ x \neq 0.$$

β) i) Έχουμε:

$$A_{f\circ f} = \left\{x \in A_f \ /\ f(x) \in A_f\right\} = \left\{x \neq 0 \ /\ \frac{1}{2x} \neq 0\right\} = R^*.$$

Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$\left(f\circ f\right)(x) = f\left(f(x)\right) = \frac{1}{2\,f(x)} = \frac{1}{2\,\frac{1}{2x}} = x\ ,\ x \neq 0.$$

ii) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$iz = i\left(x+yi\right) = -y + ix\ ,\ \text{άρα } \operatorname{Im}(iz) = x = \left(f\circ f\right)(x).$$

Επομένως $\operatorname{Im}(iz) - \left(f\circ f\right)(x) = x - x = 0.$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(x_o\,,f(x_o)\right)$ είναι:

$$\varepsilon : y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2x_o} = -\frac{1}{2x_o^2}(x - x_o).$$

Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y αντιστοίχως στα σημεία $A\left(2x_o\,,0\right)$, $B\left(0\,,\frac{1}{x_o}\right)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ είναι:

$$E = \frac{1}{2}\cdot\left|2x_o\right|\cdot\left|\frac{1}{x_o}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|2x_o\cdot\frac{1}{x_o}\right| = 1 \text{ τ.μ.}$$

δ) Η συνάρτηση $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g = \left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$ και οι συναρτήσεις $h(x) = 2$ και $f(x) = \dfrac{1}{2x}$, ορίζονται αντίστοιχα στο R και στο R^*. Επομένως:

$$x \in A_G \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \cap A_f \\ h(x)\,,\,f(x) \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } g. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \cap R^* \\ f(x) \in \left(1\,,+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R^* \\ \dfrac{1}{2x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R^* \\ \dfrac{1-2x}{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.\ \text{Άρα } A_G = \left(0\,,\frac{1}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 29ο :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{F(x)=\int_1^{\frac{\alpha}{x}}\left(e^{t^2}-\frac{e^{\alpha}}{t}\right)dt\ ,\ \ \alpha>0}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με $\mathbf{F'(x)=\frac{e^{\alpha}}{x}-\frac{\alpha\cdot e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x^2}\ ,\ \ x>0}$.

γ) Αν $\mathbf{F(x)\geq 0}$ **για κάθε** $\mathbf{x>0}$**, να αποδείξετε ότι:**

i) $\mathbf{\alpha=1}$ **και** **ii)** $\mathbf{\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{t^2}dt\leq e\ln 2}$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $g(t)=e^{t^2}-\dfrac{e^{\alpha}}{t}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και οι συναρτήσεις $h(x)=1$ και $\varphi(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, ορίζονται αντίστοιχα στο R και στο R^*. Επομένως:

$$x\in A_F\Leftrightarrow\begin{cases}x\in A_h\cap A_{\varphi}\\ h(x),\ \varphi(x)\ \text{ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } g.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in R\cap R^*\\ \varphi(x)\in(0,+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in R^*\\ \dfrac{\alpha}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in R^*\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0\ ,+\infty).\ \text{Άρα } A_F=(0\ ,+\infty).$$

β) Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγισίμων συναρτήσεων $\varphi(x)=\dfrac{\alpha}{x}$ και $T(x)=\int_1^x g(t)\,dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης g.

Για κάθε $x\in(0\ ,+\infty)$ έχουμε:

$$F'(x)=\left(e^{\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2}-\frac{e^{\alpha}}{\frac{\alpha}{x}}\right)\left(\frac{\alpha}{x}\right)'=\left(e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}-\frac{xe^{\alpha}}{\alpha}\right)\left(-\frac{\alpha}{x^2}\right)=\frac{e^{\alpha}}{x}-\frac{\alpha\cdot e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x^2}\ ,\ x>0.$$

γ) Για κάθε $x\in(0\ ,+\infty)$ είναι $F(x)\geq 0\Leftrightarrow F(x)\geq F(\alpha)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_o=\alpha>0$ του πεδίου ορισμού της ελάχιστο και αφού η F είναι παραγωγίσιμη ισχύει Θεώρημα Fermat, οπότε:

$$F'(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}}{\alpha}-\frac{\alpha\cdot e}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow\frac{e^{\alpha}-e}{\alpha}=0\Leftrightarrow e^{\alpha}=e\Leftrightarrow\alpha=1.$$

δ) Για $\alpha=1$ έχουμε $F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}\left(e^{t^2}-\frac{e}{t}\right)dt$.

Για κάθε $x>0$ είναι $F(x)\ge 0$**,** οπότε

$$F(2)\ge 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}\left(e^{t^2}-\frac{e}{t}\right)dt\ge 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}e^{t^2}dt-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{e}{t}dt\ge 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}e^{t^2}dt\ge \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{e}{t}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}e^{t^2}dt\ge e\left[\ell nt\right]_1^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}e^{t^2}dt\ge e\left(\ell n\frac{1}{2}-\ell n1\right) \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}e^{t^2}dt\ge -e\ell n2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{t^2}dt\le e\ell n2.$$

ΘΕΜΑ 30ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-1}$, $x\ne\pm 1$

Α) Να βρείτε:

α) Το σύνολο τιμών της f.

β) Τις ασύμπτωτες της C_f.

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$.

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\kappa)=\int_2^{\kappa}\dfrac{x^3-5x}{x^2-1}dx-\int_{\kappa}^{2}f(x)dx$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $g(\kappa)=6$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(-1\,,1)$ ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx=0$.

ΛΥΣΗ

Α) α) Για κάθε $x\in A_f=R-\{-1\,,1\}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{(4x)'(x^2-1)-(4x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{4(x^2-1)-(4x)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		−	‖	−	‖	−	
f		↘	‖	↘	‖	↘	

Είναι:

- $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$.
- $f'(x)<0$ στο $(-1\,,1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1\,,1)$.
- $f'(x)<0$ στο $(1\,,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1\,,+\infty)$.

Βρίσκουμε τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του A_f.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1^-} \left(\dfrac{4x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right) = -\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \left(\dfrac{4x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{4x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{4x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \left(-\infty, +\infty\right)$.

β) • Η ευθεία με εξίσωση y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• Η ευθεία με εξίσωση y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• Η ευθεία με εξίσωση $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, αφού $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.

• Η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, αφού $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

Β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[2, e\right]$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[2, e\right]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = e$, είναι:

$$E = \int_2^e f(x)dx = \int_2^e \frac{4x}{x^2-1}dx = 2\int_2^e \frac{2x}{x^2-1}dx = 2\int_2^e \frac{1}{x^2-1}(x^2-1)'dx =$$

$$= 2\left[\ell n\left|x^2-1\right|\right]_2^e = 2\ell n\left(e^2-1\right) - 2\ell n3 = 2\ell n\frac{e^2-1}{3} \quad \text{τ.μ.}$$

Γ) α) Η συνάρτηση g γράφεται:

$$g(\kappa) = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x}{x^2-1}dx - \int_\kappa^2 \frac{4x}{x^2-1}dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x}{x^2-1}dx + \int_2^\kappa \frac{4x}{x^2-1}dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x+4x}{x^2-1}dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-x}{x^2-1}dx$$

Η συνάρτηση $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή το $2\in(1,+\infty)$ για να ορίζεται η g αρκεί το $\kappa\in(1,+\infty)$. Άρα $A_g = (1,+\infty)$.

Για κάθε $\kappa \in (1\,,+\infty)$ έχουμε:

$$g(\kappa)=\int_2^{\kappa}\frac{x^3-x}{x^2-1}dx=\int_2^{\kappa}\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}dx=\int_2^{\kappa}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^{\kappa}=\frac{\kappa^2}{2}-\frac{2^2}{2}=\frac{\kappa^2-4}{2}.$$

Η εξίσωση $g(\kappa)=6$ ισοδύναμα γράφεται $\frac{\kappa^2-4}{2}=6 \Leftrightarrow \kappa^2-4=12 \Leftrightarrow \kappa^2=16 \Leftrightarrow \kappa=\pm 4$.

Η λύση $\kappa=4$ είναι δεκτή, ενώ η λύση $\kappa=-4$ απορρίπτεται γιατί $\kappa\in(1\,,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{4x\,\sigma\upsilon\nu x}{x^2-1}$ είναι ορισμένη στο $(-1\,,1)$ και είναι περιττή.

Πράγματι, για κάθε $x\in(-1\,,1)$ έχουμε:

- $-x\in(-1\,,1)$
- $\varphi(-x)=\frac{4(-x)\sigma\upsilon\nu(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{4x\,\sigma\upsilon\nu x}{x^2-1}=-\varphi(x)$.

Είναι $\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)dx=\int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)dx+\int_0^{\alpha}\varphi(x)dx=I_1+I_2$

Θέτουμε $x=-u$, οπότε $dx=-du$. Για $x=-\alpha$ το $u=\alpha$, ενώ για $x=0$ το $u=0$.

$$I_1=\int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)dx=\int_{\alpha}^{0}\varphi(-u)(-du)=-\int_{\alpha}^{0}\varphi(-u)du=$$

$$=\int_0^{\alpha}\varphi(-u)du\overset{\varphi:\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=}\int_0^{\alpha}-\varphi(u)du=-\int_0^{\alpha}\varphi(u)du=-I_2$$

Είναι $\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)dx=I_1+I_2=-I_2+I_2=0$.

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt=x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)}+f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κοιλότητα και να βρείτε το πρόσημό της.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x΄x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=1+e$.

ε) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f΄(x)<f(x)<\frac{x-1}{2}$, για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\int_0^{f(x)} (e^t + 1)\,dt = x - 1 \Leftrightarrow \left[e^t + t\right]_o^{f(x)} = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) - \left(e^o + 0\right) = x - 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x \quad (1).$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$\left(e^{f(x)} + f(x)\right)' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} + 1\right) f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \quad (2).$$

Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0$ για κάθε $x \in R$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{με } x, y \in R, \quad \text{αφού } f\left(R\right) = R.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $e^y + y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + y$, $y \in R$.

Άρα $f^{-1}: R \to R$ με $f^{-1}(x) = e^x + x \quad (3).$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων, άρα και η $\dfrac{1}{e^{f(x)} + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x) = -\dfrac{e^{f(x)} f'(x)}{\left(e^{f(x)} + 1\right)^2} < 0$, άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R.

Για $x = 0$ από τη σχέση (3) έχουμε $f^{-1}(0) = 1$ άρα $f(1) = 0 \quad (4).$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε:

- Για $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$.

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[1, e+1\right]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[1, e+1\right]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 1 + e$ είναι:

Είναι $E(\Omega)=\int_{1}^{1+e} f(x)\,dx$. Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u) \Leftrightarrow x=e^{u}+u$, άρα $dx=\left(e^{u}+1\right)du$.

Για $x=1$ έχουμε $1=f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(0)=f^{-1}(u) \Leftrightarrow u=0$.

Για $x=1+e$ έχουμε $1+e=f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(1)=f^{-1}(u) \Leftrightarrow u=1$.

Άρα έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{1}^{1+e} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} u\left(e^{u}+1\right)du=\int_{0}^{1} ue^{u}\,du+\int_{0}^{1} u\,du=\int_{0}^{1} u\left(e^{u}\right)'du+\int_{0}^{1} u\,du=$$

$$=\left[ue^{u}\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}(u)'e^{u}du+\left[\frac{u^{2}}{2}\right]_{0}^{1}=e-\int_{0}^{1}e^{u}du+\frac{1}{2}=e-\left[e^{u}\right]_{0}^{1}+\frac{1}{2}=e-(e-1)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,x]$, άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=\frac{f(x)}{x-1}$ (5).

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R, επομένως για $1<\xi<x \Rightarrow f'(1)>f'(\xi)>f'(x) \Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(1)$ (6).

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f'(1)=\frac{1}{e^{f(1)}+1}\overset{(4)}{=}\frac{1}{e^{o}+1}=\frac{1}{2}$ (7).

Η (6) $\overset{(5),(7)}{\Rightarrow} f'(x)<\frac{f(x)}{x-1}<\frac{1}{2} \overset{x>1}{\Rightarrow} (x-1)f'(x)<f(x)<\frac{x-1}{2}$.

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f^{4}(x)+3f'(x)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτησης f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x\geq 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,f(0))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x=7$.

ε) Να αποδείξετε ότι $2f\left(\sigma\upsilon\nu^{2}\alpha\right)<f(1)+f\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right)$ με $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι:

- $f'(x) = -\frac{1}{3}f^4(x) < 0$, αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- $f''(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)f'(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)\left(-\frac{1}{3}f^4(x)\right) = \frac{4}{9}f^7(x)$.

  Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,+\infty)$. Επειδή $f(0)=1>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

β) Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ έχουμε:

$$f^4(x) + 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3f'(x) = f^4(x) \Leftrightarrow -3f^{-4}(x)f'(x) = 1, \text{ άρα}$$

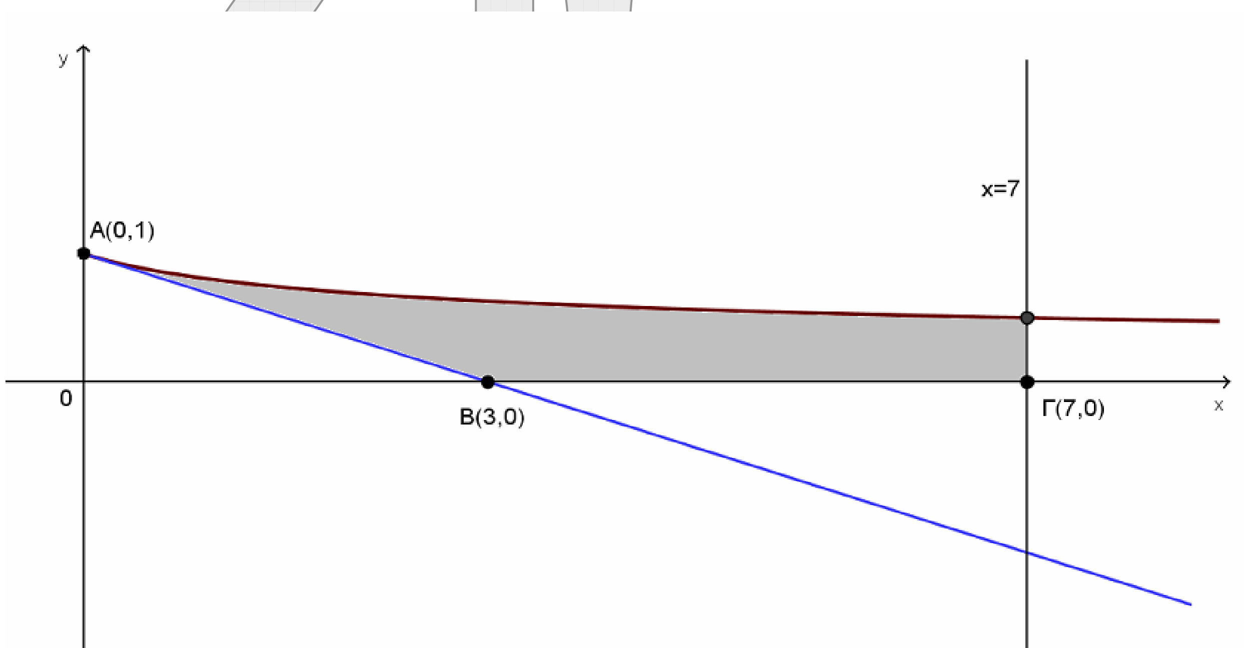
$$\int -3f^{-4}(x)f'(x)dx = \int 1dx \Leftrightarrow -3\frac{f^{-3}(x)}{-3} = x + c \Leftrightarrow \frac{1}{f^3(x)} = x + c.$$

Είναι $f(0)=1$, άρα $c=1$, οπότε $\frac{1}{f^3(x)} = x+1 \Leftrightarrow f^3(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x \in [0,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1 \quad (1).$$

δ) Για $y=0$ από την (1) έχουμε $-\frac{1}{3}x+1=0 \Leftrightarrow x=3$. Άρα η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B(3,0)$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x=7$, είναι:



$$E(\Omega)=\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx-(OAB)=\int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}}dx-\frac{1}{2}(OA)(OB)=$$

$$=\left[\frac{(x+1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_0^7-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(4-1)-\frac{3}{2}=3 \text{ τ.μ.}$$

ε) Γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1 \text{, άρα } \sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha>0 \text{ για κάθε } \alpha\in\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha\ ,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right]$ και $\left[\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ ,\ 1\right]$, οπότε θα υπάρχει:

- $\xi_1\in\left(\sigma\upsilon\nu 2\alpha,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)-f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\dfrac{f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)-f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ και
- $\xi_2\in\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ ,\ 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$.

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[0,+\infty\right)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

Άρα για $\xi_1<\xi_2$ είναι $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ οπότε έχουμε:

$$f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)-f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha)<f(1)-f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\Leftrightarrow 2f(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)<f(1)+f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha).$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=e^{-3x^2}+e^{-x^2}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}-e\cdot f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx+e\int_1^0 f(x)dx<e-1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\displaystyle\int_1^{2x}\frac{1}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγό της.

ε) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx=\frac{1-e}{4}$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x$, $x\in R$, οπότε η (1) γράφεται $g\left(f(x)\right)=g\left(e^{-x^2}\right)$ (2).
Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι «1 – 1». Επομένως από τη σχέση (2) έχουμε $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in R$.

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}-e\cdot f(x)=e^{x^2}-e\cdot e^{-x^2}=e^{x^2}-e^{1-x^2},\ x\in R.$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο R, με $\varphi'(x)=e^{x^2}2x-e^{1-x^2}(-2x)=2x\left(e^{x^2}+e^{1-x^2}\right)$.

Είναι:

- $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2}+e^{1-x^2}\right)=0\Leftrightarrow x=0$.
- $\varphi'(x)>0\Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2}+e^{1-x^2}\right)>0\Leftrightarrow x>0$.

Το πρόσημο της φ', η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	$-$	0	$+$
φ	↘	$1-e$ ελάχ.	↗

Έχουμε:

- Η φ είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $\varphi'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.
- Η φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $\varphi'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
- Η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=0$, με ελάχιστη τιμή $\varphi(0)=1-e$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^1 e^{x^2}dx+e\int_1^0 e^{-x^2}dx<e-1\Leftrightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 e^{1-x^2}dx<e-1\Leftrightarrow$

$$\int_0^1\left(e^{x^2}-e^{1-x^2}\right)dx<e-1\Leftrightarrow\int_0^1\varphi(x)\,dx<e-1.$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $\varphi(0)\le\varphi(x)\le\varphi(1)$. Είναι $\varphi(0)=e^0-e^{1-0}=1-e$ και $\varphi(1)=e-e^0=e-1$, άρα $1-e\le\varphi(x)\le e-1$.

Είναι $e-1\ge\varphi(x)\Leftrightarrow e-1-\varphi(x)\ge 0$, για κάθε $x\in[0,1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως $\int_0^1[e-1-\varphi(x)]dx>0\Leftrightarrow\int_0^1(e-1)dx-\int_0^1\varphi(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^1(e-1)dx>\int_0^1\varphi(x)dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\varphi(x)\,dx<\int_0^1(e-1)\,dx\Leftrightarrow\int_0^1\varphi(x)\,dx<e-1.$$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{f(t)} dt \Leftrightarrow h(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{e^{-t^2}} dt \Leftrightarrow h(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt.$$

Η συνάρτηση e^{t^2} είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση $2x$ ορίζεται στο R και είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R, με

$$h'(x) = \left(\int_1^{2x} e^{t^2} dt \right)' = e^{(2x)^2}(2x)' = 2e^{4x^2}.$$

ε) Είναι:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x)'h(x)dx = \left[xh(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} xh'(x)dx = \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 2e^{4x^2} dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{4x^2}\right)' dx = -\frac{1}{4}\left[e^{4x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}(e-1) = \frac{1-e}{4}.$$

ΘΕΜΑ 34ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) > 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \int \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2+1} dx = f(x) + c \,, \; c \in R \quad (2).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in R$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

δ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - \ell n\left(x^4+1\right) < 1 - \ell n2$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2+1} dx = f(x) + c$, άρα

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2+1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{2x}{x^2+1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\ell n f(x)\right)' = \left(x - \ell n\left(x^2+1\right)\right)' \Leftrightarrow \ell n f(x) = x - \ell n\left(x^2+1\right) + c_1.$$

Για $x = 0$ έχουμε $\ell n f(0) = -\ell n1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Επομένως για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\ell n f(x) = x - \ell n\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow \ell n f(x) = \ell n e^x - \ell n\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow \ell n f(x) = \ell n \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x\left(x^2+1\right) - 2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το σύνολο τιμών της είναι: $f(R) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = 0$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{\left(x^2+1\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(R) = (0, +\infty)$.

δ) Είναι:

$$x^2 - \ell n\left(x^4+1\right) < 1 - \ell n2 \Leftrightarrow x^2 < 1 - \ell n2 + \ell n\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow x^2 < \ell ne - \ell n2 + \ell n\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \ell n\frac{e\left(x^4+1\right)}{2} \Leftrightarrow e^{x^2} < \frac{e\left(x^4+1\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{(x^2)^2+1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow f\left(x^2\right) < f(1) \quad (3).$$

Για τους αριθμούς x^2 και 1 υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: ή $x^2 > 1$, ή $x^2 = 1$, ή $x^2 < 1$. Αν υποθέσουμε ότι $x^2 > 1$ και με δεδομένο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, προκύπτει $f\left(x^2\right) > f(1)$ που είναι άτοπο λόγω της (3). Αν υποθέσουμε ότι $x^2 = 1$, τότε από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει $f\left(x^2\right) = f(1)$ που επίσης είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα από τη σχέση (3) προκύπτει $x^2 < 1$. Έχουμε λοιπόν $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = f(x)+xi$, $x\in[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$.

α) Αν $Re(z_\alpha)=Im(\overline{z}_\beta)$ και $Re(\overline{z}_\beta)=Im(z_\alpha)$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$, σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o\in(\alpha,\beta)$.

β) Αν $\int_\alpha^{x_o} f(x)dx=-1$ και $\int_\beta^{x_o} f(x)dx=-3$, τότε:

i) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f, της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\dfrac{3}{f(\xi_2)}-\dfrac{1}{f(\xi_1)}=\beta-\alpha$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $z_\alpha = f(\alpha)+\alpha i$ και $\overline{z}_\beta = f(\beta)-\beta i$.

Είναι:

- $Re(z_\alpha)=Im(\overline{z}_\beta)$, οπότε $f(\alpha)=-\beta<0$,
- $Re(\overline{z}_\beta)=Im(z_\alpha)$, οπότε $f(\beta)=\alpha>0$, αφού $0<\alpha<\beta$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)=-\alpha\beta<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα $x_o\in(\alpha,\beta)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.

β) i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, οπότε:

- Για $\alpha\le x\le x_o \Rightarrow f(x)\le f(x_o)$, άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,x_o]$.
- Για $x_o\le x\le\beta \Rightarrow f(x_o)\le f(x)$, άρα $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[x_o,\beta]$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f, της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$, είναι:

$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx = \int_\alpha^{x_o}(-f(x))dx+\int_{x_o}^\beta f(x)dx = -(-1)+3=4 \text{ τ.μ.}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in[\alpha,\beta]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, ως αρχική συνάρτηση της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ με $g'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x)$. Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_o]$ και $[x_o,\beta]$, οπότε θα υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x_o)$ και $\xi_2\in(x_o,\beta)$ τέτοια, ώστε:

- $g'(\xi_1)=\dfrac{g(x_o)-g(\alpha)}{x_o-\alpha}=\dfrac{\int_{\alpha}^{x_o} f(t)dt-\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt}{x_o-\alpha}=\dfrac{-1-0}{x_o-\alpha}=\dfrac{-1}{x_o-\alpha}$ και
- $g'(\xi_2)=\dfrac{g(\beta)-g(x_o)}{\beta-x_o}=\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt-\int_{\alpha}^{x_o} f(t)dt}{\beta-x_o}=\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+\int_{x_o}^{\alpha} f(t)dt}{\beta-x_o}=\dfrac{\int_{x_o}^{\beta} f(t)dt}{\beta-x_o}=\dfrac{3}{\beta-x_o}$.

Άρα έχουμε: $g'(\xi_1)=\dfrac{-1}{x_0-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\dfrac{-1}{x_0-\alpha}\Leftrightarrow x_0-\alpha=\dfrac{-1}{f(\xi_1)}$ (1)

και $g'(\xi_2)=\dfrac{3}{\beta-x_0}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\dfrac{3}{\beta-x_0}\Leftrightarrow \beta-x_0=\dfrac{3}{f(\xi_2)}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε $\dfrac{3}{f(\xi_2)}-\dfrac{1}{f(\xi_1)}=\beta-\alpha$.

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)=2f(x)f'(x)$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f^2(x)+1$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ είναι «1 – 1» στο R.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=g(f(x))-g(\varepsilon\varphi x)$ είναι σταθερή στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi x$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

ε) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g, της συνάρτησης g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $g(1)=E+\frac{\ell n2}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\left(f'(x)\right)' = \left(f^2(x)\right)' \Leftrightarrow f'(x) = f^2(x) + c.$$

Όμως $f'(0) = f^2(0) + c \Leftrightarrow 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f'(x) = f^2(x) + 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{1}{1+t^2}$, με $g'(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)' = \frac{1}{1+x^2}$. Είναι $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα η g είναι και «1 – 1».

γ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h'(x) = g'\left(f(x)\right)f'(x) - g'(\varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}\left(1+f^2(x)\right) - \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right) = 1 - 1 = 0.$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι σταθερή. Έστω $h(x) = c_1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για $x = 0$ έχουμε $h(0) = c_1 \Leftrightarrow g\left(f(0)\right) - g\left(\varepsilon\varphi 0\right) = c_1 \Leftrightarrow g(0) - g(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Άρα $h(x) = 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow g\left(f(x)\right) - g(\varepsilon\varphi x) = 0 \Leftrightarrow g\left(f(x)\right) = g(\varepsilon\varphi x) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \varepsilon\varphi x.$$

ε) Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $g(0) \le g(x) \le g(1)$, οπότε $g(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g, της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$, είναι:

$$E = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (x)' g(x)dx = \left[x\,g(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x)dx = g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= g(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = g(1) - \frac{1}{2}\left[\ell n\left|1+x^2\right|\right]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2}\left(\ell n2 - \ell n1\right) = g(1) - \frac{\ell n2}{2}.$$

Είναι $E = g(1) - \frac{\ell n2}{2}$, οπότε $g(1) = E + \frac{\ell n2}{2}$.