ΘΕΜΑ 12

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x\in[1,e]$ **αντιστρέφεται και να ορίσετε την** f^{-1}.

β) $\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx+\int_0^1 e^{x^2}dx=e$.

Β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$. **Να αποδείξετε ότι:**

α) $h(x)\ge e^x-e$, **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$.

β) $\int_0^1 h(x)dx=\frac{1-e}{2}$.

ΛΥΣΗ

Α) α) Για κάθε $x\in(1,e)$ είναι $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [1,e] συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1,e], άρα είναι και “1-1”, οπότε αντιστρέφεται. Το σύνολο τιμών της f είναι f([1,e])=[f(1),f(e)]=[0,1]. Είναι y=f(x) και με $1\le x\le e$, $0\le y\le 1$ έχουμε $y=\sqrt{\ln x}\Leftrightarrow \ln x=y^2\Leftrightarrow x=e^{y^2}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^{y^2}$.

Άρα $f^{-1}:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=e^{x^2}$ με $f^{-1}([0,1])=[1,e]$.

β) Αν $I=\int_1^e\sqrt{\ln x}\,dx$ και θέσουμε $\sqrt{\ln x}=u$ τότε έχουμε $x=e^{u^2}$, οπότε $dx=(e^{u^2})'du\Leftrightarrow dx=2ue^{u^2}du$.

Για x=1 είναι $u=\sqrt{\ln 1}=0$ και για x=e είναι $u=\sqrt{\ln e}=1$.

Έχουμε $I=\int_0^1 u2ue^{u^2}du=\int_0^1 u(e^{u^2})'du=[ue^{u^2}]_0^1-\int_0^1 u'e^{u^2}du=e-\int_0^1 e^{u^2}du=e-\int_0^1 e^{x^2}dx$,

οπότε $\int_1^e\sqrt{\ln x}\,dx+\int_0^1 e^{x^2}dx=e-\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{x^2}dx$ =e.

Β) α) Θεωρούμε τη συνάρτηση φ(x)=h(x)-$e^x+e=\int_1^x e^{t^2}dt-e^x+e$, $x\in\mathbb{R}$. Η e^{t^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0\in\mathbb{R}$, άρα η $\int_1^x e^{t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(\int_1^x e^{t^2}dt)'=e^{x^2}$. Άρα η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι φ′(x)=$e^{x^2}-e^x$. Είναι

$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}-e^x=0\Leftrightarrow e^{x^2}=e^x\Leftrightarrow x^2=x\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

$\varphi'(x)>0\Leftrightarrow e^{x^2}-e^x>0\Leftrightarrow e^{x^2}>e^x\Leftrightarrow x^2>x\Leftrightarrow x(x-1)>0\Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$.

Ο πίνακας μεταβολών της φ είναι

x	-∞		**0**		**1**		+∞
φ′(x)		+	**0**	**-**	**0**	+	-∞
φ(x)		↗	φ(0)	↘	**0**	↗	

αφού $\varphi(1)=\int_1^1 e^{t^2}dt-e+e=0$.

Στο διάστημα $[0,+\infty)$ η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $\varphi(1)=0$. Άρα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι $\varphi(x)\geq\varphi(1)\Leftrightarrow h(x)\text{-}e^x+e\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq e^x\text{-}e$.

β) Είναι

$$\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 (x)'h(x)dx=[xh(x)]_0^1-\int_0^1 xh'(x)dx=h(1)-\int_0^1 xe^{x^2}dx=0-\frac{1}{2}\int_0^1 (e^{x^2})'dx=$$

$$=-\frac{1}{2}[e^{x^2}]_0^1=-\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1-e}{2}.$$

ΘΕΜΑ 13

Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $(0,\ +\infty)$, με f(x)>0 για κάθε x>0, f(1)=1, f(2)=3 και $\int_1^2 f(xt)dt\geq\int_1^2 f(x)dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)du\geq\int_1^2 f(x)dx$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=2.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $I=\int_1^2 f(xt)dt$.

Θέτουμε xt=u άρα $xdt=du\overset{x>0}{\Leftrightarrow}dt=\frac{1}{x}du$.

- Για t=1 είναι u=x.
- Για t=2 είναι u=2x.

Είναι $I=\int_x^{2x} f(u)\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)du$ άρα η δοθείσα σχέση γίνεται: $\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)du\geq\int_1^2 f(x)dx$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)du-\int_1^2 f(x)dx$, x>0.

- Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)du\geq\int_1^2 f(x)dx\Leftrightarrow\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(u)du-\int_1^2 f(t)dt\geq 0\Leftrightarrow$

$h(x)\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq h(1)$ άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της.

- Η $h(x)=\frac{1}{x}\int_1^{2x} f(u)du-\frac{1}{x}\int_1^{x} f(u)du-\int_1^{2} f(x)dx$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_1^{2x} f(u)du+\frac{1}{x}f(2x)\cdot(2x)'+\frac{1}{x^2}\int_1^{x} f(u)du-\frac{1}{x}f(x)-0\Leftrightarrow$$

$$h'(x)=\frac{1}{x^2}\left(\int_1^{x} f(u)du-\int_1^{2x} f(u)du\right)+\frac{2}{x}f(2x)-\frac{1}{x}f(x).$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=1$ με $h'(1)=-\int_1^2 f(u)du+2f(2)-f(1)$. Ισχύει λοιπόν το Θ.Fermat.

Επομένως $h'(1)=0\Leftrightarrow-\int_1^2 f(u)du+2f(2)-f(1)=0\Leftrightarrow\int_1^2 f(u)du=2\cdot f(2)-f(1)\Leftrightarrow$

$\int_1^2 f(u)du=2\cdot3-1\Leftrightarrow\int_1^2 f(u)du=5$τ.μ.

ΘΕΜΑ 14

α) **Να αποδείξετε ότι** $e^x-\eta\mu x\geq x+1-\eta\mu x\geq x$ **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$**.**

β) **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x},\ x\geq0$**. Να βρείτε:**

i) Την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

ii) Τους αριθμούς α, β ώστε $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=\alpha(e^x-\eta\mu x)+\beta(e^x-\eta\mu x)'$ **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$**.**

iii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και $x=\frac{\pi}{4}$**.**

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $1-\eta\mu x\geq0$ άρα και $x+1-\eta\mu x\geq x$. Επίσης θέλουμε να δείξουμε ότι $e^x-\eta\mu x\geq x+1-\eta\mu x$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $e^x\geq x+1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x-x-1,\ x\in[0,+\infty)$. Είναι $h'(x)=e^x-1$. Η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, $h'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε για $x\geq0$ είναι $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow e^x-x-1\geq0\Leftrightarrow e^x\geq x+1$.

β) i) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}$. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$|f(x)|=\left|\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}\right|=\frac{|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|}{|e^x-\eta\mu x|}$ αλλά

$\frac{|\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x|}{|e^x-\eta\mu x|}\leq\frac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|e^x-\eta\mu x|}\leq\frac{1+1}{|e^x-\eta\mu x|}=\frac{2}{|e^x-\eta\mu x|}=\frac{2}{e^x-\eta\mu x}\leq\frac{2}{x}$ λόγω και του α) υποερωτήματος. Οπότε, $-\frac{2}{x}\leq f(x)\leq\frac{2}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{2}{x})=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, επομένως η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Έχουμε $ημx\text{-}συνx=α(e^x-ημx)+β(e^x-ημx)'$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

$ημx\text{-}συνx=α(e^x-ημx)+β(e^x-συνx)\Leftrightarrow(α+β)e^x-(α+1)ημx\text{-}(β\text{-}1)συνx=0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Για x=0 έχουμε $(α+β)e^0-(α+1)ημ0\text{-}(β\text{-}1)συν0=0\Leftrightarrow α+β-β+1=0\Leftrightarrow α=-1$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$(α+β)e^{\frac{\pi}{2}}-(α+1)ημ\frac{\pi}{2}\text{-}(β\text{-}1)συν\frac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow(α+β)e^{\frac{\pi}{2}}=0\Leftrightarrow α+β=0\Leftrightarrow β=1.$$

Επαληθεύουμε ότι $ημx\text{-}συνx=-(e^x-ημx)+(e^x-ημx)'$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

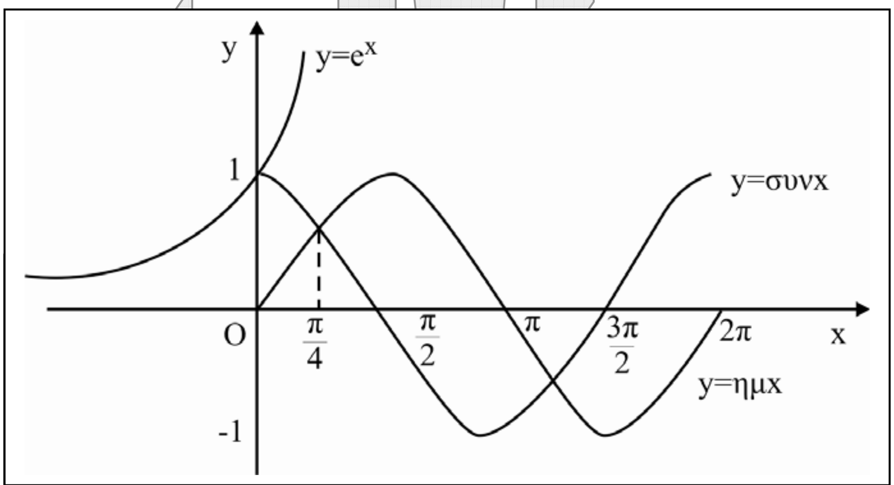
iii)

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\frac{ημx\text{-}συνx}{e^x-ημx}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{ημx\text{-}συνx}{e^x-ημx}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\frac{-(e^x-ημx)}{e^x-ημx}+\frac{(e^x-ημx)'}{e^x-ημx}]dx=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}[-1+\frac{(e^x-ημx)'}{e^x-ημx}]dx=\frac{\pi}{4}-[\ln(e^x-ημx)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\ln(e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

<u>Σημείωση</u>

Για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ είναι $ημx\le συνx\Leftrightarrow ημx\text{-}συνx\le 0$ επομένως $e^x-ημx>0$.



ΘΕΜΑ 15

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x)\neq 0$ και $\int_1^x e^t f(t)dt \geq x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=\frac{1}{e}$.

β) $f(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

γ) Η εξίσωση f(x)=x έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

δ) Από τους μιγαδικούς αριθμούς z που ικανοποιούν την ισότητα $\left|z-2e\cdot f(1)+i\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ να βρείτε εκείνον που έχει το μεγαλύτερο και εκείνον που έχει το μικρότερο μέτρο.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_1^x e^t f(t)dt-x+1$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$\int_1^x e^t f(t)dt \geq x-1 \Leftrightarrow \int_1^x e^t f(t)dt-x+1\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq g(1)$.

Δείξαμε ότι $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της ελάχιστο.

Η $e^t f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $1\in\mathbb{R}$ άρα η $\int_1^x e^t f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η –x+1 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $g'(x)=(\int_1^x e^t f(t)dt-x+1)'\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(x)=e^x f(x)-1$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=1$ με
$g'(1)=e^1 f(1)-1\Leftrightarrow g'(1)=ef(1)-1$.

Ισχύει λοιπόν το Θ.Fermat, οπότε $g'(1)=0\Leftrightarrow e^1 f(1)-1=0\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{e}$.

β) Από υπόθεση η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ψ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(1)=\frac{1}{e}>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in[0,1]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών
- $h(0)\cdot h(1)=[f(0)-0]\cdot[f(1)-1]=f(0)\cdot[f(1)-1]=f(0)\cdot(\frac{1}{e}-1)<0$ αφού f(0)>0 και $\frac{1}{e}-1<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θ.Bolzano άρα η $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

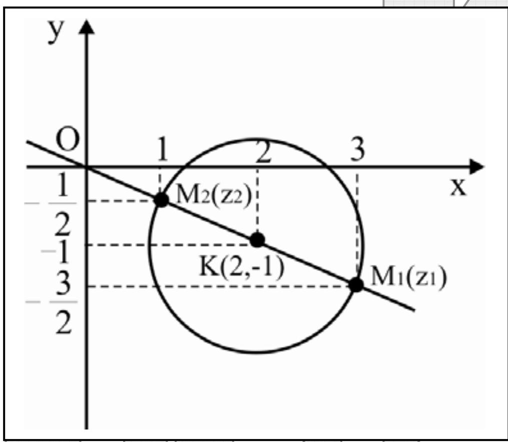
δ) Έχουμε

$$|z-2e\cdot f(1)+i|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\left|z-2e\cdot\frac{1}{e}+i\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow|z-2+i|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow|z-(2-i)|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(2,-1) και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{5}}{2}$ που έχει εξίσωση $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$.

Βρίσκουμε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Ο(0,0) και Κ(2,-1). Είναι $\lambda_\varepsilon=\frac{y_K-y_O}{x_K-x_O}=\frac{-1-0}{2-0}=-\frac{1}{2}$ άρα ε: $y=\lambda_\varepsilon\cdot x\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot x$. Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases}\varepsilon: y=-\frac{1}{2}\cdot x\\ c: (x-2)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}\end{cases}.$$



Είναι $(x-2)^2+(-\frac{1}{2}x+1)^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow(x-2)^2+(\frac{2-x}{2})^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow(x-2)^2+\frac{(2-x)^2}{4}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{5}{4}(x-2)^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow(x-2)^2=1\Leftrightarrow x-2=\pm1\Leftrightarrow x=3$ ή $x=1$.

Για $x=3$ έχουμε $y=-\frac{3}{2}$ και για $x=1$ έχουμε $y=-\frac{1}{2}$.

Επομένως ο μιγαδικός που έχει το μεγαλύτερο μέτρο είναι ο $z_1=3-\frac{3}{2}i$ με

$|z_1|=\sqrt{3^2+(-\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ και ο μιγαδικός που έχει το μικρότερο μέτρο είναι ο $z_2=1-\frac{1}{2}i$ με $|z_2|=\sqrt{1^2+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}}+2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ **για τις διάφορες τιμές του** $\alpha\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2\right)' = [(1+x^{2006})^{-\frac{1}{2}} + 2]' = -\frac{1}{2}(1+x^{2006})^{-\frac{3}{2}} \cdot (1+x^{2006})' =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+x^{2006})^3}} \cdot 2006x^{2005} = -\frac{1003x^{2005}}{(1+x^{2006})\sqrt{1+x^{2006}}}.$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$, οπότε έχουμε

x	-∞	**0**	+∞
f'	+	**0**	-
f	↗	**3** **ΜΕΓ**	↘

- Είναι f συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, οπότε η είναι f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Είναι f συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$, οπότε η είναι f γνησίως φθίνουσα $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0 = 0$ με μέγιστη τιμή $f(0) = 3$.

β) Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2\right) = 2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2\right) = 2$.

Είναι $f(\mathbb{R}) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)] \cup (\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)] = (2, 3]$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \in (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη, αφού $\alpha \notin f(\mathbb{R})$.
- Αν $\alpha = 3$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία ακριβώς ρίζα την $x = 0$.
- Αν $\alpha \in (2, 3)$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει 2 ακριβώς ρίζες, μία εκ των οποίων είναι αρνητική και μία θετική.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, x+1]$ με x>0, οπότε για $x \le t \le x+1$ ισχύει $f(x) \ge f(t) \ge f(x+1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_x^{x+1} f(x)dt \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge \int_x^{x+1} f(x+1)dt \Leftrightarrow f(x)\int_x^{x+1} dt \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge f(x+1)\int_x^{x+1} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)(x+1-x) \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge f(x+1)(x+1-x) \Leftrightarrow f(x) \ge \int_x^{x+1} f(t)dt \ge f(x+1), x > 0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = 2$ (θέτοντας x+1=u έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = 2$) οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 2$.

ΘΕΜΑ 17

Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(2005)=\frac{1}{2}$, f(2007)=3 και f(1) f(2)=f(3) f(4) να αποδείξετε ότι

α) υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε f(ξ)=1

β) υπάρχει $x_0\in[1,2]$ ώστε $f^2(x_0)=f(1)f(2)$

γ) η f δεν αντιστρέφεται.

ΛΥΣΗ

α) ▸ Η f είναι συνεχής στο [2005,2007]

▸ $\frac{1}{2}=f(2005)\neq f(2007)=3$

▸ Ο αριθμός 1 είναι μεταξύ των f(2005) και f(2007) άρα ισχύει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(2005,2007)\subseteq\mathbb{R}$ ώστε f(ξ)=1.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-f(1)f(2),\ x\in[1,2]$.

▸ Η g είναι συνεχής στο [1,2]

▸ $g(1)g(2)=[f^2(1)-f(1)f(2)][f^2(2)-f(1)f(2)]=-\underbrace{f(1)f(2)}_{<0}\cdot\underbrace{[f(1)-f(2)]^2}_{\geq 0}\leq 0$ γιατί η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε $f(1)f(2)>0\Leftrightarrow -f(1)f(2)<0$. Επίσης είναι $[f(1)-f(2)]^2\geq 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

i) αν $g(1)g(2)=0$ τότε $g(1)=0$ ή $g(2)=0$.

ii) αν $g(1)g(2)<0$ τότε ισχύει θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ έτσι ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)-f(1)f(2)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)=f(1)f(2)$ (2).

Επομένως υπάρχει $x_0\in[1,2]$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)=f(1)f(2)$.

γ) Επειδή f(1) f(2)=f(3) f(4) η συνάρτηση g γράφεται $g(x)=f^2(x)-f(3)f(4),\ x\in\mathbb{R}$.

▸ Η g είναι συνεχής στο [3,4].

▸ $g(3)g(4)=[f^2(3)-f(1)f(2)][f^2(4)-f(1)f(2)]=-\underbrace{f(3)f(4)}_{<0}\cdot\underbrace{[f(3)-f(4)]^2}_{\geq 0}\leq 0$. Άρα θα υπάρχει $x_1\in[3,4]$ έτσι ώστε $g(x_1)=0\Leftrightarrow f^2(x_1)-f(3)f(4)=0\Leftrightarrow f^2(x_1)=f(3)f(4)$ (3).

Από τις (2) και (3) έχω $f^2(x_0)=f^2(x_1)$ και επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ είναι $f(x_0)=f(x_1)$ οπότε η f δεν είναι “1-1” και επομένως δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 18

Αν f συνεχής στο 0, $f(0)=2006$ **και ισχύει** $xf(x)+x^4\text{συν}\frac{1}{x}=\text{ημ}(\alpha x)$**,** $\alpha\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}^*$

Α) **ι) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο** $\mathbb{R}$

ιι) Να βρείτε το α.

Β) **ι) Να βρείτε τα όρια** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **και** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ιι) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο** $\mathbb{R}$**.**

ΛΥΣΗ

Α) ι) Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}-x^3\text{συν}\frac{1}{x}$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις συνεχών και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ιι) Κοντά στο $x_0=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}-x^3\text{συν}\frac{1}{x}\right]=\alpha .$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}(x^3\text{συν}\frac{1}{x})=0$, γιατί για κάθε $x\neq0$ έχουμε $\left|x^3\text{συν}\frac{1}{x}\right|\le\left|x^3\right|$ ή

$$\left.\begin{array}{l} -\left|x^3\right|\le x^3\text{συν}\frac{1}{x}\le\left|x^3\right| \\ \lim\limits_{x\to0}\left|x^3\right|=\lim\limits_{x\to0}\left[-\left|x^3\right|\right]=0 \end{array}\right\}\ \text{άρα}\ \lim_{x\to0}(x^3\text{συν}\frac{1}{x})=0 .$$

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}[\alpha\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{\alpha x}]=\alpha\cdot1=\alpha$.

Άρα $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\alpha \Leftrightarrow$ f(0)=α $\Leftrightarrow$ α=2006 , γιατί f συνεχής στο 0.

ι) Κοντά στο $-\infty$ έχουμε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}=0$ (κριτήριο παρεμβολής)

Πράγματι $\left|\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|$

$$\left.\begin{array}{l} -\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{x}\le\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}\le-\frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0 \end{array}\right\}\ \text{άρα}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\text{ημ}(\alpha x)}{x}=0$$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\text{συν}\frac{1}{x}\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to0}(\text{συν}t)=1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, οπότε κοντά στο $-\infty$, υπάρχει γ<0, ώστε $f(\gamma)>0$.

ιι) Κοντά στο $+\infty$ έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x}=0$ (κριτήριο παρεμβολής) και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x})=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}=1$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, οπότε κοντά στο $+\infty$, υπάρχει δ>0, ώστε $f(\delta)<0$.

Έχουμε f συνεχής στο [γ,δ] και $f(\gamma)f(\delta)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\gamma,\delta)\subseteq\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 19

Α) Αν f συνεχής στο [0,α] να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx$

Β) Αν $f(x)=\ln(1+\varepsilon\varphi x)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

ι) Να αποδειξετε ότι $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$ **για κάθε** $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

ιι) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=0$, $x=0$ **και** $x=\dfrac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

Α) Θέτουμε $\alpha-x=u$, οπότε du=-dx.
Για $x=\alpha$ είναι $u=0$ και για $x=0$ είναι $u=\alpha$ άρα

$$\int_0^\alpha f(\alpha\text{-}x)dx=-\int_\alpha^0 f(u)du=\int_0^\alpha f(u)du=\int_0^\alpha f(x)dx$$

Β) Είναι $f(x)=\ln(1+\varepsilon\varphi x)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Για $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ είναι $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0\ge -x\ge-\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{4}\ge\dfrac{\pi}{4}-x\ge0\Leftrightarrow 0\le\dfrac{\pi}{4}-x\le\dfrac{\pi}{4}$. ι) ι)

ι) Επειδή f συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left(1+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln\left(1+\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi x}\right)=\ln\left(1+\frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1+\varepsilon\varphi x+1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}\right)=\ln\left(\frac{2}{1+\varepsilon\varphi x}\right)=\ln2-\ln(1+\varepsilon\varphi x)$$

Άρα $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\ln(1+\varepsilon\varphi x)+\ln2-\ln(1+\varepsilon\varphi x)$ ή

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$$

Β ιι) Αν Ε το ζητούμενο εμβαδόν, τότε έχουμε

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|f(x)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\ln(1+\varepsilon\varphi x)\right|dx$$

Αλλά $0\le x\le\frac{\pi}{4}\overset{\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi 0\le\varepsilon\varphi x\le\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0\le\varepsilon\varphi x\le 1\Leftrightarrow 1\le 1+\varepsilon\varphi x\le 2\overset{\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}$
$\ln 1\le\ln(1+\varepsilon\varphi x)\le\ln 2\Leftrightarrow 0\le\ln(1+\varepsilon\varphi x)\le\ln 2$

Άρα $E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\varepsilon\varphi x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$

Από Β ι) ερώτημα έχω:

$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$. Άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx$$

Από Α) Ερώτημα για α=$\frac{\pi}{4}$ έχουμε $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$

Άρα $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\ln 2\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\ln 2$. Επομένως $E=\frac{\pi}{8}\ln 2$ τ. μ.

ΘΕΜΑ 20

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(1-\frac{\alpha}{3})x^3-x^2+(\alpha-1)^2x+2006,\ \alpha\in\mathbb{R}$ **.**

i) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$

ii) Για α=1

α) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=0.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1.

ΛΥΣΗ

ii) Αναγκαία συνθήκη είναι: $f'(1)=0$.

Έχουμε ότι: $f'(x)=(3-\alpha)x^2-2x+(\alpha-1)^2$ οπότε

$f'(1)=(3-\alpha)-2+(\alpha-1)^2=\alpha^2-3\alpha+2=(\alpha-1)(\alpha-2)$ δηλαδή $f'(1)=0$ αν α=1 ή α=2.

Για α=1 είναι $f'(x) = 2x^2 - 2x$ και έχουμε

x	$-\infty$		**0**		**1**		$+\infty$
f'		+	**0**	**-**	**0**	+	
f		↗	**τ.μ**	↘	**τ.ε**	↗	

Για α=2 είναι $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ οπότε

x	$-\infty$		**1**		$+\infty$
f'		+	**0**	+	
f		↗		↗	

Δεκτή είναι η τιμή α=1.

iii) Για α=1 έχουμε $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2006$.

α) Από το θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών βρίσκουμε:

$f((-\infty,0]) = (-\infty,2006]$

$f([0,1]) = [\frac{6017}{3},2006]$

$f([1,+\infty)) = [\ \frac{6017}{3},+\infty)$

επομένως η f έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\xi < 0$.

β) $E = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 (\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2006)dx =$

$[\frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{3} + 2006x]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + 2006 = \frac{12035}{6}$

ΘΕΜΑ 21

Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στο σημείο $A(1,f(1))$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.**
- **Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f''(x) - \frac{f'(x)}{x} = xe^x$.**

α) **Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x - e^x - e\frac{x^2}{2} + 1$.**

β) **Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(e^{2004})$ και f(2004).**

γ) **Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι** $g(0) \le \int_0^1 g(f(x)) \le g(1-\frac{e}{2})$.

ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση έχουμε f(0)=0 και $f'(1)=0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι

$$\frac{xf''(x)-f'(x)}{x^2}=e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x}\right)'=(e^x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x}=e^x+c,\ x\in(-\infty,0) \text{ ή } x\in(0,+\infty)$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases} xe^x+c_1x, & x<0 \\ \alpha, & x=0, \quad \alpha\in\mathbb{R}>0. \\ xe^x+c_2x, & x>0 \end{cases}$

Έχουμε

- f' συνεχής στο $x_0=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow \alpha=0$
- $f'(1)=0 \Leftrightarrow 1\cdot e^1+c_2\cdot 1=0 \Leftrightarrow c_2=-e$
- f' παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{xe^x+c_1x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x+c_2x-0}{x-0}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}(e^x+c_1)=\lim_{x\to 0^+}(e^x+c_2)\Leftrightarrow 1+c_1=1+c_2\Leftrightarrow c_1=c_2.$$

Άρα $c_1=c_2=-e$ και α=0, οπότε $f'(x)=xe^x-ex$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)=\int(xe^x-ex)dx=\int xe^x dx-\int exdx=\int x(e^x)'dx-e\int xdx=$

$$=xe^x-\int(x)'e^x dx-e\int xdx=xe^x-\int e^x dx-e\int xdx=xe^x-e^x-e\frac{x^2}{2}+k$$

Όμως $f(0)=0 \Leftrightarrow 0-1-0+k=0\Leftrightarrow k=1$.

Άρα $f(x)=xe^x-e^x-e\dfrac{x^2}{2}+1,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $e^{2004}>2004$. Πράγματι $e^{2004}=\left(1+\left(e-1\right)\right)^{2004}>1+2004(e-1)>2004$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli.

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u> :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=ex\left(e^{x-1}-1\right)$. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$		**0**		**1**		$+\infty$
$f'(x)$		+	**0**	-	**0**	+	
$f(x)$		↗	**0**	↘	$1-\frac{e}{2}$	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε έχουμε $1<2004<e^{2004}$ άρα $f\left(2004\right)<f\left(e^{2004}\right)$.

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u> :

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[2004,e^{2004}\right]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(2004,e^{2004}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(e^{2004})-f(2004)}{e^{2004}-2004}\Leftrightarrow f(e^{2004})-f(2004)=(e^{2004}-2004)f'(\xi)\Leftrightarrow$$

$f(e^{2004})-f(2004)=\underbrace{(e^{2004}-2004)}_{>0}\underbrace{e\xi}_{>0}\underbrace{(e^{\xi-1}-1)}_{>0}>0$ για κάθε $\xi\in\left(2004,e^{2004}\right)$.

Άρα $f\left(e^{2004}\right)>f\left(2004\right)$.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1] και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\left[0,1\right]$ έχουμε

$$0\le x\le 1 \overset{f\ \text{γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(0)\ge f(x)\ge f(1) \overset{g\ \text{γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} g\left(f(0)\right)\le g\left(f(x)\right)\le g\left(f(1)\right)\Leftrightarrow$$

$g\left(0\right)\le g\left(f(x)\right)\le g\left(1-\frac{e}{2}\right)$ για κάθε $x\in\left[0,1\right]$. Επειδή η $g\circ f$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών έχουμε $\int_0^1 g(0)dx\le\int_0^1 g\left(f(x)\right)dx\le\int_0^1 g\left(1-\frac{e}{2}\right)dx\Leftrightarrow$

$$g(0)(1-0)\le\int_0^1 g\left(f(x)\right)dx\le g\left(1-\frac{e}{2}\right)(1-0)\Leftrightarrow g(0)\le\int_0^1 g\left(f(x)\right)dx\le g\left(1-\frac{e}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 22

Α) Δίνεται συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $h'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι

i) Η συνάρτηση h είναι '1-1'

ii) Η εξίσωση h(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα.

β) Αν για τη συνάρτηση h ισχύει και h(x) +h(λ-x)=0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

i) Η εξίσωση h(x)=0 έχει μοναδική ρίζα.

ii) $\int_0^\lambda h(x)dx=0$.

Β) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\neq xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=\int_0^x f(x\text{-}t)dt$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\int_0^x f(x\text{-}t)dt$ **και** $\kappa(x)=xe^x-e^x+1$ **έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.**

ΛΥΣΗ

Α) α) i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και έστω $x_1 < x_2$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = \dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Επειδή $h'(\xi) \neq 0$ θα είναι και $\dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0 \Leftrightarrow h(x_2) \neq h(x_1)$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $h(x_1) \neq h(x_2)$, οπότε η h είναι '1-1'.

ii) Έστω ότι η εξίσωση h(x)=0 έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 \neq \rho_2$. Άρα $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$. Επειδή η h είναι '1-1' έχουμε $\rho_1 = \rho_2$ άτοπο. Άρα η εξίσωση h(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα.

β) i) Για $x=\dfrac{\lambda}{2}$ έχουμε $h\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) + h\left(\lambda - \dfrac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2h\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) = 0$. Άρα $x=\dfrac{\lambda}{2}$ ρίζα της εξίσωσης h(x)=0 και μάλιστα μοναδική αφού η h είναι '1-1'.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι h(x)=-h(λ-x). Οπότε έχουμε:

$$I_1 = \int_0^{\lambda} h(x)dx = -\int_0^{\lambda} h(\lambda - x)dx = -I_2 \quad (1), \text{ όπου } I_2 = \int_0^{\lambda} h(\lambda\text{-}x)dx.$$

Θέτουμε u=λ-x, οπότε du=-dx.
Για x=0 είναι u=λ και για x=λ είναι u=0. Άρα

$$I_2 = -\int_{\lambda}^{0} h(u)du = \int_0^{\lambda} h(x)dx = I_1 \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε $I_1 = -I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\lambda} h(x)dx = 0$.

Β) α) Η συνάρτηση f(x-t) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών, οπότε η συνάρτηση $g(x) = \int_0^{x} f(x\text{-}t)dt$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε u=x-t οπότε du=-dt.
Για t=0 είναι u=x και για t=x είναι u=0.

Άρα $g(x) = -\int_x^{0} f(u)du = \int_0^{x} f(t)dt$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Τα κοινά σημεία των C_g, C_κ έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος

$$(\Sigma): \begin{cases} y = g(x) \\ y = \kappa(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) - \kappa(x) = 0 \\ y = g(x) \end{cases}.$$

Το σύστημα (Σ) έχει μία μόνο λύση, αν και μόνο αν η εξίσωση $g(x) - \kappa(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα. Όμως $g(x) - \kappa(x) = \int_0^{x} f(t)dt - xe^x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - \kappa(x)$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε $h(x) = \int_0^x f(t)dt - xe^x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = f(x) - e^x - xe^x + e^x \Leftrightarrow h'(x) = f(x) - xe^x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού από υπόθεση $f(x) \neq xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από Α)α)ii) έχουμε ότι η εξίσωση h(x)=0 έχει το πολύ μία ρίζα. Παρατηρούμε όμως ότι $h(0) = \int_0^0 f(t)dt - 0e^0 + e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Επομένως το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης h(x)=0 που σημαίνει ότι οι C_g, C_κ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το Ο(0,g(0)) δηλαδή το Ο(0,0).