## ΘΕΜΑ 23

**Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει**

$$xf(x) - \int_1^x f(t)\,dt = xe^x - e^x + x^2 + e + 2$$

**Α) Να αποδείξετε ότι:**

**i)** **η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $x \cdot f'(x) = xe^x + 2x$**

**ii)** $f(x) = e^x + 2x + 1$

**Β) Αν $g(x) = xe^x + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.**

## ΛΥΣΗ

Α) i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^x f(t)\,dt$ και είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

Έχουμε $xf(x) - \int_1^x f(t)\,dt = xe^x - e^x + x^2 + e + 2 \quad (1)$

Για $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ η $f(x) = \dfrac{1}{x}\left[\int_1^x f(t)\,dt + xe^x - e^x + x^2 + e + 2\right]$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Από (1) έχω $\left(x \cdot f(x)\right)' - \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = \left(xe^x\right)' - \left(e^x\right)' + \left(x^2\right)' + (e+2)' \Leftrightarrow$

$f(x) + xf'(x) - f(x) = e^x + xe^x - e^x + 2x \Leftrightarrow xf'(x) = xe^x + 2x$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \cdot f'(x) = x \cdot e^x + 2x$.

Α) ii) Έχω ότι $x \cdot f'(x) = xe^x + 2x$. Για $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ είναι $f'(x) = e^x + 2 \Leftrightarrow$

$f'(x) = \left(e^x + 2x\right)'$

Άρα $f(x) = \begin{cases} e^x + 2x + c_1, & x \in (-\infty,0) \\ e^x + 2x + c_2, & x \in (0,+\infty) \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $0 \in \mathbb{R}$, επομένως:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Αλλά $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^x + 2x + c_1\right) = 1 + c_1$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x + 2x + c_2\right) = 1 + c_2$.

Άρα $1 + c_1 = 1 + c_2 = f(0) \Rightarrow c_1 = c_2 = f(0) - 1$.

Επομένως $f(x)=e^x+2x+f(0)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=1$, $f(1)=e+2+f(0)-1$ (1).

Αλλά $x\cdot f(x)-\int_1^x f(t)dt = xe^x-e^x+x^2+e+2$.

Για $x=1$ έχω:

$1\cdot f(1)-\int_1^1 f(t)dt = 1e-e+1^2+e+2 \Leftrightarrow 1\cdot f(1)=e+3$ (2).

Από (1), (2): $e+3=e+2+f(0)-1 \Rightarrow f(0)=2$

Επομένως: $f(x)=e^x+2x+1$. για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β) Αν Ε το ζητούμενο εμβαδόν

$$E=\int_0^1 \left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^1\left|e^x+2x+1-xe^x-2x-1\right|dx$$

$$E=\int_0^1\left|(1-x)e^x\right|dx=\int_0^1 e^x\left|1-x\right|dx$$

$$x\in[0,1]\Leftrightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow 1-x\ge 0$$

Άρα $E=\int_0^1 e^x(1-x)dx=\int_0^1\left(e^x\right)'(1-x)dx=$

$$=\left[e^x(1-x)\right]_0^1-\int_0^1 e^x(1-x)'dx=-e^0(1-0)+\int_0^1 e^x dx$$

$$=-1+\left[e^x\right]_0^1=-1+e-e^0=e-2$$

Άρα $E=e-2$ τ. μ.

## ΘΕΜΑ 24

**Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση** $g:[\alpha,\beta]\to R$ **τέτοια ώστε για κάθε** $x\in(0,\beta-\alpha)$ **να ισχύει:** $g(\alpha+x)=g(\beta-x)$**.**

**Να αποδείξετε ότι:**

**i.** $g(\alpha)=g(\beta)$

**ii.** **Η γραφική παράσταση της g έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη που είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.**

**iii.** $\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x)dx=\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x)dx$

## ΛΥΣΗ

Είναι

**i.** $\lim\limits_{x\to 0^+} g(\alpha+x) = \lim\limits_{w\to\alpha^+} g(w) = g(\alpha)$ αφού η g είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$, όπου w=α+x.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(\beta-x) = \lim\limits_{u\to\beta^-} g(u) = g(\beta)$ αφού η g είναι συνεχής στο $x_0=\beta$, όπου u=β-x .

Επομένως $g(\alpha)=g(\beta)$ .

**ii.** Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle για τη συνάρτηση g στο [α,β]. Επομένως υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): g'(\xi)=0$ .

**iii.** Θέτουμε u = β–x στην αρχική σχέση η οποία γίνεται:

$$g(\alpha+\beta-u)=g(u) \text{, για κάθε } u\in(\alpha,\beta)$$

Επιπλέον από το (i) αποδείξαμε ότι $g(\alpha)=g(\beta)$ .

Επομένως:

$$g(\alpha+\beta-x)=g(x) \text{, για κάθε } x\in[\alpha,\beta] .$$

Άρα:

$$I=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(\alpha+\beta-x)dx$$

και θέτοντας $y=\alpha+\beta-x$, έχουμε ότι $dy=-dx$ και για x = α είναι y = β ενώ για $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ είναι $y=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Τότε:

$$I=-\int_{\beta}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(y)dy = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x)dx .$$

## ΘΕΜΑ 25

**Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\ln x-\lambda x+1$**, x > 0, λ > 0.**

**i.** **Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**ii.** **Έστω Μ το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο της** $C_f$ **. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του λ, τη καμπύλη στην οποία κινείται το Μ.**

**iii.** **Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ, ώστε να ισχύει** $\ln x\le\lambda x-1$**.**

## ΛΥΣΗ

**i.** Έχουμε ότι:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\lambda,\ x>0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\lambda}$$

Επομένως:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\lambda}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

**ii.** Η $C_f$ παρουσιάζει θέση μεγίστου στο σημείο $M\left(\frac{1}{\lambda}, f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = M\left(\frac{1}{\lambda}, -\ell n\lambda\right)$. Για να βρούμε την καμπύλη στην οποία κινείται το Μ, κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου λ:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\ell n\lambda \\ x &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \text{ Άρα } \boxed{y = \ell nx}$$

**iii.** Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\ell nx \le \lambda x - 1,\ x > 0$$

$$\text{ή} \quad \frac{\ell nx + 1}{x} \le \lambda,\ x > 0$$

Αν η συνάρτηση $h(x) = \frac{\ell nx + 1}{x}$ έχει ολικό μέγιστο τότε αυτό θα ισούται με την ελάχιστη τιμή του λ για την οποία ισχύει η προηγούμενη ανισότητα.

Έχουμε:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ell nx + 1)}{x^2} = -\frac{\ell nx}{x^2}$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Επομένως $\lambda = h(1) = 1$

## ΘΕΜΑ 26

**Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:**

$$f(x) = 2\cdot\int_0^x t\cdot e^{-f(t)}dt \textbf{, για κάθε } x \in R.$$

**i.** **Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.**

**ii.** **Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι** $f(x) = \ell n(x^2 + 1),\ x \in R$.

**iii.** **Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.**

**iv.** **Αποδείξτε ότι:** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{2006}} = +\infty$.

## ΛΥΣΗ

**i.** Αφού η f είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση $h(t) = te^{-f(t)}$ είναι συνεχής για κάθε $t \in R$, επομένως η $F(x) = \int_0^x te^{-f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως και η $f(x) = 2\int_0^x te^{-f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη.

**ii.** Παραγωγίζοντας, προκύπτει ότι:

$$f'(x) = 2xe^{-f(x)} \quad ή \quad e^{f(x)}f'(x) = 2x \quad ή \quad \left(e^{f(x)}\right)' = \left(x^2\right)' \text{ από όπου}$$

$$e^{f(x)} = x^2 + c \quad ή \quad f(x) = \ell n(x^2 + c) \quad (1)$$

Για $x = 0$ έχουμε από την αρχική σχέση:

$$f(0) = 2\int_0^0 te^{-f(t)}dt = 0$$

Θέτοντας στην προηγούμενη σχέση (1) $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \ell nc \quad ή \quad c = 1$$

Άρα: $f(x) = \ell n(x^2 + 1),\ x \in R$

**iii.** Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \text{ οπότε}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Από το θ. Ενδιαμέσων Τιμών βρίσκουμε:

$f\left((-\infty, 0]\right) = [f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)) = [0, +\infty)$

$f\left([0, +\infty)\right) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [0, +\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$.

**iv.** Εφαρμόζοντας τον Κανόνα του L' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^{2006}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\ell n(x^2+1)}{x^{2006}} =$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2006x^{2005}} = \frac{1}{1003}\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+1}{x^{2004}} = +\infty$$

## ΘΕΜΑ 27

**Έστω μία συνεχής συνάρτηση** $f:(0,+\infty)\to R$ **για την οποία ισχύει**

$$f(x)=1+\int_{x+1}^{2x}\frac{f(t-x)}{x}dt$$ **, για κάθε x>0.**

**Να αποδείξετε ότι:**

**i. Η f είναι παραγωγίσιμη.**

**ii. Ο τύπος της f είναι :** $f(x)=\ln x+1$

**iii. Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω.**

**iv. Για κάθε τριάδα αριθμών α, β, γ με 0 < α < β < γ ισχύει:**

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

## ΛΥΣΗ

**i.** Θέτουμε $t-x=u$ άρα dt = du για t = x + 1 έχουμε u = 1 και για t = 2x έχουμε u = x, επομένως $f(x)=1+\int_1^x\frac{f(u)}{x}du$ ή $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$

Η συνάρτηση $\int_1^x f(u)du$ είναι μία παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f άρα παραγωγίσιμη. Επομένως η συνάρτηση $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

**ii.** Ισχύει: $\left(xf(x)\right)'=\left(x+\int_1^x f(u)du\right)'$ άρα

$f(x)+xf'(x)=1+f(x)$ ή $f'(x)=\frac{1}{x}$ επομένως $f(x)=\ell nx+c$ και επειδή f(1) = 1 προκύπτει c = 1. Άρα ο τύπος της f είναι $f(x)=\ell nx+1,\ x>0$.

**iii.** $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ άρα η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω.

**iv.** Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα [α,β], [β,γ] άρα θα υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$, $\xi_1\in(\beta,\gamma)$ ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

Επειδή $\xi_1<\xi_2$ και $f'\downarrow$ ισχύει $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$ επομένως $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

## ΘΕΜΑ 28

**Έστω συνάρτηση** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **τέτοια ώστε:**

- **Για κάθε x>0, y>0 ισχύει** $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$
- **Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και f΄(1) = 1.**

**i.** **Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει:**

$$\lim_{h\to1}\frac{f(xh)-f(x)}{xh-x}=\frac{2f(x)}{x}+x$$

**ii.** **Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε x > 0 ισχύει:**

$$x^2f'(x)=2xf(x)+x^3$$

**iii.** **Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει:**

$$f(x)=x^2\ln x$$

**iv.** **Να βρείτε το όριο**

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

**v.** **Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = e.**

## ΛΥΣΗ

**i.** $\lim_{h\to1}\frac{f(xh)-f(x)}{xh-x}=\lim_{h\to1}\frac{x^2f(h)+h^2f(x)-f(x)}{x(h-1)}=\lim_{h\to1}\left[\frac{f(x)(h^2-1)}{x(h-1)}+\frac{x^2f(h)}{x(h-1)}\right]$

$=\lim_{h\to1}\left[\frac{f(x)(h+1)}{x}+x\frac{f(h)}{h-1}\right]\overset{(\alpha)}{=}\frac{2f(x)}{x}+x\cdot f'(1)=\frac{2f(x)}{x}+x$

(α) (διότι $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$)

Η ισότητα f(1) = 0 προκύπτει από τη δοθείσα σχέση για x = y = 1.

**ii.** Σε κάθε $x_0>0$ είναι $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (και αν θέσουμε $x=x_0h$)

$=\lim_{h\to1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}=\frac{2f(x_0)}{x_0}+x_0$ (από το 1$^{\text{ο}}$ ερώτημα)

άρα $f'(x_0)=\frac{2f(x_0)}{x_0}+x_0$ για κάθε $x_0>0$ επομένως η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\frac{2f(x)}{x}+x\Leftrightarrow xf'(x)=2f(x)+x^2$ ή $x^2f'(x)=2xf(x)+x^3$, για κάθε $x>0$.

**iii.** $x^2f'(x)=2xf(x)+x^3\Leftrightarrow x^2f'(x)-2xf(x)=x^3$

$\Leftrightarrow\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{1}{x}$ άρα $\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=(\ell nx)'$, x > 0 επομένως $\frac{f(x)}{x^2}=\ell nx+c$ και επειδή f(1) = 0 βρίσκουμε c = 0. Άρα $f(x)=x^2\ell nx,\ x>0$.

**iv.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot \ell nx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x\ell nx)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell nx}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

**v.** Αν Ω το χωρίο που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = e τότε το εμβαδόν του είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e |x^2\ell nx|dx$$

όμως $\ell nx\ge 0$ για κάθε $x\in[1,e]$ άρα και

$x^2\ell nx\ge 0$ για κάθε $x\in[1,e]$ επομένως έχουμε

$$E(\Omega)=\int_1^e x^2\ell nx dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ell nx dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\ell nx\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}(\ell nx)'dx$$

$$=\frac{e^3}{3}\ell ne-\frac{1}{3}\ell n1-\int_1^e\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}\text{ μονάδες εμβαδού.}$$

## <u>ΘΕΜΑ 29</u>

**Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο [α,β] για την οποία ισχύει**

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\int_\alpha^\beta (f'(x))^2dx=f^2(\alpha)-f^2(\beta)$$

**i.** **Να αποδείξετε ότι** $f'(x)+f(x)=0$ **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$

**ii.** **Να αποδείξετε ότι** $\int_\alpha^\beta (f'(x))^2dx=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right)$

**iii.** **Αν** $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ **να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.**

## ΛΥΣΗ

**i.** Είναι $I=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx=$

$$=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx+\int_\alpha^\beta 2f(x)f'(x)dx-\int_\alpha^\beta 2f(x)f'(x)dx=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2+2f(x)f'(x)\right]dx-\int_\alpha^\beta\left[f^2(x)\right]'dx=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx-\left[f^2(x)\right]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx-f^2(\beta)+f^2(\alpha)$$

Από υπόθεση είναι $I=f^2(\alpha)-f^2(\beta)$, οπότε $\int_\alpha^\beta\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx=0$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)+f'(x_0)\neq 0$ και επειδή $\left(f(x)+f'(x)\right)^2\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε θα είναι $\int_\alpha^\beta\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx>0$, άτοπο.

Άρα $f(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

**ii.** Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f'(x)=-f(x)$, οπότε έχουμε

$$\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx=\int_\alpha^\beta f'(x)f'(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)f'(x)dx=$$

$$-\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right)\quad(1)$$

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right)=f^2(\alpha)-f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right)\quad(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\int_\alpha^\beta\left(f'(x)\right)^2dx=\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(f^2(\alpha)-f^2(\beta)\right)$

**iii.** Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f'(x)+f(x)=0\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}f'(x)\cdot e^x+f(x)\cdot e^x=0\Leftrightarrow$

$$\left(e^xf(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^xf(x)=c\Leftrightarrow f(x)=ce^{-x},\ x\in[\alpha,\beta]$$

Όμως $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, άρα $c\cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}=e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\Leftrightarrow c=e^{\alpha+\beta}$

Άρα $f(x)=e^{\alpha+\beta}\cdot e^{-x}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x+\alpha+\beta}$, $x\in[\alpha,\beta]$.

## ΘΕΜΑ 30

**Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0,1] με $\int_0^1 f(x)dx=0$, για την οποία υπάρχει $x_0\in[0,1]$ με $f(x_0)\neq 0$.**

**i.** **Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).**

**ii.** **Αν επιπλέον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0,1] και ισχύει f(0) = f(1) = 0, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ ώστε $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)\leq 0$.**

## <u>ΛΥΣΗ</u>

**i.** Έστω ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [0,1].

- Αν ήταν $f(x_0)>0$ θα είχαμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε $\int_0^1 f(x)dx>0$ άτοπο.
- Αν ήταν $f(x_0)<0$ θα είχαμε $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε $\int_0^1 f(x)dx<0$ άτοπο.

Άρα η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [0,1], οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,1]$ ώστε $f(x_1)f(x_2)<0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$.
Επειδή f συνεχής στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\rho\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ ώστε $f(\rho)=0$.

**ii.** Έστω ότι η $f''$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (0,1) π.χ. $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επειδή f΄ συνεχής στο [0,1] ως παραγωγίσιμη τότε $f'\uparrow$ στο [0,1] και επομένως f' 1-1 στο [0,1].
Επειδή $f(0)=f(\rho)=f(1)=0$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[0,\rho]$ και $[\rho,1]$, οπότε υπάρχει $\rho_1\in(0,\rho)$ ώστε $f'(\rho_1)=0$ και υπάρχει $\rho_2\in(\rho,1)$ ώστε $f'(\rho_2)=0$.

Έχουμε $f'(\rho_1)=f'(\rho_2)\overset{f'\,1-1}{\Leftrightarrow}\rho_1=\rho_2$, άτοπο.
Αφού $\rho_1,\rho_2$ ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα

Άρα η $f''$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (0,1), συνεπώς υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ ώστε $f''(\xi_1)f''(\xi_2)\le 0$.

## <u>ΘΕΜΑ 31</u>

**Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο, $\alpha\neq\beta\neq 0$, $f(\alpha)=\beta$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.**

**Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$**

**Β) Αν η $f^{-1}$ είναι συνεχής και ισχύει $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt+\int_\alpha^\beta f(t)dt=0$**

**i) Να βρεθεί το $f(\beta)$**

**ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon_1): x-y+2006=0$**

**Γ) Να αποδείξετε ότι i) υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.**

**ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.**

## ΛΥΣΗ

A) A) Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ άρα και '1-1', άρα η f είναι αντιστρέψιμη. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, το σύνολο τιμών της είναι $f([\alpha,\beta])=[f(\beta),f(\alpha)]=[f(\beta),\beta]$. Επομένως $A_{f^{-1}}=[f(\beta),\beta]$.

B) i) Έστω $I=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt$. Θέτουμε $u=f^{-1}(t)\Leftrightarrow f(u)=t$ δηλαδή $f'(u)du=dt$.

Για $t=f(\alpha)$ έχουμε $u_1=f^{-1}(f(\alpha))=\alpha$ και για $t=f(\beta)$ έχουμε $u_2=f^{-1}(f(\beta))=\beta$.

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}u'f(u)du=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du$

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt=\beta\cdot f(\beta)-\alpha\cdot\beta-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ (Ι). Αλλά $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt+\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt=0$ άρα

από (Ι) έχουμε $\beta f(\beta)-\alpha\beta-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$. Δηλαδή $\beta\left[f(\beta)-\alpha\right]=0$, $\beta\neq 0$. Άρα $f(\beta)=\alpha$.

B) ιι) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=-1$ ή ότι η εξίσωση $f'(x)=-1\Leftrightarrow (f(x)+x)'=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β). Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ στο [α,β]. Η g συνεχής στο [α,β] και η g παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x)=f'(x)+1$. Επίσης

$$\left.\begin{array}{l} g(\alpha)=f(\alpha)+\alpha=\beta+\alpha \\ g(\beta)=f(\beta)+\beta=\alpha+\beta \end{array}\right\} \text{Άρα } g(\alpha)=g(\beta).$$

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow (f(x_0)+x_0)'=0\Leftrightarrow f'(x_0)=-1$.

Γ) ι) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ στο [α,β]. Η h συνεχής στο [α,β] ως διαφορά συνεχών.

$h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\beta-\alpha$

$h(\beta)=f(\beta)-\beta=\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)$. Οπότε $h(\alpha)h(\beta)=-(\beta-\alpha)^2<0$. Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β), δηλαδή υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)-\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

Όμως $h'(x)=f'(x)-1$ και επειδή $f'(x)<0$ τότε $h'(x)<0$. Άρα h γνησίως φθίνουσα στο [α,β]. Συνεπώς το $\xi\in(\alpha,\beta)$ είναι μοναδικό.

ιι) Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [α,ξ] και [ξ,β]. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha} \underset{\text{και δεδομένων}}{\overset{\text{Λόγω i)}}{=}} \frac{\xi-\beta}{\xi-\alpha} \ (1) \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi} \underset{\text{B i)}}{\overset{\text{Λόγω i)}}{=}} \frac{\alpha-\xi}{\beta-\xi} = \frac{\xi-\alpha}{\xi-\beta} \ (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \dfrac{\xi-\beta}{\xi-\alpha}\cdot\dfrac{\xi-\alpha}{\xi-\beta} = 1$.

## ΘΕΜΑ 32

**Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.**

**Α) Να βρεθούν τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ και ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)-1}$**

**Β) α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.**

**β) Αν $I_\nu = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{f(x)}dx$, $\nu = 0,1,2,3,...$**

**i) Να βρεθούν τα $I_0, I_1$**

**ii) Ν' αποδειχθεί ότι $(2\nu+1)I_\nu = \sqrt{2} - 2\cdot\nu\cdot I_{\nu-1}$, $\nu = 2,3,...$ και μετά να βρεθεί το $I_3$.**

## ΛΥΣΗ

Α) i) Κοντά στο $+\infty$

Έχουμε $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Άρα $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2+1}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.

ii) Κοντά στο 0

Έχουμε $g(x) = \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \dfrac{\eta\mu x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \dfrac{\eta\mu x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}$ άρα

$g(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x} = +\infty$

έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right) = +\infty$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Β) α) Έχουμε $f'(x) = \dfrac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Έχουμε f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα το ελάχιστο της f είναι $f(0)=1$.

β) i) $I_0=\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$. Άρα $I_0=\sqrt{2}-1$

$$I_1=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 x^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=\left[x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(x^2\right)'\sqrt{x^2+1}dx$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^1\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{1/2}dx=\sqrt{2}-\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2^3}+\frac{2}{3}=\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}.\ \text{Άρα}\ I_1=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

B ii) $I_\nu=\int_0^1 \dfrac{x^{2\nu+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 x^{2\nu}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$I_\nu=\int_0^1 x^{2\nu}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=\left[x^{2\nu}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1-\int_0^1\left(x^{2\nu}\right)'\sqrt{x^2+1}dx=\sqrt{2}-\int_0^1 2\nu x^{2\nu-1}\sqrt{x^2+1}dx=$$

$$=\sqrt{2}-2\nu\int_0^1 x^{2\nu-1}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-2\nu\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu-1}}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-2\nu\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx-2\nu\int_0^1\frac{x^{2(\nu-1)+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Άρα $I_\nu=\sqrt{2}-2\nu I_\nu-2\nu I_{\nu-1}$ ή $I_\nu+2\nu I_\nu=\sqrt{2}-2\nu I_{\nu-1}$ ή

$(2\nu+1)I_\nu=\sqrt{2}-2\nu I_{\nu-1}$, $\nu=2,3,...$

Για $\nu=3$ έχω $7I_3=\sqrt{2}-6I_2$ (2)

Για $\nu=2$ έχω $5I_2=\sqrt{2}-4I_0$. Αλλά $I_0=\sqrt{2}-1$

Άρα $5I_2=\sqrt{2}-4\left(\sqrt{2}-1\right)$ ή $5I_2=\sqrt{2}-4\sqrt{2}+4$ ή $5I_2=4-3\sqrt{2}$. Άρα $I_2=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{5}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $7I_3=\sqrt{2}-\dfrac{6\left(4-3\sqrt{2}\right)}{5}$ ή $35I_3=5\sqrt{2}-24+18\sqrt{2}$ ή

$35I_3=23\sqrt{2}-24$. Άρα $I_3=\dfrac{23\sqrt{2}-24}{35}$.

## ΘΕΜΑ 33

**Α) i) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [α,β] και ισχύει** $f(x) \le g(x)$ **στο [α,β]**

**Ν' αποδειχθεί ότι:** $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$

**ii) Ν' αποδειχθεί ότι:** $\frac{1}{2e+1} \le \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \le \frac{1}{3}$

**Β) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο** $[0,+\infty)$ **με**

$f(0)=f'(0)=1$ **και για κάθε** $x \ge 0$ **ισχύει:** $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = f(x)f'(x)$

**i) Ν' αποδειχθεί ότι** $(f(x))^2 = 2e^x - 1,\quad x \ge 0$**.**

**ii) Ν' αποδειχθεί ότι η εξίσωση:** $2x - \int_0^x \frac{dt}{2+(f(t))^2} = 1$ **έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0,1).**

## ΛΥΣΗ

Α) i) Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [α,β]. Άρα η $g-f$ είναι συνεχής στο [α,β] και $g(x)-f(x) \ge 0$ στο [α,β].

Άρα $\int_\alpha^\beta (g(x)-f(x))dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta g(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{2e^t+1}$, $t \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(t) = -\frac{2e^t}{(2e^t+1)^2} < 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ διότι $e^t > 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο [0,1]. Επομένως

$0 \le t \le 1$ τότε $f(0) \ge f(t) \ge f(1)$ ή $\frac{1}{2e^0+1} \ge f(t) \ge \frac{1}{2e^1+1}$ άρα $\frac{1}{2e+1} \le \frac{1}{2e^t+1} \le \frac{1}{3}$.

Από ερώτημα Α) i) έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{2e+1}dt \le \int_0^1 \frac{1}{2e^t+1}dt \le \int_0^1 \frac{1}{3}dt$ ή

$\frac{1}{2e+1}\int_0^1 dt \le \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \le \frac{1}{3}\int_0^1 dt$ ή $\frac{1}{2e+1}[t]_0^1 \le \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \le \frac{1}{3}[t]_0^1$ ή $\frac{1}{2e+1} \le \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \le \frac{1}{3}$.

Β) i) Για κάθε $x \ge 0$ έχουμε $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = f(x)f'(x)$ ή

$(f(x))' f'(x) + f(x)(f'(x))' = f(x)f'(x)$ ή $(f(x)\cdot f'(x))' = f(x)f'(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει $h'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $h(x) = c\cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$ ή $f(x)\cdot f'(x) = ce^x$.

Για $x = 0$ έχω $f(0)\cdot f'(0) = ce^0$ ή $1\cdot 1 = c\cdot 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(x)\cdot f'(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως $\left[\dfrac{(f(x))^2}{2}\right]'=(e^x)'$. Άρα

$\dfrac{(f(x))^2}{2}=e^x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$, $\dfrac{(f(0))^2}{2}=e^0+c_1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=-\dfrac{1}{2}$. Άρα $\dfrac{(f(x))^2}{2}=e^x-\dfrac{1}{2}$ ή

$(f(x))^2=2e^x-1,\ x\geq 0$.

Β) ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x)=2x-\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2+(f(t))^2}-1,\ x\in[0,1]$. Αλλά

$(f(t))^2=2e^t-1$. Επομένως $\kappa(x)=2x-\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2e^t+1}-1$.

Έχουμε η κ συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών,

$\kappa(0)=2\cdot 0-\displaystyle\int_0^0 \frac{dt}{2e^t+1}-1$ άρα $\kappa(0)=-1<0$

$\kappa(1)=2\cdot 1-\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1}-1$ άρα $\kappa(1)=1-\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1}$.

Αλλά ισχύει $\dfrac{1}{2e+1}\leq\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1}\leq\frac{1}{3}$, οπότε $\kappa(1)>0$ και συνεπώς $\kappa(0)\kappa(1)<0$. Άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση

$\kappa(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2t(f(t))^2}-1=0 \Leftrightarrow 2x-\int_0^x \frac{dt}{2t(f(t))^2}=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Αλλά $\kappa'(x)=(2x)'-\left(\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2e^t+1}\right)'$ ή $\kappa'(x)=2-\dfrac{1}{2e^x+1}$, άρα $\kappa'(x)=\dfrac{4e^x+1}{2e^x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς η κ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [0,1].
Επομένως η εξίσωση $\kappa(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0,1). Δηλαδή η εξίσωση

$2x-\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2+(f(t))^2}=1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0,1) .