ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 13ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0\,,e)\to \mathbb{R}$ με $f(1)=0$ η οποία για κάθε $x\in(0\,,e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ell n\big(f'(x)\big)=f(x)-\ell nx$.

Α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Β. Αν $f(x)=-\ell n\big(1-\ell nx\big)$, $x\in(0\,,e)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,e)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1-\ell nx=\dfrac{1}{e^{\alpha}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Α. Για κάθε $x\in(0\,,e)$ είναι:

$$\ell n\big(f'(x)\big)=f(x)-\ell nx \Leftrightarrow f'(x)=e^{f(x)-\ell nx} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{-f(x)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(-e^{-f(x)}\right)'=\left(\ell nx\right)'\Leftrightarrow -e^{-f(x)}=\ell nx+c.$$

Είναι $f(1)=0$, οπότε $-e^{o}=\ell n1+c\Leftrightarrow c=-1$.

Επομένως έχουμε:

$$-e^{-f(x)}=\ell nx-1\Leftrightarrow e^{-f(x)}=1-\ell nx\Leftrightarrow -f(x)=\ell n\big(1-\ell nx\big)\Leftrightarrow f(x)=-\ell n\big(1-\ell nx\big),\;\; x\in(0,e).$$

Β. α) Για κάθε $x\in(0\,,e)$ είναι:

$$f'(x)=\big(-\ell n(1-\ell nx)\big)'=-\frac{1}{1-\ell nx}\big(1-\ell nx\big)'=\frac{1}{x\big(1-\ell nx\big)}.$$

Είναι $0<x<e\Rightarrow \ell nx<\ell ne\Rightarrow \ell nx<1\Rightarrow 1-\ell nx>0$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0\,,e)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,e)$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \, , \, \lim\limits_{x\to e^-} f(x) \right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\ell n\left(1-\ell nx\right) \right) \overset{1-\ell nx = t}{=} \lim\limits_{t\to +\infty} \left(-\ell nt \right) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-} \left(-\ell n\left(1-\ell nx\right) \right) \overset{1-\ell nx = t}{=} \lim\limits_{t\to 0^+} \left(-\ell nt \right) = +\infty.$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = R$.

γ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x\left(1-\ell nx\right)} \right)' = \frac{-\left[x\left(1-\ell nx\right) \right]'}{\left[x\left(1-\ell nx\right) \right]^2} = \frac{-\left(1-\ell nx\right)+1}{x^2\left(1-\ell nx\right)^2} = \frac{\ell nx}{x^2\left(1-\ell nx\right)^2}$$

Το πρόσημο της f'', η μονοτονία και τα ακρότατα της f', φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0		1		e
f''	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
f'	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\Vert$
			ελάχ.		

Έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, 1)$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[1, e)$ και $f''(x) > 0$ στο $(1, e)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e)$.
- Η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 1$, με ελάχιστη τιμή $f'(1) = 1$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, όταν $x = 1$.

δ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$1-\ell nx = \frac{1}{e^{\alpha}} \Leftrightarrow \ell n\left(1-\ell nx\right) = -\alpha \Leftrightarrow -\ell n\left(1-\ell nx\right) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $f\left((0, e)\right) = R$.

Άρα για κάθε $\alpha \in R$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 14ο :

Θεωρούμε συνάρτηση $g : R \to R$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και το μιγαδικό αριθμό $z = e^x + g(x)i$.

Α. Αν ισχύει $|z|^2 = (Re(z))^2(1+x^2)$, $g(1) = e$ και $g(-1) = -\frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι $g(x) = xe^x$.

Β. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f : R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $g(x) = f'(x) - f(x)$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$, $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : ex - 2y + 3 = 0$.

ΛΥΣΗ

Α. Έχουμε:

$$|z|^2 = (Re(z))^2(1+x^2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{e^{2x} + g^2(x)}\right)^2 = e^{2x}(1+x^2) \Leftrightarrow g^2(x) = e^{2x}x^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |xe^x| \quad (1).$$

Είναι:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |xe^x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει στο R μοναδική ρίζα την $x = 0$.

- Η συνάρτηση g στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(-1) = -\frac{1}{e} < 0$, οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

  Επομένως στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

  $$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x < 0.$$

  Επειδή $g(0) = 0$ έχουμε τελικά:

  $$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

- Η συνάρτηση g στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(1) = e > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x > 0.$$

Επειδή $g(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε $g(x) = xe^x$ για κάθε $x \in R$.

Β. α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow xe^x = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{e^x} = \frac{x^2}{2} + c, \ x \in R.$$

Είναι $f(0) = 1$ άρα $c = 1$, επομένως $f(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$, $x \in R$.

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left[e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\right]' = e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) + e^x x = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 2\right)e^x > 0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «1 – 1» , οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{3}{2}e \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}e\right) = 1$$

Άρα η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to-\infty} e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{2} + 1}{e^{-x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-e^{-x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$
- $$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (0, +\infty)$.

δ) Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 = e^{-x} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x\left(x^2 + 2\right) = 1 \Leftrightarrow e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Επειδή το $\frac{1}{2} \in \left(0\ ,\ +\infty\right) = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$, άρα και η ισοδύναμή της εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει μία πραγματική ρίζα, η οποία είναι και μοναδική, γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0\ ,1\right]$ με $f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 2\right)e^x$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. επομένως θα υπάρχει $x_o \in (0\ ,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0} = \dfrac{\frac{3e}{2} - e}{1-0} = \dfrac{e}{2}$.

Είναι $\varepsilon : y = \frac{e}{2}x + \frac{3}{2}$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{e}{2}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x_o) = \lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη $x_o \in (0\ ,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : ex - 2y + 3 = 0$.

ΘΕΜΑ 15ο :

Α) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι ″1-1″ και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Β) Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν $f'(2) > 0$, $f^{(3)}(2) > 0$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) + f(4 - x) = 3$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο R.

δ) Αν η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Μ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o.

ε) Για $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη.

ΛΥΣΗ

Α) Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε αφού η f είναι ″1-1″ οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο.

Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη, οπότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)$ και $f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$. Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_3)$.

Επομένως θα ισχύει μία από τις παρακάτω ανισότητες:

$f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$ (1) $\qquad f(x_2)<f(x_3)<f(x_1)$ (2)

$f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$ (3) $\qquad f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$ (4)

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1), τότε εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και του $f(x_2)$, θα υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=f(x_3)$. Επομένως για $x_1<\xi<x_2<x_3$, δηλαδή για $\xi<x_3$ έχουμε $f(\xi)=f(x_3)$ που είναι άτοπο, αφού η f είναι ″1-1″. Ομοίως θα καταλήξουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύει μία από τις ανισότητες (2), (3) και (4).

Β) α) Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f'' είναι ″1-1″.

Αν υποθέσουμε ότι η f'' δεν είναι ″1-1″, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2\in R$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f''(x_1)=f''(x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$, οπότε έχουμε:

- Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1,x_2]$, αφού η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R.
- $f''(x_1)=f''(x_2)$.

Άρα η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η συνάρτηση f'' είναι ″1-1″ στο R.

Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R, οπότε η f'' είναι συνεχής στο R. Επίσης η f'' είναι ″1-1″, οπότε σύμφωνα με το (Α) ερώτημα η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)+f(4-x)=3$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$f'(x)-f'(4-x)=0 \quad \text{και} \quad f''(x)+f''(4-x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in R$$

Για $x=2$ είναι $f''(2)+f''(4-2)=0\Leftrightarrow 2f''(2)=0\Leftrightarrow f''(2)=0$ (1).

Η f'' είναι γνησίως μονότονη στο R και επειδή από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει ή $f^{(3)}(x)>0$ ή $f^{(3)}(x)<0$. Όμως $f^{(3)}(2)>0$, άρα $f^{(3)}(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Για $x<2$ είναι $f''(x)<f''(2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x)<0$, ενώ για $x>2$ είναι $f''(x)>f''(2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x)>0$.

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	3/2	$\cup$	

Σ. Κ.

Για $x=2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$f(2)+f(4-2)=3 \Leftrightarrow 2f(2)=3 \Leftrightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}$ (2).

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και $f''(x)<0$ στο $(-\infty, 2)$, άρα η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x)>0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_o=2$ και το σημείο καμπής είναι το $A\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

γ) Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $2f(x)=3$ έχει ρίζα τον αριθμό $x=2$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$f'(2)$	$\nearrow$	

ελάχ.

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o=2$, άρα $f'(x)\geq f'(2)$ για κάθε $x\in R$. Όμως από υπόθεση είναι $f'(2)>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε η ρίζα $x=2$ είναι μοναδική.

δ) Αν x_o η τετμημένη του σημείου Μ, στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$g(x_o)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}=0 \Leftrightarrow f(x_o)=0 \qquad (3).$$

Για κάθε $x\in R$ είναι $g'(x)=\dfrac{\left[f'(x)\right]^2-f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$.

Άρα $g'(x_o)=\dfrac{\left[f'(x_o)\right]^2-f(x_o)f''(x_o)}{\left[f'(x_o)\right]^2}\overset{(3)}{=}\dfrac{\left[f'(x_o)\right]^2}{\left[f'(x_o)\right]^2}=1$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_g, της συνάρτησης g στο σημείο Μ, στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $\lambda_\varepsilon=g'(x_o)=1$, οπότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ είναι 45^o.

ε) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1)$ (4).

Για $x\geq 2$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1\,,\,x+2]$, άρα θα υπάρχει:

- $\xi_1 \in (x\,,\,x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f'(\xi_1)$.
- $\xi_2 \in (x+1\,,\,x+2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x+2)-f(x+1)}{(x+2)-(x+1)} \Leftrightarrow f(x+2)-f(x+1)=f'(\xi_2)$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ (5). Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$, άρα θα είναι και "1-1", οπότε από (5) έχουμε $\xi_1=\xi_2$ που είναι αδύνατο, γιατί τα ξ_1 , ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $2f(x+1)=f(x)+f(x+2)$ είναι αδύνατη, για $x\geq 2$.

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x)=\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2} \quad \text{για κάθε } x\in \mathbb{R}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+2010)-f(x)\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2}\right)'=\frac{(2e^x+x^2)'(e^x+x^2)-(2e^x+x^2)(e^x+x^2)'}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(2e^x+2x)(e^x+x^2)-(2e^x+x^2)(e^x+2x)}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{2e^{2x}+2x^2e^x+2xe^x+2x^3-2e^{2x}-4xe^x-x^2e^x-2x^3}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{x^2e^x-2xe^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{(x^2-2x)e^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{x(x-2)e^x}{(e^x+x^2)^2}.$$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f''(x)>0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f κυρτή στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0\ ,\ 2]$ και $f''(x)<0$ στο $(0\ ,\ 2)$, άρα η f κοίλη στο $[0\ ,\ 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και $f''(x)>0$ στο $(2\ ,+\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2\ ,+\infty)$.

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} - 1 = \frac{2e^x + x^2 - e^x - x^2}{e^x + x^2} = \frac{e^x}{e^x + x^2} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Επίσης η f είναι συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Για κάθε $x \in (-\infty\ ,\ 0)$ έχουμε:

$$g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0) \qquad (2).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+f(0)) = -\infty$, άρα $x+f(0)<0$, επομένως και $f(x)<0$ σε περιοχή του $-\infty$, οπότε από (2) έχουμε $f(x) < x + f(0) < 0 \Leftrightarrow 0 > \dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{x+f(0)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+f(0)} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x)<0$ σε περιοχή του $-\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Για κάθε $x \in (0\ ,+\infty)$ έχουμε:

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0) \qquad (1).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+f(0)) = +\infty$, άρα $x+f(0)>0$, επομένως και $f(x)>0$ σε περιοχή του $+\infty$, οπότε από (1) έχουμε $f(x) > x + f(0) > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{x+f(0)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+f(0)} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x)>0$ σε περιοχή του $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R) = (-\infty\ ,+\infty)$.

δ) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x\ ,\ x+2010]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x\ ,\ x+2010)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+2010)-f(x)}{x+2010-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x+2010)-f(x)}{2010} \Leftrightarrow f(x+2010)-f(x)=2010f'(\xi).$$

Για $x>2$ η συνάρτηση f είναι κυρτή, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως για $2<x<\xi<x+2010 \Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(x+2010) \overset{\cdot 2010}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow 2010f'(x)<2010f'(\xi)<2010f'(x+2010) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2010f'(x)<f(x+2010)-f(x)<2010f'(x+2010).$$

Για $x>2$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+2x}{e^x+2x} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+2}{e^x+2} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{e^x}=2.$

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2010f'(x)\right)=2010\cdot 2=4020.$
- Αν θέσουμε $x+2010=u$, τότε όταν το $x\to+\infty$ και το $u\to+\infty$, άρα έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2010f'(x+2010)\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(2010f'(u)\right)=2010\cdot 2=4020.$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+2010)-f(x)\right)=4020.$

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f(1)=0$. Αν η συνάρτηση $f\circ f'$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $(f\circ f')(x)=-f(x)$ (1), να αποδείξετε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f' είναι το $A_{f'}=(0,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) $f'(1)=1$.

δ) $(f'\circ f')(x)=x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ε) $xf''(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

στ) $f(x)=\ell n x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Κατ' αρχάς είναι $A_{f'}\subseteq A_f=(0,+\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ή $A_{f'}=(0,+\infty)$
- ή θα υπάρχει $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_o\notin A_{f'}$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_o \notin A_{f'}$ τότε και με δεδομένο ότι $A_{f o f'} = \{ x \in A_{f'} \,/\, f'(x) \in A_f \}$ συμπεραίνουμε ότι το $x_o \notin A_{f o f'}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $x_o \in (0,+\infty)$ και $A_{f o f'} = (0,+\infty)$ από υπόθεση. Άρα $A_{f'} = (0,+\infty)$.

β) Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f'$:

$$A_{f o f'} = \{ x \in A_{f'} \,/\, f'(x) \in A_f \} = \{ x \in A_{f'} \,/\, f'(x) \in (0,+\infty) \}$$

προκύπτει ότι $f'(x) \in (0,+\infty)$ για κάθε $x \in A_{f'}$ δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left(f o f'\right)(1) = -f(1) \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} \left(f o f'\right)(1) = 0 \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f\left(f'(1)\right) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 1.$$

δ) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (1) όπου x το $f'(x)$, οπότε για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$\left(f o f'\right)(f'(x)) = -f(f'(x)) \Leftrightarrow f\left(f'(f'(x))\right) = -\left(f o f'\right)(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(f'(f'(x))\right) = -\left(-f(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(f'(f'(x))\right) = f(x) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(f'(x)) = x \Leftrightarrow \left(f' o f'\right)(x) = x \qquad (2).$$

ε) Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\left(f(f'(x))\right)' = \left(-f(x)\right)' \Leftrightarrow f'(f'(x)) \cdot f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \left(f' o f'\right)(x) \cdot f''(x) = -f'(x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow x f''(x) + f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

στ) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε:

$$x f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x f'(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow x f'(x) = c_1,\ c_1 \in R.$$

Για $x=1$ είναι $f'(1) = c_1 \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow} c_1 = 1$, άρα $x f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ell n x + c_2,\ x \in (0,+\infty)$.

Όμως $f(1) = 0$, άρα $c_2 = 0$, οπότε $f(x) = \ell n x$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 18ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Β. Αν $f(0) = 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $x \in R$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu f(x))$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

ΛΥΣΗ

Α. Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow \left(f(x) + x\right)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) = 1 + x^2 \quad (1), \text{ όπου } g(x) = f(x) + x,\ x \in R.$$

Για κάθε $x \in R$ είναι $1 + x^2 > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο R, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Β. α) Για $x = 0$ έχουμε $g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Αφού $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, από (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1+x^2} - x,\ x \in R.$$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq x - x = 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ (2).

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$|\eta\mu f(x)| \leq |f(x)| \overset{(2)}{=} f(x), \quad \text{άρα} \quad -f(x) \leq \eta\mu f(x) \leq f(x).$$

Είναι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$,

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+1}\right) = 0\cdot\dfrac{1}{2} = 0$.

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x)) = 0$.

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu f(x)) = 0$.

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(2)}{<} 0.$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται. Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1}, λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x. Έχουμε:

$$y = \sqrt{1+x^2} - x \Leftrightarrow y + x = \sqrt{1+x^2} \overset{y+x\geq 0}{\Leftrightarrow} (y+x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2xy + \cancel{x^2} = 1 + \cancel{x^2} \Leftrightarrow 2xy = 1 - y^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{1-y^2}{2y} \quad (3).$$

Είναι $y + x \geq 0 \Leftrightarrow y + \frac{1-y^2}{2y} \geq 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2y^2 + 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 0$, που είναι αληθές.

Η $(3) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2y}$, $y > 0$.

Επομένως $f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}$ με $x > 0$. .

ε. Από το (δ) ερώτημα έχουμε $f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$, άρα

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_1^0 -\frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\int_1^0 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln(f(x))\right]_0^1 = \ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

ΘΕΜΑ 19ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to R$ με $0<\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1 = \alpha + i f(\alpha)$ και $z_2 = \beta + i f(\beta)$ να ισχύει $w = \frac{z_1}{z_2} \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim_{x\to\alpha} \int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $z_1 = wz_2$, με $w \in R$. Άρα

$$|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2| \Leftrightarrow |wz_2 + iz_2| = |wz_2 - iz_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_2| \cdot |w + i| = |z_2| \cdot |w - i| \overset{z_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} |w + i| = |w - i| \overset{w \in R}{\Leftrightarrow} \sqrt{w^2 + 1} = \sqrt{w^2 + 1}, \text{ αληθής.}$$

β) Έχουμε $w = \dfrac{\alpha + if(\alpha)}{\beta + if(\beta)} = \dfrac{(\alpha + if(\alpha))(\beta - if(\beta))}{(\beta + if(\beta))(\beta - if(\beta))} = \dfrac{\alpha\beta + f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} + \dfrac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} i$

Είναι $w \in R \Leftrightarrow \dfrac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} = 0 \Leftrightarrow \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta}$ (1).

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $0 < \alpha < \beta$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x) = \dfrac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$.
- Είναι $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta} = g(\beta)$.

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

γ) Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_o) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_o f'(x_o) - f(x_o)}{x_o^2} = 0 \Leftrightarrow x_o f'(x_o) - f(x_o) = 0 \quad (2).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(x_o, f(x_o))$ είναι:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y = f'(x_o)x + f(x_o) - x_o f'(x_o) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} y = f'(x_o)x$$

Άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Είναι $\displaystyle\int_\alpha^x \frac{f(x + \alpha - t)}{(x - \alpha)(x + \alpha - t)} dt = \frac{1}{x - \alpha} \int_\alpha^x \frac{f(x + \alpha - t)}{x + \alpha - t} dt$. Θέτουμε $x + \alpha - t = u$, οπότε $-dt = du$.

Για $t = \alpha$ το $u = x$ και για $t = x$ το $u = \alpha$, οπότε

$$\int_\alpha^x \frac{f(x + \alpha - t)}{(x - \alpha)(x + \alpha - t)} dt = \frac{1}{x - \alpha} \int_\alpha^x \frac{f(x + \alpha - t)}{x + \alpha - t} dt = \frac{1}{x - \alpha} \int_x^\alpha -\frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{x - \alpha} \int_\alpha^x \frac{f(u)}{u} du.$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{x-\alpha}\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(u)}{u}du=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\int_{\alpha}^{x}\frac{f(u)}{u}du}{x-\alpha}=1 \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{\Leftrightarrow}}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{f(x)}{x}}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=1 \qquad (3).$$

Από (1) και (3) έχουμε $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=\alpha \\ f(\beta)=\beta \end{cases}$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$, με $0<\alpha<\beta$.

- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(x)=f'(x)-1$.
- Είναι $\begin{cases} h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=0 \\ h(\beta)=f(\beta)-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow h(\alpha)=h(\beta)$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-1=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=1.$$

ΘΕΜΑ 20ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x)=\int_1^x\frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

γ) Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g, για την οποία ισχύει $g^2(x)=f\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $g(1)=1$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\dfrac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, το $1\in(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση

$f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)} \Leftrightarrow xe^{f(x)}f'(x)+xf'(x)=x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=1+\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=\left(x+\ln x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c.$$

Για $x=1$ έχουμε $e^{f(1)}+f(1)=1+\ln 1+c \Leftrightarrow e^0+0=1+0+c \Leftrightarrow c=0.$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}+\ln x \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=e^x+x,\quad x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x)=e^x+1>0$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «$1-1$».

Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x))=\varphi(\ln x)\overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

γ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x} \quad \text{και} \quad f''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0,$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και
- $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

Είναι $0<\alpha<\xi_1<\beta<\xi_2<\gamma$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε $f'(\xi_1)>f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

δ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g^2(x)=f\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x)=\ln\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x)=\ln e^x-\ln x \Leftrightarrow g^2(x)=x-\ln x \quad (2).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o>0$ τέτοιο, ώστε $g(x_o)=0$, τότε $x_o-\ln x_o=0 \Leftrightarrow \ln x_o=x_o$ που είναι άτοπο, γιατί $\ln x\le x-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. (Εφαρμογή 2 σχολ. Βιβλίου σελ. 266).

Άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση g λοιπόν είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επομένως από (2) προκύπτει ότι $g(x)=\sqrt{x-\ln x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\sqrt{x-\ln x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-\ln x}}\left(x-\ln x\right)'=\frac{x-1}{2x\sqrt{x-\ln x}}.$$

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow x>1$, άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης g είναι:

x	0	1	+∞
g'	−	0	+
g	↘	1	↗
		ελάχ.	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=1$.

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x-\ln x}=+\infty,\text{ γιατί }\lim_{x\to0^+}(x-\ln x)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{\ln x}{x}}\right)=+\infty,\quad\text{γιατί}\quad\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\quad\text{οπότε}\quad\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{\ln x}{x}}=1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A)=[1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)\ge xe^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(x)}{x\eta\mu x}=1$.

γ) Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,1]$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^{2x}$, $x \in R$.

Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x) - xe^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_o = 0$ του πεδίου ορισμού της τοπικό ακρότατο.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x) = \left(f(x) - xe^{2x}\right)' = f'(x) - e^{2x} - 2xe^{2x}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$ με $g'(0) = f'(0) - 1$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Είναι $f'(0) = 1$, οπότε για $x \neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

Έχουμε $$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x\,\eta\mu x} = \lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x^2\,\dfrac{\eta\mu x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}\right] = 1^2\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} \geq xe^{x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^{x} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$, όπου $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^{x}$, $x \in R$.

Είναι $$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 x'e^x\,dx = e - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1,$$

οπότε $$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1\left(f(x)e^{-x} - xe^{x}\right)dx = \int_0^1 f(x)e^{-x}dx - \int_0^1 xe^x\,dx = 1 - 1 = 0.$$

Έχουμε λοιπόν $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^{x} \geq 0$ για κάθε $x \in R$ και $\int_0^1 h(x)dx = 0$ (1).

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) \neq 0$, τότε $h(x_o) > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ αλλά η συνεχής συνάρτηση h δεν είναι παντού μηδέν, οπότε $\int_0^1 h(x)dx > 0$, που είναι άτοπο λόγω της (1).

Επομένως για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x}$.

ΘΕΜΑ 22ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=\frac{1}{e-1}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $xf'(x)-f(x)=\frac{-x^2e^x}{(e^x-1)^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $u=e^x-1$, οπότε $du=e^x dx$. Άρα:

$$\int\frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx=\int\frac{1}{u^2}du=\int u^{-2}du=\frac{u^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{u}+c=-\frac{1}{e^x-1}+c,\text{ όπου } x\in(-\infty,0) \text{ ή } x\in(0,+\infty).$$

β) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x)-f(x)=\frac{-x^2e^x}{(e^x-1)^2}\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=-\int\frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=-\left(-\frac{1}{e^x-1}+c_1\right)\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{e^x-1}-c_1x.$$

Για $x=1$ έχουμε $f(1)=\frac{1}{e-1}-c_1\Leftrightarrow\frac{1}{e-1}=\frac{1}{e-1}-c_1\Leftrightarrow c_1=0$. Άρα $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, οπότε $f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^x}=1$, άρα $f(0)=1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, οπότε ισχύει:

$$f'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{-e^x}{2e^x+xe^x}=-\frac{1}{2},$$

άρα $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

δ) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ομοίως έχουμε:

$$xf'(x)-f(x)=\frac{-x^2e^x}{(e^x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=-\int\frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=-\left(-\frac{1}{e^x-1}+c_2\right) \Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{e^x-1}-c_2x.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ ισχύει:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{e^x-1}-c_2x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-c_2x(e^x-1)-e^x+1}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-c_2(e^x-1)-c_2xe^x-e^x}{e^x-1+xe^x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H.}{=}}\lim_{x\to 0^-}\frac{-2c_2e^x-c_2xe^x-e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{-2c_2-1}{2}$$

Είναι $f'(0)=-\frac{1}{2}$, άρα έχουμε $\frac{-2c_2-1}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow c_2=0$. Άρα $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$.

ΘΕΜΑ 23ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\int_0^x\frac{2}{1+3f^2(t)}dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\frac{2}{1+3f^2(t)}dt$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o)=2x_o$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt\le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

στ) Αν $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ **και** **ii)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)}{x}$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\dfrac{2}{1+3f^2(t)}$ είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{2}{1+3f^2(t)}dt$ ορίζεται στο R και είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{2}{1+3f^2(x)}$ (1).

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=\frac{2}{1+3f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x)+3f^2(x)f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[f(x)+f^3(x)\right]'=(2x)' \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=2x+c.$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=\displaystyle\int_0^0 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=0$. Άρα $f^3(0)+f(0)=0+c \Leftrightarrow c=0$.

Επομένως $f^3(x)+f(x)=2x$, $x\in R$ (2).

β) Από τη σχέση (1) έχουμε $f'(x)=\dfrac{2}{3f^2(x)+1}>0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

γ) Είναι $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=f(1)$.

Από τη σχέση (2) για $x=1$ έχουμε $f^3(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow f^3(1)+f(1)-2=0$ (3).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**1**	**–2**	**1**
///	1	1	2	
1	**1**	**2**	**0**	

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(1)-1\right)\underbrace{\left(f^2(1)+f(1)+2\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(1)=1.$$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=1$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in R$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x$.
- Είναι $g(0)=g(1)$, αφού $g(0)=0$ και $g(1)=0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_o)=0 \Leftrightarrow f'(x_o)-2x_o=0 \Leftrightarrow f'(x_o)=2x_o$.

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt - x^2\ ,\ x\in R$.

Για κάθε $x\in R$ είναι $\varphi'(x)=\left(\int_0^x f(t)dt - x^2\right)' = f(x)-2x \overset{(2)}{=} -f^3(x)$.

Από τη σχέση (2) έχουμε $f(x)\left(f^2(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x}{f^2(x)+1}$, άρα $\varphi'(x)=-\dfrac{8x^3}{\left(f^2(x)+1\right)^3}$, $x\in R$.

Είναι:

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow -8x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ και $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow -8x^3>0 \Leftrightarrow x^3<0 \Leftrightarrow x<0$.

Το πρόσημο της φ', η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	$+$	0	$-$
φ	$\nearrow$	**0**	$\searrow$
		μέγ.	

Η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o=0$, οπότε για κάθε $x\in R$ ισχύει $\varphi(x)\le\varphi(0)$. Άρα είναι

$$\int_0^x f(t)dt - x^2 \le 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt \le x^2\ ,\ x\in R.$$

στ) i) Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{2}{1+f^2(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+f^2(x)\right)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+f^2(x)}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

ii) Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow f^3(x)=2x-f(x) \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x}=2-\frac{f(x)}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{f(x)}{x}\right)=2-0=2$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{x}=2$.

ΘΕΜΑ 24ο :

Δίνεται η συνάρτηση f, που είναι ορισμένη και συνεχής στο R και ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\int_x^0\left(\int_0^\pi f(t)\,\eta\mu x\,dx\right)dt + x^2$, για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Αν $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}+x-\dfrac{1}{2}$, $x\in R$, τότε:

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii) Για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in R$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f(x) = -\int_0^x f(t)\left(\int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx\right)dt + x^2 \quad (1).$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2$.

Άρα η (1) γράφεται: $f(x) = -2\int_0^x f(t)\,dt + x^2, \ \ x \in R$.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,dt$, είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f.

Άρα η συνάρτηση $f(x) = -2\int_0^x f(t)\,dt + x^2$ είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = -2f(x) + 2x, \ \ x \in R$.

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x)+2f(x)=2x \overset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow} e^{2x}f'(x)+e^{2x}2f(x)=e^{2x}2x \Leftrightarrow \left(e^{2x}f(x)\right)' = 2xe^{2x}, \text{ άρα } e^{2x}f(x) = \int 2xe^{2x}dx \quad (2).$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int 2xe^{2x}dx = \int x(e^{2x})'dx = xe^{2x} - \int e^{2x}dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \quad (3).$

Η $(2) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} e^{2x}f(x) = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}, \ \ x \in R$. Όμως $f(0)=0$, άρα $c = \frac{1}{2}$.

Επομένως $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}, \ \ x \in R$.

γ) i) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f'(x) = -e^{-2x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}.$$

Είναι:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$, με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$.

ii) ∘ Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, άρα $f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{e^{-2x}}{2x}+1-\frac{1}{2x}\right)\right]=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)=1-0=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2e^{-2x}\right)=-\infty$.

Άρα $f(\Delta_1)=[0,+\infty)$.

∘ Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}\right)=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Άρα $f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

iii) Αν $\kappa<0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ είναι αδύνατη.

Αν $\kappa=0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μια λύση.

Αν $\kappa>0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει δύο λύσεις.