ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z(t)=\dfrac{1}{2+it}$, $t\in R$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z(t)+\overline{z(t)}=4z(t)\cdot\overline{z(t)}$.

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\dfrac{4}{t}\right)$, $t\in R^*$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $z(t)+\overline{z(t)}=4z(t)\cdot\overline{z(t)}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2+it}+\overline{\left(\dfrac{1}{2+it}\right)}=4\cdot\dfrac{1}{2+it}\cdot\overline{\left(\dfrac{1}{2+it}\right)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2+it}+\frac{1}{2-it}=4\cdot\frac{1}{2+it}\cdot\frac{1}{2-it}\Leftrightarrow 2-it+2+it=4\Leftrightarrow 4=4 \text{ αληθές.}$$

β) Είναι $\left|z(t)-\dfrac{1}{4}\right|=\left|\dfrac{1}{2+it}-\dfrac{1}{4}\right|=\left|\dfrac{4-(2+it)}{4(2+it)}\right|=\dfrac{|2-it|}{|4(2+it)|}=\dfrac{|2+it|}{4|(2+it)|}=\dfrac{1}{4}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$.

γ) Στο (β) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $t\in R$ ο μιγαδικός αριθμός $z(t)=\dfrac{1}{2+it}$ ανήκει στον κύκλο (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$, άρα και για $-\dfrac{4}{t}\in R$ ο μιγαδικός αριθμός $z\left(-\dfrac{4}{t}\right)$ ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $\left|z(t)-z\left(-\frac{4}{t}\right)\right| = 2\rho = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Είναι $\left|z(t)-z\left(-\frac{4}{t}\right)\right| = \left|\frac{1}{2+it} - \frac{1}{2+i\left(-\frac{4}{t}\right)}\right| = \left|\frac{1}{2+it} - \frac{t}{2t-4i}\right| = \left|\frac{1}{2+it} - \frac{t}{2(t-2i)}\right| =$

$= \left|\frac{1}{2+it} - \frac{it}{2(2+it)}\right| = \left|\frac{2-it}{2(2+it)}\right| = \frac{|2-it|}{|2(2+it)|} = \frac{|2+it|}{2|(2+it)|} = \frac{1}{2}$.

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C) για κάθε $t \in R^*$.

δ) Για $t = 1$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$ και $z\left(-\frac{4}{1}\right) = z(-4)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C), σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Είναι $z(1) \neq z(2010) \neq z(-4)$. Πράγματι

$\frac{1}{2+i} \neq \frac{1}{2+2010i} \neq \frac{1}{2-4i} \Leftrightarrow 2+i \neq 2+2010i \neq 2-4i \Leftrightarrow i \neq 2010i \neq -4i$ αληθές, οπότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών $z(1)$ και $z(-4)$.

ΘΕΜΑ 2ο :

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \lambda(1+i)+1-i$, $\lambda \in R$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει η εικόνα του z.

β) Για ποια τιμή του λ, το $|z|$ γίνεται ελάχιστο;

γ) Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Αν $|z| = 2\sqrt{2}$ και $w = \frac{z}{\sqrt{3}-i}$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \sqrt{3}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού ν, ώστε $w^{2\nu} \in R$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $z = x + yi$, $x, y \in R$ και έχουμε:

$$z = \lambda + \lambda i + 1 - i \Leftrightarrow x + yi = (\lambda+1) + (\lambda-1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda+1 \\ y = \lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x-1 \\ \lambda = y+1 \end{cases} \Rightarrow y+1 = x-1 \Leftrightarrow$$

$x - y - 2 = 0$. Άρα η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 2 = 0$.

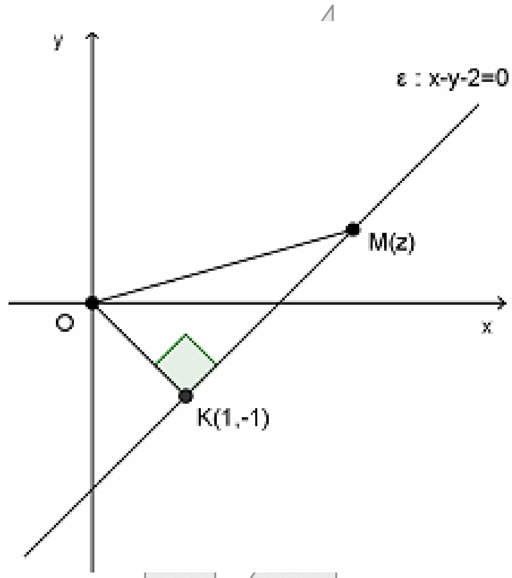
β) Η εικόνα $M(z)$ ανήκει στην ευθεία ε, επομένως το $|z|=(OM)$ γίνεται ελάχιστο, όταν το Μ συμπίπτει με το ίχνος Κ της κάθετης από το Ο στην ευθεία ε. Προσδιορίζουμε το Κ ως σημείο τομής της ΟΚ με την ευθεία ε. Είναι:

$$OK \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}=-1.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΟΚ είναι: $OK: y=-x$.

Λύνουμε το σύστημα : $\begin{cases} y=-x \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

Άρα $K(1,-1)$, οπότε το $|z|$ γίνεται ελάχιστο, όταν $z=1-i$. Επομένως $\lambda=x-1=1-1=0$.



2^{ος} τρόπος Έχουμε: $z=\lambda+\lambda i+1-i=(\lambda+1)+(\lambda-1)i$**.** Άρα

$|z|=\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}=\sqrt{2\lambda^2+2}$ **.**Οπότε ελάχιστο $|z|=\sqrt{2}$, για $\lambda=0$.

γ) i) Έχουμε:

$$|z|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(\lambda^2+1)}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda^2=3 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda=\sqrt{3}.$$

ii) Για $\lambda=\sqrt{3}$ έχουμε:

$$w=\frac{\sqrt{3}(1+i)+(1-i)}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}(1+i)-i(1+i)}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{\sqrt{3}-i}=1+i.$$

Επομένως $w^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$ και $w^{2\nu}=(w^2)^{\nu}=2^{\nu}\cdot i^{\nu}$.

Επειδή $w^{2\nu}\in R \Leftrightarrow i^{\nu}\in R \Leftrightarrow \begin{cases} \nu=4\kappa, & \kappa\in N^* \\ \nu=4\kappa+2, & \kappa\in N \end{cases}$. Άρα $\nu\in\{2,4,6,8,10,\dots\}$.

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, u και w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z|=\sqrt{2},\ \ \mathrm{Re}\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right)=0,\ \ u\neq 3i \ \ \text{και} \ \ (w+2)^8=16(w+1)^8.$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των u και w.

β) Να αποδείξετε ότι $z+u+w\neq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|z+u+w|=\frac{1}{6}|2zu+2uw+9zw|$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$\mathrm{Re}\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right)=0$, άρα ο αριθμός $\frac{u+3i}{u-3i}$ είναι φανταστικός, οπότε έχουμε:

$$\frac{u+3i}{u-3i}=-\overline{\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right)} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i}=-\frac{\overline{u+3i}}{\overline{u-3i}} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i}=-\frac{\overline{u}-3i}{\overline{u}+3i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u+3i)(\overline{u}+3i)=-(u-3i)(\overline{u}-3i) \Leftrightarrow u\overline{u}+3iu+3i\overline{u}-9=-u\overline{u}+3iu+3i\overline{u}+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u\overline{u}=18 \Leftrightarrow 2|u|^2=18 \Leftrightarrow |u|^2=9 \Leftrightarrow |u|=3.$$

Είναι:

$$(w+2)^8=16(w+1)^8 \Rightarrow \left|(w+2)^8\right|=\left|16(w+1)^8\right| \Leftrightarrow |w+2|^8=16|w+1|^8 \Leftrightarrow$$

$$|w+2|=\sqrt{2}|w+1| \Leftrightarrow |w+2|^2=2|w+1|^2 \Leftrightarrow (w+2)(\overline{w}+2)=2(w+1)(\overline{w}+1) \Leftrightarrow$$

$$w\overline{w}+2w+2\overline{w}+4=2w\overline{w}+2w+2\overline{w}+2 \Leftrightarrow w\overline{w}=2 \Leftrightarrow |w|^2=2 \Leftrightarrow |w|=\sqrt{2}.$$

β) Υποθέτουμε ότι:

$z+u+w=0 \Leftrightarrow z+w=-u \Rightarrow |u|=|z+w| \le |z|+|w| \Rightarrow 3 \le \sqrt{2}+\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \le 2\sqrt{2}$, που είναι άτοπο.

Άρα $z+u+w \neq 0$.

γ) Έχουμε:

$|z|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2=2 \Leftrightarrow z\overline{z}=2 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{2}{z}$. Ομοίως είναι $\overline{u}=\dfrac{9}{u}$ και $\overline{w}=\dfrac{2}{w}$.

Είναι:

$$|z+u+w|=\left|\overline{z+u+w}\right|=\left|\overline{z}+\overline{u}+\overline{w}\right|=\left|\frac{2}{z}+\frac{9}{u}+\frac{2}{w}\right|=\left|\frac{2uw+9zw+2zu}{z\cdot u\cdot w}\right|=$$

$$=\frac{|2uw+9zw+2zu|}{|z|\cdot|u|\cdot|w|}=\frac{|2uw+9zw+2zu|}{\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{6}|2uw+9zw+2zu|.$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, u. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z|=|w|=|u|=1 \quad (1), \quad z+w+u\neq 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad z^2+w^2+u^2=0 \quad (3)$$

να αποδείξετε ότι:

α) $|z^2+w^2|=|w^2+u^2|=|u^2+z^2|$

β) $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{w^2}+\dfrac{1}{u^2}=0$

γ) **Οι εικόνες των αριθμών z, w, u, zwu και $\dfrac{zw+wu+uz}{z+w+u}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.**

δ) $|z+w+u|=2$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (3) έχουμε:

- $z^2+w^2=-u^2 \Rightarrow |z^2+w^2|=|-u^2| \Rightarrow |z^2+w^2|=|u|^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} |z^2+w^2|=1.$
- $w^2+u^2=-z^2 \Rightarrow |w^2+u^2|=|-z^2| \Rightarrow |w^2+u^2|=|z|^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} |w^2+u^2|=1.$
- $u^2+z^2=-w^2 \Rightarrow |u^2+z^2|=|-w^2| \Rightarrow |u^2+z^2|=|w|^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} |u^2+z^2|=1.$

Επομένως $|z^2+w^2|=|w^2+u^2|=|u^2+z^2|.$

β) Είναι:

$$|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \overset{z\neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z}=\frac{1}{z}.$$

Ομοίως έχουμε $\bar{w}=\dfrac{1}{w}$ και $\bar{u}=\dfrac{1}{u}$.

Έχουμε:

$$z^2+w^2+u^2=0 \Rightarrow \overline{z^2+w^2+u^2}=\bar{0} \Rightarrow \overline{z^2}+\overline{w^2}+\overline{u^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{z})^2+(\bar{w})^2+(\bar{u})^2=0 \Rightarrow \frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}+\frac{1}{u^2}=0.$$

γ) Είναι:

- $|z|=|w|=|u|=1.$
- $|zwu|=|z|\cdot|w|\cdot|u|=1\cdot1\cdot1=1.$
- $\left|\dfrac{zw+wu+uz}{z+w+u}\right|=\dfrac{|zw+wu+uz|}{|z+w+u|}=\dfrac{|zw+wu+uz|}{|\overline{z+w+u}|}=\dfrac{|zw+wu+uz|}{|\bar{z}+\bar{w}+\bar{u}|}=$

$$=\frac{|zw+wu+uz|}{\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{u}\right|}=\frac{|zw+wu+uz|}{\left|\frac{wu+uz+zw}{zwu}\right|}=\frac{|zw+wu+uz|}{|zw+wu+uz|}\cdot|zwu|=1.$$

Άρα οι εικόνες των αριθμών z, w, u, zwu και $\dfrac{zw+wu+uz}{z+w+u}$ ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε είναι ομοκυκλικά σημεία.

δ) Είναι:

$$(z+w+u)^2=z^2+w^2+u^2+2zw+2wu+2uz \overset{(3)}{\Rightarrow} (z+w+u)^2=2zw+2wu+2uz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(z+w+u)^2|=|2(zw+wu+uz)| \Rightarrow |z+w+u|^2=2|zw+wu+uz| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| z + w + u \right| = 2\,\frac{\left| zw + wu + uz \right|}{\left| z + w + u \right|} \Rightarrow \left| z + w + u \right| = 2\left| \frac{zw + wu + uz}{z + w + u} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| z + w + u \right| = 2 \cdot 1 \Rightarrow \left| z + w + u \right| = 2.$$

ΘΕΜΑ 5ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 2 + \sigma\upsilon\nu(\pi t) + \left(5 + \eta\mu(\pi t)\right) i$, $t \in [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z - 2 - 5i| = 1$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \in [0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $\delta : y = x$.

δ) Έστω $w \in C$ τέτοιος, ώστε $|w - 1| = |w - i|$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|z - 2 - 5i| = |\sigma\upsilon\nu(\pi t) + i\eta\mu(\pi t)| = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2(\pi t) + \eta\mu^2(\pi t)} = 1$.

β) Επειδή $\left|z - (2 + 5i)\right| = 1$, η εικόνα M(z) κινείται στον κύκλο C με κέντρο $K(2,5)$ και ακτίνα ρ=1.

Καθώς η εικόνα M(z) κινείται στον κύκλο C, διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$(OM_1) \leq (OM) \leq (OM_2) \Leftrightarrow (OM_1) \leq |z| \leq (OM_2),$$

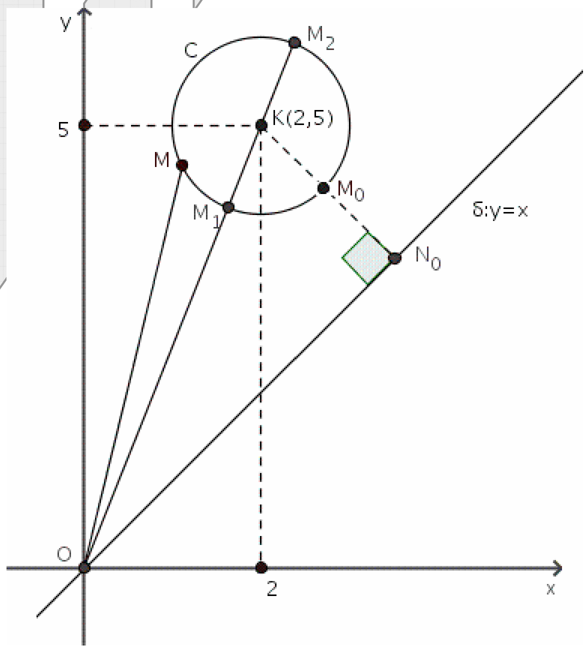
όπου M_1, M_2 είναι τα σημεία τομής της ευθείας ΟΚ και του κύκλου C.

Επομένως:

- Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι:

  $\min|z| = (OK) - \rho = \sqrt{29} - 1$
- Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι

  $\max|z| = (OK) + \rho = \sqrt{29} + 1$



γ) Βρίσκουμε την απόσταση $d(K, \delta) = \frac{|2-5|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1 = \rho$, άρα ο κύκλος C και η ευθεία δ δεν έχουν κοινό σημείο, επομένως δεν υπάρχει εικόνα M(z) η οποία να ανήκει στην ευθεία δ.

2ος τρόπος Έχουμε $x = 2 + \sigma\upsilon\nu(\pi t)$ και $y = 5 + \eta\mu(\pi t)$ Επειδή $x = y \Leftrightarrow$

$2 + \sigma\upsilon\nu(\pi t) = 5 + \eta\mu(\pi t) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\pi t) - \eta\mu(\pi t) = 3$.Άτοπο αφού $-2 \leq \sigma\upsilon\nu(\pi t) - \eta\mu(\pi t) \leq 2$

δ) Επειδή $|w - 1| = |w - i|$, η εικόνα N(w) κινείται στην ευθεία $\delta : y = x$. Καθώς η εικόνα M(z) κινείται στον κύκλο C και η εικόνα $N(w)$ κινείται στην ευθεία $\delta : y = x$, διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του $|z-w| = (MN)$ είναι $\min|z-w| = (M_0N_0) = d(K,\delta) - \rho = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

Επομένως ισχύει: $|z-w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

ΘΕΜΑ 6ο :

α) Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ=1, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1-2z}{z-2}$, $z \neq 2$.

β) Αν $z = x + yi$, $x, y \in R$, να αποδείξετε ότι $|z - w| = 2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$, $-1 \leq x \leq 1$.

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w ώστε, το $|z-w|$ να είναι μέγιστο και να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή του.

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $w = \frac{1-2z}{z-2} \Leftrightarrow w(z-2) = 1-2z \Leftrightarrow wz - 2w = 1 - 2z \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow wz + 2z = 1 + 2w \Leftrightarrow (w+2)z = 1 + 2w \Leftrightarrow z = \frac{1+2w}{w+2}.$$

Επειδή $|z| = 1$ έχουμε:

$$\left|\frac{1+2w}{w+2}\right| = 1 \Leftrightarrow |1+2w| = |w+2| \Leftrightarrow |1+2w|^2 = |w+2|^2 \Leftrightarrow (1+2w)(1+2\bar{w}) = (w+2)(\bar{w}+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\bar{w} + 2w + 4w\bar{w} = w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} + 4 \Leftrightarrow 3|w|^2 = 3 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1.$$

β) Είναι: $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$ (1). Επειδή $y^2 \geq 0$ έχουμε: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Είναι:

$$|z-w|^2 = \left|z - \frac{1-2z}{z-2}\right|^2 = \left|\frac{z^2 - 2z - 1 + 2z}{z-2}\right|^2 = \left|\frac{z^2-1}{z-2}\right|^2 = \left|\frac{(x+yi)^2 - 1}{x+yi-2}\right|^2 = \left|\frac{x^2 - y^2 + 2xyi - 1}{x - 2 + yi}\right|^2 \overset{(1)}{=}$$

$$= \left|\frac{x^2 + x^2 - 1 + 2xyi - 1}{(x-2) + yi}\right|^2 = \frac{4|x^2 - 1 + xyi|^2}{|(x-2)+yi|^2} = \frac{4\left[(x^2-1)^2 + (xy)\right]}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{4(x^4 - 2x^2 + 1 + x^2y^2)}{x^2 - 4x + 4 + y^2} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{4\left[x^4 - 2x^2 + 1 + x^2(1-x^2)\right]}{x^2 - 4x + 4 + 1 - x^2} = \frac{4(x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - x^4)}{5-4x} = \frac{4(1-x^2)}{5-4x}.$$

γ) Η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{4(1-x^2)}{5-4x}$.

Έχουμε:

$$f'(x)=4\left(\frac{1-x^2}{5-4x}\right)'=4\frac{-2x(5-4x)-(1-x^2)(-4)}{(5-4x)^2}=\frac{4(4x^2-10x+4)}{(5-4x)^2}.$$

Αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-10x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{10\pm 6}{8}$. Άρα $x=\frac{1}{2}$ δεκτή ή $x=2$ απορρίπτεται.

Για $x=\frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{5-4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{3}=1$.

Άρα $\max|z-w|=1$. Επίσης για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε $y^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι

$z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $w=\frac{1-2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}=\frac{i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή

$$w=\frac{1-2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2}=\frac{-i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=2$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x))+4f(x)=6-x^4$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=0$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+4f(x)-5}{x-1}=-4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(f(x))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x))+1=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x=0$ από την (1) έχουμε: $f(f(0))+4f(0)=6\Rightarrow f(2)+4\cdot 2=6\Rightarrow f(2)=-2$.

Για $x=2$ από την (1) έχουμε: $f(f(2))+4f(2)=6-2^4\Rightarrow f(-2)+4\cdot(-2)=6-16\Rightarrow f(-2)=-2$.

β) Είναι $f(-2)=-2<0<2=f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,0]$, επομένως από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (-2\ ,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.

Για $x=x_o$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_o))+4f(x_o)=6-x_o^4 \Rightarrow f(0)+4\cdot 0=6-x_o^4 \Rightarrow 2=6-x_o^4 \Rightarrow x_o^4=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_o=\sqrt{2} \text{ ή } x_o=-\sqrt{2} \Rightarrow x_o=-\sqrt{2}, \text{ αφού } x_o \in (-2\ ,\ 0). \text{ Άρα } f\left(-\sqrt{2}\right)=0.$$

Είναι $f(2)=-2<0<2=f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[0\ ,2]$, επομένως από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0\ ,\ 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

Για $x=x_1$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_1))+4f(x_1)=6-x_1^4 \Rightarrow f(0)+4\cdot 0=6-x_1^4 \Rightarrow 2=6-x_1^4 \Rightarrow x_1^4=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\sqrt{2} \text{ ή } x_1=-\sqrt{2} \Rightarrow x_1=\sqrt{2}, \text{ αφού } x_1 \in (0\ ,\ 2). \text{ Άρα } f\left(\sqrt{2}\right)=0.$$

γ) Για $x \neq 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^4+4f(x)-5}{x-1}$, οπότε $f(x)=\dfrac{(x-1)g(x)-x^4+5}{4}$ (2)

Από υπόθεση είναι $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-4$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)g(x)-x^4+5}{4}=1$, και

$\lim\limits_{x\to 1} f(f(x)) \overset{u=f(x)}{=} \lim\limits_{u\to 1} f(u)=1$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(f(x))+1,\quad x\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\sqrt{2},0\right]$ και $\left[0,\sqrt{2}\right]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της $f(f(x))$ που είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και της σταθερής συνάρτησης 1.

Είναι:

- $g\left(-\sqrt{2}\right)=f\left(f\left(-\sqrt{2}\right)\right)+1=f(0)+1=2+1=3$.
- $g(0)=f\left(f(0)\right)+1=f(2)+1=-2+1=-1$.
- $g\left(\sqrt{2}\right)=f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)+1=f(0)+1=2+1=3$.

Επομένως $g\left(-\sqrt{2}\right)\cdot g(0)=-3<0$ και $g(0)\cdot g\left(\sqrt{2}\right)=-3<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano σε δύο διαστήματα, άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(f(x))+1=0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0\ ,\sqrt{2}\right)$, δηλαδή δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $\left(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 8ο :

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: R\to R$. Αν $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{f(x+1)}=1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των

αξόνων.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x-1$ **σε ένα ακριβώς σημείο** $(x_o\, ,\, y_o)$ **με** $x_o \in (0\, ,1)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{f(x+1)} = 1 \overset{u=x+1}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{f(u)} = 1 \qquad (1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u) = \dfrac{u}{f(u)}$, για u κοντά στο 0, οπότε $g(u)\cdot f(u) = u$ και από (1) έχουμε $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = 1 \quad (2)$.

Είναι $\lim\limits_{u\to 0}\left[g(u)\cdot f(u)\right] = \lim\limits_{u\to 0} u \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0} g(u)\cdot \lim\limits_{u\to 0} f(u) = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{u\to 0} f(u) = 0$ και αφού η f είναι συνεχής ισχύει $f(0) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για x κοντά στο 0 είναι:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \overset{u=\eta\mu x}{=} \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\dfrac{u}{f(u)}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1.$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x-1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_o \in (0\, ,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x + 1,\ x \in R$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0\, ,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(0) = f(0) - 0 + 1 \overset{(\alpha)}{=} 1 > 0$ και $h(1) = f(1) - 1 + 1 = f(1) < 0$, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε $1 > 0 \Leftrightarrow f(1) < f(0) = 0$. Άρα $h(0)h(1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_o \in (0\, ,1)$.

Για $x_1, x_2 \in (0\, ,1)$ με $x_1 < x_2$ ισχύουν:

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{και} \qquad -x_1 + 1 > -x_2 + 1,$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x_1)-x_1+1>f(x_2)-x_2+1 \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,1)$, οπότε η ρίζα x_o είναι μοναδική.

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_o\in(0\,,1)$.

ΘΕΜΑ 9ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)=x^6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty\,,0)$ και $(0\,,+\infty)$.

γ) Αν $f(-2)>0$ και $f(2)<0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^3$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow x^6=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x=0$.

β) Η συνάρτηση f στο $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η συνάρτηση f στο $(0\,,+\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0\,,+\infty)$.

γ) Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$ και από υπόθεση είναι $f(-2)>0$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x)=x^6 \Leftrightarrow f(x)=-x^3,\ \text{αφού } x<0.$$

Επειδή $f(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(x)=-x^3 \text{ για κάθε } x\in(-\infty\,,0] \quad (1).$$

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0\,,+\infty)$ και από υπόθεση είναι $f(2)<0$, οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x)=x^6 \Leftrightarrow f(x)=-x^3,\ \text{αφού } x>0.$$

Επειδή $f(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(x)=-x^3 \text{ για κάθε } x\in[0\,,+\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1^3 = -x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1 – 1» στο R, οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1}, λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x. Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -x^3 \Leftrightarrow (-x)^3 = y \Leftrightarrow -x = \begin{cases} -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases}.$$

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ έχουμε $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases}$.

Επομένως: $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \overset{f:1\text{-}1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f\left(f^{-1}(x)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = -x^3 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x^3 + y^3 + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ (x+y)\left(\underbrace{x^2 - xy + y^2 + 1}_{\neq 0}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = -1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1) \text{ ή } (0, 0) \text{ ή } (1, -1).$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι τα:

$$A(-1, 1), \quad O(0, 0) \quad \text{και} \quad B(1, -1).$$

ΘΕΜΑ 10ο :

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ έτσι, ώστε να ισχύουν:

(1) $f^2(x) + \eta\mu^2 x = 2x f(x)$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **και**

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$, **με** $\ell = \dfrac{|z-2|}{|2z-1|}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $|z - 2| = |2z - 1|$

ii) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο $C:\ x^2+y^2=1$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

δ) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης f.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(|z+3-4i|+5\right)x=x^3+10$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.

ΛΥΣΗ

α) i) Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x^2\neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=2\,\frac{f(x)}{x}\quad \text{για κάθε } x\in R^* \qquad (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell,\ \ell\in R$. Αν πάρουμε τα όρια και των δύο μελών στη σχέση (3) έχουμε:

$$\ell^2+1=2\ell\Leftrightarrow \ell^2-2\ell+1=0\Leftrightarrow(\ell-1)^2=0\Leftrightarrow\ell=1,\quad \text{δηλαδή}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \quad (4).$$

Επομένως έχουμε $\dfrac{|z-2|}{|2z-1|}=1\Leftrightarrow|z-2|=|2z-1|$.

ii) Είναι $|z-2|^2=|2z-1|^2\Leftrightarrow(z-2)(\bar z-2)=(2z-1)(2\bar z-1)\Leftrightarrow z\bar z-2z-2\bar z+4=4z\bar z-2z-2\bar z+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3z\bar z=3\Leftrightarrow z\bar z=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1$. Αν θέσουμε $z=x+yi$, τότε $x^2+y^2=1$.

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο $C:\ x^2+y^2=1$.

β) Για x κοντά στο $x_o=0$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}=\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x^2-x}=\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{u=\eta\mu x}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}\overset{(4)}{=}1$ (5), οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}\overset{(5)}{=}1\cdot 1\cdot(-1)=-1.$$

γ) Για κάθε $x\in R$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$f^2(x)-2x\,f(x)+x^2=x^2-\eta\mu^2x\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=x^2-\eta\mu^2x\Leftrightarrow g^2(x)=x^2-\eta\mu^2x$ (6).

Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow g^2(x)=0\Leftrightarrow x^2-\eta\mu^2x=0\Leftrightarrow\eta\mu^2x=x^2\Leftrightarrow|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$.

Θυμίζουμε ότι, για κάθε $x\in R$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα για $x\neq 0$ έχουμε $|\eta\mu x|<|x|\Leftrightarrow\eta\mu^2x<x^2\Leftrightarrow x^2-\eta\mu^2x>0\Leftrightarrow g^2(x)>0\Leftrightarrow g(x)\neq 0$

Η συνάρτηση λοιπόν $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται στο R^*, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$

και $(0, +\infty)$.

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

♦ Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

- Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - ημ^2x} \quad (I).$$

- Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - ημ^2x} \quad (II).$$

♦ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

- Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - ημ^2x} \quad (III).$$

- Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - ημ^2x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - ημ^2x} \quad (IV).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις:

➢ (I) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x - \sqrt{x^2 - ημ^2x}$, $x \in R$.

➢ (I) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - ημ^2x} , & x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 - ημ^2x} , & x \geq 0 \end{cases}$.

➢ (II) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - ημ^2x} , & x < 0 \\ x - \sqrt{x^2 - ημ^2x} , & x \geq 0 \end{cases}$.

➢ (II) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x + \sqrt{x^2 - ημ^2x}$, $x \in R$.

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - \left(|z+3-4i| + 5\right)x + 10$, $x \in [1, 2]$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και ισχύει:

$h(1) = 1 - \left(|z+3-4i| + 5\right)\cdot 1 + 10 = 6 - |z+3-4i|$

$h(2) = 8 - \left(|z+3-4i| + 5\right)\cdot 2 + 10 = 8 - 2\cdot|z+3-4i| = 2\cdot\left(4 - |z+3-4i|\right)$

Όμως $\left||z| - |3-4i|\right| \leq |z+3-4i| \leq |z| + |3-4i| \Leftrightarrow |1-5| \leq |z+3-4i| \leq 1+5 \Leftrightarrow 4 \leq |z+3-4i| \leq 6$.

Άρα $h(1) \geq 0$ και $h(2) \leq 0$, οπότε $h(1)h(2) \leq 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $h(1)h(2) = 0$, τότε h(1)=0 ή h(2)=0**,** άρα ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.
- Αν $h(1)h(2) < 0$, τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in (1, 2)$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in [1, 2]$.

ΘΕΜΑ 11ο :

Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w. Αν $\frac{z}{w}=1+i\sqrt{3}$ και η εικόνα Α του μιγαδικού αριθμού z, στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στο κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, τότε:

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) Η εικόνα Β του μιγαδικού w ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β) $|z-w|=\sqrt{3}$ και $|z+w|=\sqrt{7}$.

Β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\left|(\xi^3-2)z+\xi w\right|+\left|\xi^2 z+w\right|=2e^{\xi}$.

Γ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|(3i-4)x-xz\right|-2010}{\eta\mu x+x}=\kappa$, να αποδείξετε ότι $3\le\kappa\le 7$.

ΛΥΣΗ

Α) α) Η εικόνα Α του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα ισχύει $|z|=2$. Είναι $\frac{z}{w}=1+i\sqrt{3}\Leftrightarrow w=\frac{z}{1+i\sqrt{3}}$.

Άρα $|w|=\left|\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right|\Leftrightarrow|w|=\frac{|z|}{\left|1+i\sqrt{3}\right|}\Leftrightarrow|w|=\frac{2}{\sqrt{1+3}}\Leftrightarrow|w|=\frac{2}{2}\Leftrightarrow|w|=1.$

Επομένως η εικόνα Β του μιγαδικού w ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β) Είναι:

$$\frac{z}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\Leftrightarrow\frac{z-w}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}-1}{1}\Leftrightarrow\frac{z-w}{w}=i\sqrt{3}$$

Άρα $$\left|\frac{z-w}{w}\right|=\left|i\sqrt{3}\right|\Leftrightarrow\frac{|z-w|}{|w|}=\sqrt{0^2+(\sqrt{3})^2}\overset{|w|=1}{\Leftrightarrow}|z-w|=\sqrt{3}.$$

Είναι:

$$\frac{z}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1}\Leftrightarrow\frac{z+w}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1}\Leftrightarrow\frac{z+w}{w}=2+i\sqrt{3}$$

Άρα $$\left|\frac{z+w}{w}\right|=\left|2+i\sqrt{3}\right|\Leftrightarrow\frac{|z+w|}{|w|}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}\overset{|w|=1}{\Leftrightarrow}|z+w|=\sqrt{7}.$$

Β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left|(x^3-2)z+xw\right|+\left|x^2z+w\right|-2e^x$ στο διάστημα $[0,1]$.

- Η h συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνεχών.
- $h(0)=|-2z|+|w|-2e^0=2|z|+|w|-2=3>0$

  $h(1)=|-z+w|+|z+w|-2e=|z-w|+|z+w|-2e=\sqrt{3}+\sqrt{7}-2e<0$

  Άρα $h(0)\cdot h(1)<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0$.

Είναι $h(\xi)=0\Leftrightarrow\left|(\xi^3-2)z+\xi w\right|+\left|\xi^2z+w\right|-2e^{\xi}=0\Leftrightarrow\left|(\xi^3-2)z+\xi w\right|+\left|\xi^2z+w\right|=2e^{\xi}$

Γ) Για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ έχουμε:

- $$\frac{\left|(3i-4)x - xz\right| - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{\left|(3i-4)-z\right|\cdot x - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{\left|(3i-4)-z\right| - \dfrac{2010}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}+1}$$

- $$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}\ ,\ \text{οπότε}\quad -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|(3i-4)x - xz\right| - 2010}{\eta\mu x + x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|(3i-4)-z\right| - \dfrac{2010}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}+1} = \left|(3i-4)-z\right|$, οπότε $\kappa = \left|(3i-4)-z\right|$.

Ισχύει $\left|\,|3i-4| - |z|\,\right| \le \left|(3i-4)-z\right| \le |3i-4| + |z| \Leftrightarrow |5-2| \le \kappa \le 5+2 \Leftrightarrow 3 \le \kappa \le 7$.

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $u = \dfrac{1}{f(\alpha)} + \beta i$ και $w = \dfrac{1}{f(\beta)} - \alpha i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(uw) = \dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\mathrm{Im}(uw) = \dfrac{\beta}{f(\beta)} - \dfrac{\alpha}{f(\alpha)}$.

β) Αν $\mathrm{Im}(uw) = 0$ και $0 \notin [\alpha\,,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha\,,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

γ) Αν $\mathrm{Re}(uw) = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha\,,\beta$ είναι ετερόσημοι.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2004)f(2010)\cdot x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $uw = \left(\dfrac{1}{f(\alpha)} + \beta i\right)\left(\dfrac{1}{f(\beta)} - \alpha i\right) = \left(\dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta\right) + \left(\dfrac{\beta}{f(\beta)} - \dfrac{\alpha}{f(\alpha)}\right)i$,

άρα $\mathrm{Re}(uw) = \dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\mathrm{Im}(uw) = \dfrac{\beta}{f(\beta)} - \dfrac{\alpha}{f(\alpha)}$.

β) Είναι $\mathrm{Im}(uw) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{f(\beta)} = \dfrac{\alpha}{f(\alpha)} \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{f(\beta)}{\beta}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha,\beta]$.

- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
- $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

γ) Είναι $\mathrm{Re}(uw)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)}+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(\alpha)f(\beta)}=-\alpha\beta$ (1).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, επομένως $f(\alpha)f(\beta)>0$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $\alpha\beta<0$, άρα οι αριθμοί α,β είναι ετερόσημοι.

δ) Για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$ έχουμε:

$$f(2004)f(2010)\cdot x^2\eta\mu\frac{1}{x}=f(2004)f(2010)\cdot x\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Έχουμε:

- Επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R, οι αριθμοί $f(2004)$ και $f(2010)$ είναι ομόσημοι, άρα $f(2004)\cdot f(2010)>0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\eta\mu t}{t}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2004)f(2010)\cdot x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(2004)f(2010)\cdot x\cdot\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=-\infty$.