ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ 2006
ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο (3ο – 2006)

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f^3(x)+2x^2f(x)=3ημ^3x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (I)$$

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=α$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $α=1$.

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(ημx)}{x}$, ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}$ και iii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x\neq 0$ διαιρούμε με x^3 και τα δύο μέλη της (I) οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}=3\left(\frac{ημx}{x}\right)^3$$

και υπολογίζοντας τα όρια των δύο μελών παίρνουμε:

$$α^3+2α=3 \Leftrightarrow α^3+2α-3=0 \Leftrightarrow (α-1)(α^2+α+3)=0 \Leftrightarrow α=1.$$

β) i) Για x κοντά στο 0 έχουμε:

$$\frac{f(ημx)}{x}=\frac{f(ημx)}{ημx}\cdot\frac{ημx}{x}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(ημx)}{x}\overset{y=ημx}{=}\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$

Οπότε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(ημx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(ημx)}{ημx}\cdot\frac{ημx}{x}\right)=1$

ii) Για x κοντά στο 0 έχουμε:

$$\frac{f(f(x))}{x}=\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{f(x)}{x}\right) = 0\cdot 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x} \overset{y=f(x)}{=} \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} = 1$

iii) Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2} = \frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x}{x-2}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x^2-x)}{x^2-x} \overset{y=x^2-x}{=} \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-2} = -1$

Οπότε:

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2} = 1\cdot(-1) = -1$

ΘΕΜΑ 2ο (4ο – 2006)

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 1$

α) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$

γ) Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1} & , x\neq 1 \\ k & , x = 1\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

δ) Για την τιμή του $k = 1$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

ΛΥΣΗ

α) Για x κοντά στο $\frac{\pi}{2}$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot\sigma\upsilon\nu x = \frac{f(\eta\mu x)}{1-\eta\mu^2 x}\cdot\sigma\upsilon\nu x = -\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1} \overset{y=\eta\mu x}{=} \lim\limits_{y\to 1}\frac{f(y)}{y-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = 0$

Οπότε:

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = -1\cdot 0 = 0$

β) Επειδή f συνεχής στο 1 έχουμε: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)\cdot\frac{f(x)}{x-1}\right) = 0\cdot 1 = 0$.

γ) $g(1)=\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 1$, άρα $k=1$.

δ) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-2x$ στο [0,1].

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών.

Είναι $h(0)=g(0)=-f(0)$, όμως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R,

οπότε $f(0)<f(1)=0$. Επομένως $h(0)>0$.

Επίσης είναι $h(1)=g(1)-2=-1<0$, οπότε $h(0)h(1)<0$

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=2x_0$$

Δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης g και η ευθεία $(\varepsilon): y=2x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

ΘΕΜΑ 3ο (5ο – 2006)

Έστω μια συνάρτηση $f: R\to R$ τέτοια ώστε:

$$|f(x)-x|\le 1 \text{ για κάθε } x\in R \quad (I).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\nu}$, $\nu\in N^*$, ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$, iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-x-2}{x^2}\cdot f\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\right]$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x>0$ έχουμε: $|f(x)-x|\le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le 1+\frac{1}{x}$ και

εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

β) i) Έχουμε: Για ν>1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\nu}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x^{\nu-1}}\right]=1\cdot 0=0$

Για ν=1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\nu}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ και για $u=\frac{1}{x}$ έχουμε $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=1$.

iii) Είναι $\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\cdot f\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}\cdot f\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)=(x-2)\cdot\dfrac{f\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)}{\dfrac{x^2}{x+1}}$ (1)

και θέτοντας $u=\dfrac{x^2}{x+1}$ βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)}{\dfrac{x^2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=1$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\cdot f\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)\right]=+\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο (6ο – 2006)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο R τέτοια ώστε:

$$\mathbf{f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{\eta\mu x}{x-1}} \text{ για κάθε } \mathbf{x\neq 1} \quad \mathbf{(I)}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x-1}=0$.

β) Να βρείτε το $f(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{\pi-6},\dfrac{\pi}{\pi-2}\right)$ **τέτοιο ώστε:** $f(x_0)=0$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε x>1 έχουμε:

$\left|\dfrac{\eta\mu x}{x-1}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{x-1}\le\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow-\dfrac{1}{x-1}\le\dfrac{\eta\mu x}{x-1}\le\dfrac{1}{x-1}$ με κριτήριο

παρεμβολής βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x-1}=0$.

β) Από την (I) παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=0$. Θέτουμε $y=\dfrac{x}{x-1}$ τότε

$0=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\lim\limits_{y\to1}f(y)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 1 έχουμε:

$f(1)=\lim\limits_{y\to1}f(y)=0$.

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την f στο $\left[\dfrac{\pi}{\pi-6},\dfrac{\pi}{\pi-2}\right]$.

Για $x=\dfrac{\pi}{6}$ η (I) δίνει: $f\left(\dfrac{\pi}{\pi-6}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}-1}=\dfrac{3}{\pi-6}<0$

Για $x=\dfrac{\pi}{2}$ η (I) δίνει: $f\left(\dfrac{\pi}{\pi-2}\right)=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-1}=\dfrac{2}{\pi-2}>0$.

Σημείωση: Παρατηρείστε ότι από την σχέση (I) μπορεί να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης για κάθε $x\neq1$, οπότε τα ερωτήματα β) και γ) επιλύονται διαφορετικά.

ΘΕΜΑ 5ο (7ο – 2006)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=1$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Αν $f'(x)+f(x)=e^x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ (1), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=\dfrac{1}{2}\eta\mu x$.

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f'(0)+f(0)=e^0 \overset{f(0)=1}{\Rightarrow} f'(0)=0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$

(η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ από υπόθεση).

β) Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)+f(x)=e^x \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} f'(x)e^x+f(x)e^x=e^{2x}\Leftrightarrow (f(x)e^x)'=\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)',$$

οπότε:

$$f(x)e^x=\frac{1}{2}e^{2x}+c,\ x\ge 0 \quad (2).$$

Για $x=0$ από την (2) έχουμε $1=\dfrac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}$,

επομένως για κάθε $x\ge 0$ είναι:

$$f(x)e^x=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ x\ge 0.$$

γ) Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

οπότε η εξίσωση $f'(x)=\dfrac{1}{2}\eta\mu x$ ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\eta\mu x\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=\eta\mu x$$

Παρατηρούμε ότι $e^0-e^{-0}=\eta\mu 0\Leftrightarrow 0=0$ αληθές, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-e^{-x}-\eta\mu x$, $x\ge 0$.

Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι $g'(x)=e^x+e^{-x}-\sigma\upsilon\nu x=\underbrace{\left(e^x+\frac{1}{e^x}-2\right)}_{\ge 0}+\underbrace{(2-\sigma\upsilon\nu x)}_{>0}>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η ρίζα 0 της εξίσωσης είναι μοναδική.

Επομένως:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\eta\mu x\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=\eta\mu x\Leftrightarrow x=0.$$

Σημείωση: Είναι γνωστό ότι $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\ge 2$ για κάθε $\alpha>0$ και αφού $e^x>0$ είναι $e^x+\dfrac{1}{e^x}-2\ge 0$.

Επίσης $2-\sigma\upsilon\nu x>0$, αφού $|\sigma\upsilon\nu x|\le 1$ για κάθε x.

ΘΕΜΑ 6ο (8ο – 2006)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) > 2007$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y = 2006x + 1$ σε ένα ακριβώς σημείο.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 2006x + 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο R.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - (2006x + 1)$, $x \in R$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγισίμων με:
  $g'(x) = f'(x) - 2006 > 2007 - 2006 = 1 > 0$ (1), για κάθε $x \in R$, οπότε
  η g είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο R.
- Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, x]$ με $x > 0$ άρα θα υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:
  $g'(\xi_1) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_1) \cdot x + g(0) > x + g(0)$ (αφού $g'(\xi_1) > 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g'(\xi_1)x > x$).
  Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + g(0)) = +\infty$, άρα και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\beta, +\infty)$ με $\beta > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (\beta, +\infty)$. Επομένως $g(\lambda) > 0$ για $\lambda \in (\beta, +\infty)$.
  Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, 0]$ με $x < 0$, άρα θα υπάρχει $\xi_2 \in (x, 0)$ τέτοιο, ώστε:
  $g'(\xi_2) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_2) \cdot x + g(0) < x + g(0)$ (αφού $g'(\xi_2) > 1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} g'(\xi_2)x < x$).
  Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + g(0)) = -\infty$, άρα και $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ με $\alpha < 0$ τέτοιο, ώστε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$. Επομένως $g(\kappa) < 0$ για $\kappa \in (-\infty, \alpha)$.
  Η g ικανοποιεί λοιπόν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο $[\kappa, \lambda]$. Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.
  Δείξαμε λοιπόν ότι η $g(x) = 0$ έχει: • μια τουλάχιστον ρίζα και
  • μια το πολύ ρίζα στο R
  Άρα η $g(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο R, που σημαίνει ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y = 2006x + 1$ σε ένα ακριβώς σημείο.

ΘΕΜΑ 7ο (10ο – 2006)

Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(2) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) = 2xf(x) - x^2 f(2 - x) \text{ για κάθε } x \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι $[f(x) - x]^2 = x^2[1 - f(2 - x)]$ για κάθε $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in R$.

γ) Αν η C_f έχει με τον άξονα x΄x δύο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για $x = 1$ η f παίρνει μέγιστη τιμή $f(1) = 1$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f^2(x) = 2xf(x) - x^2 f(2-x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = -x^2 f(2-x) \Leftrightarrow$$
$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 - x^2 f(2-x) \Leftrightarrow [f(x) - x]^2 = x^2[1 - f(2-x)]$$

β) Για $x \neq 0$ είναι:

$1 - f(2-x) = \dfrac{[f(x)-x]^2}{x^2} \geq 0$ οπότε $f(2-x) \leq 1$ για κάθε $x \in R^*$

Επίσης είναι $f(2-0) = f(2) = 0 \leq 1$.

Άρα $f(2-x) \leq 1$ για κάθε $x \in R$

Αν όπου x θέσουμε το $2-x$ έχουμε:

$f(2-(2-x)) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in R$.

γ) Για $x = 1$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f^2(1) = 2f(1) - f(1) \Leftrightarrow f^2(1) = f(1) \Leftrightarrow$$
$f(1)[f(1) - 1] = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ ή $f(1) = 1$

Για $x = 0$ επίσης έχουμε:

$$f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Επειδή $f(0) = 0$ και $f(2) = 0$ δεν είναι δυνατόν να είναι και $f(1) = 0,$ αφού η C_f έχει με τον άξονα x΄x δύο μόνο κοινά σημεία. Υποχρεωτικά λοιπόν είναι $f(1) = 1$.

Άρα $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in R$. Επομένως η f παίρνει μέγιστη τιμή το 1 για $x = 1$.

ΘΕΜΑ 8ο (12ο – 2006)

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x \in [1, e]$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}

β) $\displaystyle\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx + \int_0^1 e^{x^2}\,dx = e$

Β) Έστω h μια αρχική της συνάρτηση e^{x^2} στο R με $h(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $h(x) \geq e^x - e$**, για κάθε** $x \in [0, +\infty)$**.**

β) $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = \frac{1-e}{2}$

ΛΥΣΗ

Α) α) Για κάθε $x \in (1,e)$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα είναι και «1−1», οπότε αντιστρέφεται. Το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f\left([1,e]\right) = \left[f(1), f(e)\right] = [0,1]$$

Είναι $y = f(x)$ και με $1 \leq x \leq e$, $0 \leq y \leq 1$ έχουμε:

$$y = \sqrt{\ln x} \Leftrightarrow \ln x = y^2 \Leftrightarrow x = e^{y^2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^{y^2}$$

Άρα $f^{-1} : [0,1] \to R$ με $f^{-1}(x) = e^{x^2}$ με $f^{-1}\left([0,1]\right) = [1, e]$.

β) Αν $I=\int_1^e \sqrt{\ln x}dx$ και θέσουμε $\sqrt{\ln x}=u$ τότε έχουμε $x=e^{u^2}$, οπότε

$$dx=(e^{u^2})'du \Leftrightarrow dx=2ue^{u^2}du$$

Για $x=1$ είναι $u=\sqrt{\ln 1}=0$ και για $x=e$ είναι $u=\sqrt{\ln e}=1$.

Έχουμε:

$$I=\int_0^1 u2ue^{u^2}du=\int_0^1 u(e^{u^2})'du=[ue^{u^2}]_0^1-\int_0^1 u'e^{u^2}du=e-\int_0^1 e^{u^2}du=e-\int_0^1 e^{x^2}dx \text{, οπότε}$$

$$\int_1^e \sqrt{\ln x}dx+\int_0^1 e^{x^2}dx=e-\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{x^2}dx=e.$$

Β) α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=h(x)-e^x+e$, $x\in R$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=e^{x^2}$

Άρα η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Για κάθε $x\in R$ είναι $\varphi'(x)=e^{x^2}-e^x$. Είναι

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-e^x=0 \Leftrightarrow e^{x^2}=e^x \Leftrightarrow x^2=x \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

$\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x^2}-e^x>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>e^x \Leftrightarrow x^2>x \Leftrightarrow x(x-1)>0 \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$.

Ο πίνακας μεταβολών της φ είναι:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	0	+	$-\infty$
$\varphi(x)$		↗	$\varphi(0)$	↘	0	↗	

αφού $\varphi(1)=h(1)-e+e=0$

Στο διάστημα $[0,+\infty)$ η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $\varphi(1)=0$. Άρα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι:

$$\varphi(x)\ge\varphi(1) \Leftrightarrow h(x)-e^x+e\ge 0 \Leftrightarrow h(x)\ge e^x-e$$

β) Είναι:

$$\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 (x)'h(x)dx=[xh(x)]_0^1-\int_0^1 xh'(x)dx=$$

$$=h(1)-\int_0^1 xe^{x^2}dx=0-\frac{1}{2}\int_0^1 (e^{x^2})'dx=-\frac{1}{2}[e^{x^2}]_0^1=-\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1-e}{2}$$

ΘΕΜΑ 9ο (14ο – 2006)

α) Να αποδείξετε ότι $e^x-\eta\mu x\ge x+1-\eta\mu x\ge x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}$, $x\ge 0$. Να βρείτε:

i) Την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ii) Τους αριθμούς α, β ώστε $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=\alpha(e^x-\eta\mu x)+\beta(e^x-\eta\mu x)'$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

iii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και $x=\dfrac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $1-\eta\mu x \geq 0$ άρα και $x+1-\eta\mu x \geq x$.

Επίσης θέλουμε να δείξουμε ότι $e^x - \eta\mu x \geq x+1-\eta\mu x$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $e^x \geq x+1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x-x-1,\ x\in[0,+\infty)$. Είναι $h'(x)=e^x-1$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $h'(x)>0$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για $x\geq 0$ είναι:

$h(x)\geq h(0) \Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1$.

β) i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$|f(x)| = \left|\dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}\right| = \dfrac{|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|}{|e^x-\eta\mu x|}$ αλλά

$$\frac{|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|}{|e^x-\eta\mu x|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|e^x-\eta\mu x|} \leq \frac{1+1}{|e^x-\eta\mu x|} = \frac{2}{|e^x-\eta\mu x|} = \frac{2}{e^x-\eta\mu x} \leq \frac{2}{x}$$

λόγω και του (α) υποερωτήματος.

Οπότε $-\dfrac{2}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Είναι:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$, οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, επομένως η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ έχουμε:

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x-\eta\mu x)+\beta(e^x-\eta\mu x)' \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x-\eta\mu x)+\beta(e^x-\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)e^x-(\alpha+1)\eta\mu x-(\beta-1)\sigma\upsilon\nu x=0$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta)e^0-(\alpha+1)\eta\mu 0-(\beta-1)\sigma\upsilon\nu 0=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha+\beta-\beta+1=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$$

Για $x=\dfrac{\pi}{2}$ έχουμε:

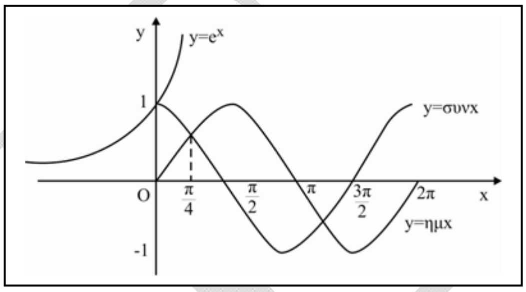
$$(\alpha+\beta)e^{\frac{\pi}{2}}-(\alpha+1)\eta\mu\frac{\pi}{2}-(\beta-1)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta)e^{\frac{\pi}{2}}=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=1$$

Επαληθεύουμε ότι $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-(e^x-\eta\mu x)+(e^x-\eta\mu x)'$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

iii) $E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}dx=$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{-(e^x-\eta\mu x)}{e^x-\eta\mu x}+\frac{(e^x-\eta\mu x)'}{e^x-\eta\mu x}\right]dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-1+\frac{(e^x-\eta\mu x)'}{e^x-\eta\mu x}\right]dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}-[\ln(e^x-\eta\mu x)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\ln\left(e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



Σημείωση: Από τη γραφική παράσταση για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ είναι:
- $\eta\mu x\le\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\le 0$
- $e^x>\eta\mu x\Leftrightarrow e^x-\eta\mu x>0$

ΘΕΜΑ 10ο (17ο – 2006)

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, $f(2005)=\frac{1}{2}$, $f(2007)=3$ και $f(1)f(2)=f(3)f(4)$ να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in R$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=1$

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1,2]$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0)=f(1)f(2)$

γ) Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

ΛΥΣΗ

α)
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[2005\,,\,2007]$
- $\frac{1}{2}=f(2005)\neq f(2007)=3$
- Ο αριθμός 1 είναι μεταξύ των $f(2005)$ και $f(2007)$, άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2005,2007)\subseteq R$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=1$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-f(1)f(2),\ x\in[1,2]$.
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$
- $g(1)g(2)=[f^2(1)-f(1)f(2)][f^2(2)-f(1)f(2)]=\underbrace{-f(1)f(2)}_{<0}\cdot\underbrace{[f(1)-f(2)]^2}_{\ge 0}\le 0$, γιατί η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο R, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(1)f(2)>0\Leftrightarrow -f(1)f(2)<0$. Επίσης είναι $[f(1)-f(2)]^2\ge 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) αν $g(1)g(2)=0$ τότε $g(1)=0$ ή $g(2)=0$

ii) αν $g(1)g(2)<0$ τότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)-f(1)f(2)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)=f(1)f(2)\quad(1).$$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1,2]$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)=f(1)f(2)$.

γ) Επειδή $f(1)f(2)=f(3)f(4)$ η συνάρτηση g γράφεται $g(x)=f^2(x)-f(3)f(4),\ x\in\mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[3,4]$
- $g(3)g(4)=[f^2(3)-f(1)f(2)][f^2(4)-f(1)f(2)]=\underbrace{-f(3)f(4)}_{<0}\cdot\underbrace{[f(3)-f(4)]^2}_{\geq 0}\leq 0$.

  Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in[3,4]$ τέτοιο, ώστε:

  $g(x_1)=0\Leftrightarrow f^2(x_1)-f(3)f(4)=0\Leftrightarrow f^2(x_1)=f(3)f(4)$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f^2(x_0)=f^2(x_1)$ και επειδή η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R είναι $f(x_0)=f(x_1)$, οπότε η συνάρτηση f δεν είναι «1−1» και επομένως δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 11ο (18ο – 2006)

Αν f συνεχής στο 0, $f(0)=2006$ και ισχύει $xf(x)+x^4\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=\eta\mu(\alpha x)$, $\alpha\neq 0$ για κάθε $x\in R^*$

Α) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R

ii) Να βρείτε το α.

Β) i) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R

ΛΥΣΗ

Α) i) Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}-x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, η f είναι συνεχής στο R^* ως πράξεις συνεχών και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 τότε η f είναι συνεχής στο R.

ii) Κοντά στο $x_0=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}-x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right]=\alpha$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0$, γιατί για κάθε $x\neq 0$ έχουμε $\left|x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\leq\left|x^3\right|$ ή

$$\left.\begin{array}{l}-\left|x^3\right|\leq x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\leq\left|x^3\right|\\ \lim\limits_{x\to 0}\left|x^3\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^3\right|\right)=0\end{array}\right\}\ \text{άρα}\ \lim_{x\to 0}\left(x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0.$$

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\alpha\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x}\right)=\alpha\cdot 1=\alpha.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\alpha\Leftrightarrow f(0)=\alpha\Leftrightarrow\alpha=2006$, γιατί η f είναι συνεχής στο 0.

Β) i) Κοντά στο $-\infty$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}-x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}=0\ \text{(Κριτήριο Παρεμβολής)}$$

Πράγματι $\left|\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x}\right| \le \left|\dfrac{1}{x}\right|$

$$\left.\begin{array}{l} -\left|\dfrac{1}{x}\right| \le \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} \le \left|\dfrac{1}{x}\right| \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \le \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} \le -\dfrac{1}{x} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ άρα } \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right) = -\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}(\sigma\upsilon\nu t) = 1.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, οπότε κοντά στο $-\infty$, υπάρχει $\gamma < 0$, ώστε $f(\gamma) > 0$.

ii) Κοντά στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x} - x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x} = 0 \text{ (Κριτήριο Παρεμβολής)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}(\sigma\upsilon\nu t) = 1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, οπότε κοντά στο $+\infty$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $f(\delta) < 0$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, αφού είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma,\delta]$ και ισχύει $f(\gamma)f(\delta) < 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\gamma,\delta) \subseteq R$.

ΘΕΜΑ 12ο (19ο – 2006)

Α) Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha f(\alpha - x)dx$

Β) Αν $f(x) = \ln(1+\varepsilon\varphi x)$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

i) Να αποδειξετε ότι $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$ για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$ και $x = \dfrac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

Α) Θέτουμε $\alpha - x = u$, οπότε $du = -dx$.

Για $x = \alpha$ είναι $u = 0$ και για $x = 0$ είναι $u = \alpha$, οπότε έχουμε:

$$\int_0^{\alpha} f(\alpha\text{-}x)dx = -\int_{\alpha}^{0} f(u)du = \int_0^{\alpha} f(u)du = \int_0^{\alpha} f(x)dx$$

Β) Είναι $f(x) = \ln(1+\varepsilon\varphi x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι $0 \le x \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \ge -x \ge -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \ge \frac{\pi}{4} - x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{4} - x \le \frac{\pi}{4}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ έχουμε:

i) $$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left(1 + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1 - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + \varepsilon\varphi x + 1 - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi x}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + \varepsilon\varphi x}\right) = \ln 2 - \ln(1 + \varepsilon\varphi x)$$

Επομένως:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln(1+\varepsilon\varphi x) + \ln 2 - \ln(1+\varepsilon\varphi x) \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$$

ii) Αν E το ζητούμενο εμβαδόν, τότε έχουμε: $E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|f(x)\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\ln(1+\varepsilon\varphi x)\right| dx$

Είναι:

$$0 \le x \le \frac{\pi}{4} \overset{\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi 0 \le \varepsilon\varphi x \le \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \le \varepsilon\varphi x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 1 + \varepsilon\varphi x \le 2 \overset{\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln 1 \le \ln(1+\varepsilon\varphi x) \le \ln 2 \Leftrightarrow 0 \le \ln(1+\varepsilon\varphi x) \le \ln 2$$

Άρα $E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\varepsilon\varphi x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

Από Β (i) ερώτημα έχουμε $f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$.

Άρα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx$

Από (Α) Ερώτημα για $\alpha = \frac{\pi}{4}$ έχουμε $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

Άρα $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \ln 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}\ln 2$

Επομένως $E = \frac{\pi}{8}\ln 2$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 13ο (20ο – 2006)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(1-\dfrac{\alpha}{3}\right)x^3-x^2+(\alpha-1)^2x+2006,\ \alpha\in R$.

i) Να βρείτε τον $\alpha\in R$, αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$

ii) Για $\alpha=1$

α) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

ΛΥΣΗ

i) Αναγκαία συνθήκη είναι: $f'(1)=0$.

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=(3-\alpha)x^2-2x+(\alpha-1)^2$$

οπότε $f'(1)=(3-\alpha)-2+(\alpha-1)^2=\alpha^2-3\alpha+2=(\alpha-1)(\alpha-2)$

δηλαδή $f'(1)=0$ αν $\alpha=1$ ή $\alpha=2$.

Για $\alpha=1$ είναι $f'(x)=2x^2-2x$, οπότε έχουμε:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	

Για $\alpha=2$ είναι $f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, οπότε έχουμε:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	+	
f		↗		↗	

Δεκτή είναι η τιμή $\alpha=1$.

ii) Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2+2006$.

α) Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών βρίσκουμε:

$$f\left((-\infty,0]\right)=(-\infty,2006]$$

$$f\left([0,1]\right)=\left[\frac{6017}{3},2006\right]$$

$$f\left([1,+\infty)\right)=\left[\frac{6017}{3},+\infty\right)$$

Επομένως η f έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\xi<0$.

β) $E=\displaystyle\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^3-x^2+2006\right)dx=$

$$\left[\frac{x^4}{6}-\frac{x^3}{3}+2006x\right]_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+2006=\frac{12035}{6}$$

ΘΕΜΑ 14ο (21ο – 2006)

Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:

- **Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στο σημείο $A(1, f(1))$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.**
- **Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f''(x) - \frac{f'(x)}{x} = xe^x$.**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x - e^x - e\frac{x^2}{2} + 1$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(e^{2004}\right)$ και f(2004).

γ) Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, να αποδείξετε ότι $g(0) \le \int_0^1 g(f(x))dx \le g\left(1 - \frac{e}{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση έχουμε $f(0) = 0$ και $f'(1) = 0$. Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$\frac{xf''(x) - f'(x)}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x} = e^x + c,\ x \in (-\infty, 0) \text{ ή } x \in (0, +\infty)$$

Άρα $$f'(x) = \begin{cases} xe^x + c_1 x, & x < 0 \\ \alpha, & x = 0, \quad \alpha \in R \\ xe^x + c_2 x, & x > 0 \end{cases}$$

Έχουμε:

- f' συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot e^1 + c_2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -e$
- f' παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ άρα

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{xe^x + c_1 x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{xe^x + c_2 x - 0}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^-}(e^x + c_1) = \lim_{x \to 0^+}(e^x + c_2) \Leftrightarrow 1 + c_1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2.$$

Άρα $c_1 = c_2 = -e$ και $\alpha = 0$, οπότε $f'(x) = xe^x - ex$, $x \in R$.

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left((x-1)e^x - e\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow f(x) = (x-1)e^x - e\frac{x^2}{2} + k$$

Όμως $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 - 1 - 0 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

Άρα $f(x) = xe^x - e^x - e\frac{x^2}{2} + 1$, $x \in R$.

β) Είναι $e^{2004} > 2004$. Πράγματι $e^{2004} = \left(1+\left(e-1\right)\right)^{2004} > 1+2004(e-1) > 2004$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli.

1ος τρόπος :

Για κάθε $x \in R$ είναι $f'(x) = ex\left(e^{x-1}-1\right)$. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$1-\frac{e}{2}$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε έχουμε $1 < 2004 < e^{2004}$, άρα $f\left(2004\right) < f\left(e^{2004}\right)$.

2ος τρόπος :

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[2004, e^{2004}\right]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(2004, e^{2004}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(e^{2004}) - f(2004)}{e^{2004} - 2004} \Leftrightarrow f(e^{2004}) - f(2004) = (e^{2004} - 2004)f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f(e^{2004}) - f(2004) = \underbrace{(e^{2004} - 2004)}_{>0}\underbrace{e\xi}_{>0}\underbrace{(e^{\xi-1} - 1)}_{>0} > 0 \text{ για κάθε } \xi \in \left(2004, e^{2004}\right).$$

Άρα $f\left(e^{2004}\right) > f\left(2004\right)$.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1] και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε για κάθε $x \in \left[0,1\right]$ έχουμε:

$$0 \le x \le 1 \overset{f \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(0) \ge f(x) \ge f(1) \overset{g \text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} g\left(f(0)\right) \le g\left(f(x)\right) \le g\left(f(1)\right) \Leftrightarrow$$

$$g(0) \le g\left(f(x)\right) \le g\left(1-\frac{e}{2}\right) \text{ για κάθε } x \in \left[0,1\right].$$

Επειδή η $g \circ f$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών έχουμε:

$$\int_0^1 g(0)dx \le \int_0^1 g\left(f(x)\right)dx \le \int_0^1 g\left(1-\frac{e}{2}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$g(0)(1-0) \le \int_0^1 g\left(f(x)\right)dx \le g\left(1-\frac{e}{2}\right)(1-0) \Leftrightarrow$$

$$g(0) \le \int_0^1 g\left(f(x)\right)dx \le g\left(1-\frac{e}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 15ο (22ο – 2006)

Δίνεται συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $h'(x) \ne 0$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι

i) Η συνάρτηση h είναι «1−1»

ii) Η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

β) Αν για τη συνάρτηση h ισχύει και $h(x) + h(\lambda - x) = 0$ για κάθε $x \in R$, όπου $\lambda \in R$, να αποδείξετε ότι

i) Η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

ii) $\int_0^\lambda h(x)dx = 0$.

ΛΥΣΗ

α) i) Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$, άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi) = \dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Επειδή $h'(\xi) \neq 0$ θα είναι και $\dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0 \Leftrightarrow h(x_2) \neq h(x_1)$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $h(x_1) \neq h(x_2)$, οπότε η h είναι «1−1».

ii) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 \neq \rho_2$.

Άρα $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$. Επειδή η συνάρτηση h είναι «1−1» έχουμε $\rho_1 = \rho_2$ άτοπο.

Επομένως η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

β) i) Για $x = \dfrac{\lambda}{2}$ έχουμε:

$$h\left(\frac{\lambda}{2}\right) + h\left(\lambda - \frac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2h\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Άρα ο αριθμός $x = \dfrac{\lambda}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$ και μάλιστα μοναδική αφού η συνάρτηση h είναι «1−1».

ii) Για κάθε $x \in R$ είναι $h(x) = -h(\lambda - x)$. Οπότε έχουμε:

$$I_1 = \int_0^\lambda h(x)dx = -\int_0^\lambda h(\lambda - x)dx = -I_2 \quad (1), \text{ όπου } I_2 = \int_0^\lambda h(\lambda - x)dx.$$

Θέτουμε $u = \lambda - x$, οπότε $du = -dx$.

Για $x = 0$ είναι $u = \lambda$ και για $x = \lambda$ είναι $u = 0$.

Άρα

$$I_2 = -\int_\lambda^0 h(u)du = \int_0^\lambda h(x)dx = I_1 \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε $I_1 = -I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^\lambda h(x)dx = 0$.

ΘΕΜΑ 16ο (24ο – 2006)

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:[\alpha,\beta] \to R$, η οποία για κάθε $x \in (0, \beta - \alpha)$ ικανοποιεί τη σχέση $g(\alpha + x) = g(\beta - x)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(\alpha) = g(\beta)$

ii) **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.**

iii) $$\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x)dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x)dx$$

ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(\alpha+x) = \lim\limits_{w\to \alpha^+} g(w) = g(\alpha)$ αφού η g είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$, όπου $w=\alpha+x$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(\beta-x) = \lim\limits_{u\to \beta^-} g(u) = g(\beta)$ αφού η g είναι συνεχής στο $x_0=\beta$, όπου $u=\beta-x$.

Επομένως $g(\alpha)=g(\beta)$.

ii) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση g στο $[\alpha,\beta]$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη, που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iii) Θέτουμε $u=\beta-x$ στην αρχική σχέση η οποία γίνεται:

$$g(\alpha+\beta-u)=g(u),\ \text{για κάθε } u\in(\alpha,\beta)$$

Επιπλέον από το (i) αποδείξαμε ότι $g(\alpha)=g(\beta)$.

Επομένως:

$$g(\alpha+\beta-x)=g(x),\ \text{για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Άρα:

$$I=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(\alpha+\beta-x)dx \quad (1)$$

και θέτοντας $y=\alpha+\beta-x$, έχουμε ότι $dy=-dx$ και για $x=\alpha$ είναι $y=\beta$ ενώ για $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι $y=\frac{\alpha+\beta}{2}$

Οπότε έχουμε:

$$I=-\int_{\beta}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(y)dy=\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x)dx \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x)dx=\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x)dx$$

ΘΕΜΑ 17ο (25ο – 2006)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\lambda x+1$, $x>0$, $\lambda>0$.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Έστω Μ το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο της C_f. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του λ, τη καμπύλη στην οποία κινείται το Μ.

iii) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ, ώστε να ισχύει $\ln x\le\lambda x-1$.

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x>0$ έχουμε $f'(x)=\frac{1}{x}-\lambda$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\lambda}$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{\lambda}$

Επομένως:

x	0		$\frac{1}{\lambda}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

ii) Η C_f παρουσιάζει θέση μεγίστου στο σημείο $M\left(\frac{1}{\lambda},f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)=M\left(\frac{1}{\lambda},-\ell n\lambda\right)$

Για να βρούμε την καμπύλη στην οποία κινείται το Μ, κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου λ:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\ell n\lambda \\ x=\frac{1}{\lambda} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=-\ell n\lambda \\ \lambda=\frac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow y=-\ell n\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{y=\ell nx}$$

iii) Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\ell nx \le \lambda x-1,\quad x>0 \quad ή$$

$$\frac{\ell nx+1}{x}\le\lambda,\quad x>0$$

Αν η συνάρτηση $h(x)=\frac{\ell nx+1}{x}$ έχει ολικό μέγιστο, τότε αυτό θα ισούται με την ελάχιστη τιμή του λ για την οποία ισχύει η προηγούμενη ανισότητα.

Για κάθε $x>0$ έχουμε: $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ell nx+1)}{x^2}=-\dfrac{\ell nx}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

Επομένως $\lambda=h(1)=1$

ΘΕΜΑ 18ο (28ο – 2006)

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε:

- **Για κάθε $x>0$, $y>0$ ισχύει $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$**
- **Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1)=1$.**

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει:

$$\lim_{h\to1}\frac{f(xh)-f(x)}{xh-x}=\frac{2f(x)}{x}+x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$$

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

iv) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

v) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$\lim_{h\to 1}\frac{f(xh)-f(x)}{xh-x} = \lim_{h\to 1}\frac{x^2 f(h) + h^2 f(x) - f(x)}{x(h-1)} = \lim_{h\to 1}\left[\frac{f(x)(h^2-1)}{x(h-1)} + \frac{x^2 f(h)}{x(h-1)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 1}\left[\frac{f(x)(h+1)}{x} + x\frac{f(h)}{h-1}\right] \overset{(\alpha)}{=} \frac{2f(x)}{x} + x\cdot f'(1) = \frac{2f(x)}{x} + x$$

(α) (διότι $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = 1$)

Η ισότητα $f(1) = 0$ προκύπτει από τη δοθείσα σχέση για $x = y = 1$.

ii) Σε κάθε $x_0 > 0$ είναι $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (και αν θέσουμε $x = x_0 h$)

$$= \lim_{h\to 1}\frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} = \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0$$ (από το 1° ερώτημα)

Άρα $f'(x_0) = \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0$ για κάθε $x_0 > 0$ επομένως η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + x \Leftrightarrow xf'(x) = 2f(x) + x^2$ ή $x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$, για κάθε $x > 0$.

iii) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3 \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x} \text{ άρα } \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = (\ln x)',\ x > 0$$

Επομένως $\frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c$ και επειδή $f(1) = 0$ βρίσκουμε $c = 0$.

Άρα $f(x) = x^2 \ln x,\ x > 0$.

iv) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \ln x}{x} = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

v) Αν Ω το χωρίο που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$, τότε το εμβαδόν του είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e |x^2\ell nx|dx$$

όμως $\ell nx\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$ άρα και $x^2\ell nx\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$

Επομένως έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_1^e x^2\ell nxdx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ell nxdx=\left[\frac{x^3}{3}\ell nx\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}(\ell nx)'dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}\ell ne-\frac{1}{3}\ell n1-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\right)==\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}\text{ μονάδες εμβαδού.}$$

ΘΕΜΑ 19ο (29ο – 2006)

Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx=f^2(\alpha)-f^2(\beta)$$

i) Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right)$

iii) Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$I=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx=$$

$$=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx+\int_\alpha^\beta 2f(x)f'(x)dx-\int_\alpha^\beta 2f(x)f'(x)dx=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2+2f(x)f'(x)\right]dx-\int_\alpha^\beta\left[f^2(x)\right]'dx=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx-\left[f^2(x)\right]_\alpha^\beta=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx-f^2(\beta)+f^2(\alpha)$$

Από υπόθεση είναι $I = f^2(\alpha) - f^2(\beta)$, οπότε $\int_\alpha^\beta \left(f(x)+f'(x)\right)^2 dx = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)+f'(x_0) \neq 0$ και επειδή $\left(f(x)+f'(x)\right)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε θα είναι $\int_\alpha^\beta \left(f(x)+f'(x)\right)^2 dx > 0$, άτοπο.

Άρα $f(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ii) Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $f'(x) = -f(x)$, οπότε έχουμε

$$\int_\alpha^\beta \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_\alpha^\beta f'(x)f'(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)f'(x)dx =$$

$$= -\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right) \quad (1)$$

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx + \frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right) = f^2(\alpha)-f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta \left(f'(x)\right)^2 dx = \int_\alpha^\beta f^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right)$$

iii. Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι:

$$f'(x)+f(x)=0 \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} f'(x)\cdot e^x + f(x)\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x},\ x \in [\alpha,\beta]$$

Όμως $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, άρα $c\cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow c = e^{\alpha+\beta}$

Άρα $f(x) = e^{\alpha+\beta}\cdot e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x+\alpha+\beta}$, $x \in [\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ 20ο (30ο – 2006)

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με $\int_0^1 f(x)dx = 0$, για την οποία υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ii) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0,1] και ισχύει $f(0)=f(1)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (0,1)$ ώστε $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2) \leq 0$.

ΛΥΣΗ

i) Έστω ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [0,1].

- Αν ήταν $f(x_0)>0$ θα είχαμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $\int_0^1 f(x)dx>0$ άτοπο.
- Αν ήταν $f(x_0)<0$ θα είχαμε $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $\int_0^1 f(x)dx<0$ άτοπο.

Άρα η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [0,1] οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,1]$ τέτοια, ώστε $f(x_1)f(x_2)<0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$.

Επειδή f συνεχής στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\rho\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ ώστε $f(\rho)=0$.

ii) Έστω ότι η συνάρτηση f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (0,1) π.χ. $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο [0,1], αφού είναι παραγωγίσιμη, τότε $f'\uparrow$ στο [0,1] και επομένως f' είναι «1–1» στο [0,1].

Επειδή $f(0)=f(\rho)=f(1)=0$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα $[0,\rho]$ και $[\rho,1]$, οπότε υπάρχουν $\rho_1\in(0,\rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho_1)=0$ και $\rho_2\in(\rho,1)$ ώστε $f'(\rho_2)=0$.

Έχουμε $f'(\rho_1)=f'(\rho_2)\overset{f':1-1}{\Leftrightarrow}\rho_1=\rho_2$, άτοπο, αφού ρ_1,ρ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η συνάρτηση f'' δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (0,1), οπότε υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)f''(\xi_2)\le 0$.

ΘΕΜΑ 21ο (31ο – 2006)

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, $\alpha\ne\beta\ne0$, $f(\alpha)=\beta$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

Β) Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής και ισχύει $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt+\int_\alpha^\beta f(t)dt=0$, τότε:

i) Να βρεθεί το $f(\beta)$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon_1):x-y+2006=0$

Γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

ΛΥΣΗ

Α) Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, οπότε είναι και «1–1», άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, το σύνολο τιμών της είναι $f([\alpha,\beta])=[f(\beta),f(\alpha)]=[f(\beta),\beta]$.

Επομένως $A_{f^{-1}}=[f(\beta),\beta]$.

Β) i) Έστω $I=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt$. Θέτουμε $u=f^{-1}(t) \Leftrightarrow f(u)=t$ δηλαδή $f'(u)du=dt$.

Για $t=f(\alpha)$ έχουμε $u_1=f^{-1}\left(f(\alpha)\right)=\alpha$ και για $t=f(\beta)$ έχουμε $u_2=f^{-1}\left(f(\beta)\right)=\beta$.

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} u'f(u)du=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta} f(u)du$

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt=\beta\cdot f(\beta)-\alpha\cdot\beta-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (I).

Αλλά $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt+\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=0$ άρα από (I) έχουμε:

$$\beta f(\beta)-\alpha\beta-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0.$$

Δηλαδή $\beta\left[f(\beta)-\alpha\right]=0$, $\beta\neq 0$. Άρα $f(\beta)=\alpha$.

Β) ii) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=-1$ ή ότι η εξίσωση $f'(x)=-1 \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)'=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x)=f'(x)+1$.

Επίσης είναι:

$$\left.\begin{array}{l} g(\alpha)=f(\alpha)+\alpha=\beta+\alpha \\ g(\beta)=f(\beta)+\beta=\alpha+\beta \end{array}\right\} \text{ οπότε } g(\alpha)=g(\beta).$$

Άρα από Θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=0 \Leftrightarrow \left(f(x_0)+x_0\right)'=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=-1.$$

Γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ ως διαφορά συνεχών.

Επίσης είναι:

$h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\beta-\alpha$

$h(\beta)=f(\beta)-\beta=\alpha-\beta=-\left(\beta-\alpha\right)$.

Οπότε είναι:

$h(\alpha)h(\beta)=-\left(\beta-\alpha\right)^2<0$.

Άρα από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β), δηλαδή υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)-\xi=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

Όμως $h'(x)=f'(x)-1$ και επειδή $f'(x)<0$ είναι $h'(x)<0$. Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\alpha,\beta\right]$. Συνεπώς το $\xi\in(\alpha,\beta)$ είναι μοναδικό.

ii) Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha,\xi]$ και $[\xi,\beta]$. Άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha} \underset{\text{και δεδομένων}}{\overset{\text{Λόγω i)}}{=}} \frac{\xi-\beta}{\xi-\alpha} \ (1) \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi} \underset{\text{B i)}}{\overset{\text{Λόγω i)}}{=}} \frac{\alpha-\xi}{\beta-\xi}=\frac{\xi-\alpha}{\xi-\beta} \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\frac{\xi-\beta}{\xi-\alpha}\cdot\frac{\xi-\alpha}{\xi-\beta}=1$$

ΘΕΜΑ 22ο (32ο – 2006)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x \in R$.

Α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}x}{f(x)}$ **και ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{ημ}x}{f(x)-1}$

Β) α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν $I_\nu=\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{f(x)}dx$, $\nu=0,1,2,3,...$

i) Να βρείτε τα I_0, I_1

ii) Να αποδείξετε ότι $(2\nu+1)I_\nu=\sqrt{2}-2\nu I_{\nu-1}$, $\nu=2,3,...$ και μετά να βρείτε το I_3.

ΛΥΣΗ

Α) i) Κοντά στο $+\infty$ έχουμε:

$$\left|\frac{\text{συν}x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Άρα:

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{\text{συν}x}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$ από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}x}{f(x)}=0$.

ii) Κοντά στο 0 έχουμε:

$$g(x)=\frac{\text{ημ}x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\text{ημ}x}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\text{ημ}x}{x^2}$$

Άρα:

$$g(x)=\frac{\text{ημ}x}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x}=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x}=+\infty$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right) = -\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right) = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Β) α) Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Αν $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 με $f(0) = 1$

β) i) Είναι:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$$

Άρα $I_0 = \sqrt{2}-1$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 x^2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx =$$

$$= \left[x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(x^2\right)'\sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{1/2}dx = \sqrt{2} - \left[\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

Άρα $I_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

ii) $$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^{2\nu}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^{2\nu}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' dx =$$

$$= \left[x^{2\nu}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(x^{2\nu}\right)'\sqrt{x^2+1}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 2\nu x^{2\nu-1}\sqrt{x^2+1}dx =$$

$$= \sqrt{2} - 2\nu\int_0^1 x^{2\nu-1}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{2} - 2\nu\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu-1}}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \sqrt{2} - 2\nu\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx - 2\nu\int_0^1 \frac{x^{2(\nu-1)+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Άρα:

$$I_\nu = \sqrt{2} - 2\nu I_\nu - 2\nu I_{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$I_\nu + 2\nu I_\nu = \sqrt{2} - 2\nu I_{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$(2\nu+1)I_\nu = \sqrt{2} - 2\nu I_{\nu-1}\ ,\ \nu = 2,3,...$$

Για $\nu = 3$ έχουμε: $7I_3 = \sqrt{2} - 6I_2$ (1)

Για $\nu = 2$ έχουμε: $5I_2 = \sqrt{2} - 4I_0$

Αλλά $I_0 = \sqrt{2} - 1$

Άρα:

$$5I_2 = \sqrt{2} - 4\left(\sqrt{2}-1\right) \Leftrightarrow$$

$$5I_2 = \sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow$$

$$5I_2 = 4 - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{4-3\sqrt{2}}{5} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$7I_3 = \sqrt{2} - \frac{6\left(4-3\sqrt{2}\right)}{5} \Leftrightarrow$$

$$35I_3 = 5\sqrt{2} - 24 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$35I_3 = 23\sqrt{2} - 24 \Leftrightarrow I_3 = \frac{23\sqrt{2}-24}{35}$$