ΘΕΜΑ 1

Έστω $f(z)=|z|-i\bar{z}$**,** $z\in\mathbb{C}$**.**

α) **Να λύσετε την εξίσωση :** $f(z)=2-i$**.**

β) **Αν** $|f(|z|)|=\sqrt{2}$ **να βρείτε το** $|z|$**.**

γ) **Αν** $|z|=1$ **να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w=f(z) είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.**

ΛΥΣΗ

α) $f(z)=2-i \Leftrightarrow |z|-i\bar{z}=2-i$.

Αν $z=x+yi$ τότε $\sqrt{x^2+y^2}-i(x-yi)=2-i \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+y^2}-y)-xi=2-i \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{x^2+y^2}-y=2\\ x=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\sqrt{1+y^2}=y+2\\ x=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}1+y^2=y^2+4y+4,\, y\geq -2\\ x=1\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{4}.\\ x=1\end{cases} \quad \text{Άρα } z=1-\frac{3}{4}i.$$

β) $f(|z|)=|z|-i\overline{|z|}=|z|-i|z|=(1-i)|z|$

οπότε $|f(|z|)|=|1-i||z|=\sqrt{2}|z|$.

Άρα $\sqrt{2}|z|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|=1$.

γ) Αν $|z|=1$ τότε:

$w=1-i\bar{z} \Leftrightarrow -i\bar{z}=w-1$ οπότε $|w-1|=|-i\bar{z}| \Leftrightarrow |w-1|=|\bar{z}|=|z|=1$ άρα $|w-1|=1$

Η τελευταία σχέση εκφράζει μια εξίσωση κύκλου που επαληθεύεται για w=0.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση : $z\bar{z}+4\,\mathrm{Re}\left[(1-2i)z\right]+4=0$ **(Ι).**

α) **Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών.**

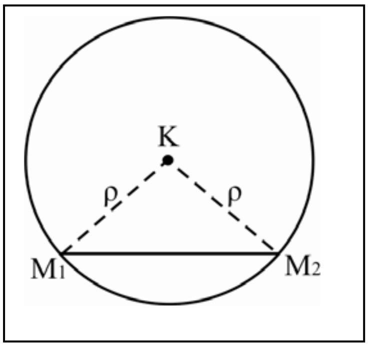
β) **Αν** z_1,z_2 **είναι δύο λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι:** $|z_1-z_2|\leq 8$**.**

γ) **Αν** t_1,t_2 **είναι αντίστοιχα οι τιμές των μιγαδικών** z_1 **και** z_2 **(του ερωτ. β) για τις οποίες η παράσταση** $|z_1-z_2|$ **γίνεται μέγιστη, να δείξετε ότι:**

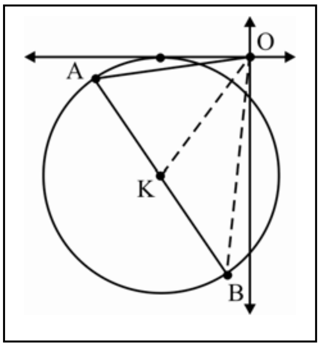
$|t_1+t_2|^{2v}+|10(t_1-t_2)|^{v}=2^{4v+1}\cdot 5^{v}$ **για κάθε** $v\in\mathbb{N}^*$**.**

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε z=x+yi, $(x,y \in \mathbb{R})$ και η (I) παίρνει την μορφή:
$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$.
Επομένως η εξίσωση (I) έχει λύση κάθε μιγαδικό, του οποίου η εικόνα είναι σημείο του κύκλου $C: (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$.

β) 

Αν z_1, z_2 δύο λύσεις της (I) τότε οι εικόνες τους $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι σημεία του κύκλου C . Οπότε έχουμε:
$|z_1 - z_2| = (M_1M_2) \leq 2\rho = 2 \cdot 4 = 8$.

γ) 

Η παράσταση $|z_1 - z_2|$ γίνεται μέγιστη όταν η χορδή M_1M_2, του κύκλου C , γίνεται διάμετρος. Έτσι οι εικόνες A, B των μιγαδικών t_1 και t_2 αντίστοιχα είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Οπότε
$|t_1 - t_2| = \max|z_1 - z_2| = 8 = 2^3$.
$|t_1 + t_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OK}| = 2\sqrt{20} = 2^2\sqrt{5}$.

Έτσι έχουμε:
$$|t_1 + t_2|^{2\nu} + |10(t_1 - t_2)|^{\nu} = 2^{4\nu} \cdot 5^{\nu} + 2^{4\nu} \cdot 5^{\nu} = 2 \cdot 2^{4\nu} \cdot 5^{\nu} = 2^{4\nu+1} \cdot 5^{\nu}.$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **τέτοια ώστε: (I)** $f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta\mu^3 x$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$**. Αν** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ **τότε:**

α) Να δείξετε ότι α=1.

β) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$**, ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{x}$ **και iii)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2}$**.**

ΛΥΣΗ

α) Για $x \neq 0$ διαιρούμε με x^3 την (I) οπότε έχουμε: $(\frac{f(x)}{x})^3 + 2\frac{f(x)}{x} = 3(\frac{\eta\mu x}{x})^3$ και υπολογίζοντας τα όρια των δύο μελών παίρνουμε : $\alpha^3 + 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

β) Παρατηρούμε ότι σε περιοχή του 0 έχουμε

i) $\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$ όπου $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$ για y=ημx γίνεται $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = 1$.

ii) $\frac{f(f(x))}{x}=\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}$ όπου $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\frac{f(x)}{x})=0\cdot 1=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}$ για y=f(x) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=1$.

iii) $\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x}{x-2}$

Εύκολα βρίσκουμε ότι σε περιοχή του 1 είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}=1\cdot(-1)=-1$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$

α) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(ημx)}{συνx}$

β) Να δείξετε ότι: f(1)=0

γ) Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x-1}, x\neq 1\\ k, x=1\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

δ) Για την τιμή του k=1 να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία (ε): y=2x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι σε περιοχή του $\frac{\pi}{2}$ έχουμε $\frac{f(ημx)}{συνx}=\frac{f(ημx)}{συν^2x}\cdot συνx=\frac{f(ημx)}{1-ημ^2x}\cdot συνx=-\frac{f(ημx)}{ημx-1}\cdot\frac{συνx}{1+ημx}$

όπου για y=ημx έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(ημx)}{ημx-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{f(y)}{y-1}=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(ημx)}{συνx}=-1\cdot 0=0$.

β) Επειδή f συνεχής στο 1 έχουμε: f(1)= $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{f(x)}{x-1}=0\cdot 1=0$.

γ) g(1)= $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$ άρα k=1.

δ) Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την h(x)=g(x)-2x στο [0,1]. Παρατηρήστε ότι: h(0)=g(0)=-f(0) όμως f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε: $f(0)<f(1)=0$. Επομένως $h(0)>0$. Ακόμα είναι: h(1)=g(1)-2=-1 <0.

ΘΕΜΑ 5

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (I) $|f(x)-x|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) **Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.**

β) **Να βρείτε τα όρια:**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{\nu}},\ \nu\in\mathbb{N}^*$, **ii)** $\lim\limits_{x\to0^+}[x\cdot f(\frac{1}{x})]$, **iii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\cdot f(\dfrac{x^2}{x+1})]$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x>0$ έχουμε: $|f(x)-x|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{f(x)}{x}-1\right|\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le 1+\dfrac{1}{x}$ και εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

β) i) Έχουμε: Για ν>1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x^{\nu-1}}]=1\cdot0=0$

Για ν=1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

ii) $\lim\limits_{x\to0^+}[x\cdot f(\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ και για $u=\dfrac{1}{x}$ έχουμε $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=1$.

iii) Είναι $\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\cdot f(\dfrac{x^2}{x+1})=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}\cdot f(\dfrac{x^2}{x+1})=(x-2)\cdot\dfrac{f(\frac{x^2}{x+1})}{\frac{x^2}{x+1}}$ (1)

και θέτοντας $u=\dfrac{x^2}{x+1}$ βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\frac{x^2}{x+1})}{\frac{x^2}{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=1$ οπότε από την (1) παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\cdot f(\dfrac{x^2}{x+1})]=+\infty$.

ΘΕΜΑ 6

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (I) $f(\dfrac{x}{x-1})=\dfrac{\eta\mu x}{x-1}$ για κάθε $x\neq1$.

α) **Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x-1}=0$.**

β) **Να βρείτε το f(1).**

γ) **Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\dfrac{\pi}{\pi\text{-}6},\dfrac{\pi}{\pi\text{-}2})$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$.**

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε x>1 έχουμε: $\left|\frac{\eta\mu x}{x-1}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{x-1} \le \frac{1}{x-1} \Rightarrow -\frac{1}{x-1} \le \frac{\eta\mu x}{x-1} \le \frac{1}{x-1}$ με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x-1} = 0$.

β) Από την (I) παίρνουμε: $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{x}{x-1}) = 0$. Θέτουμε $y = \frac{x}{x-1}$ τότε $0 = \lim_{x\to+\infty} f(\frac{x}{x-1}) = \lim_{y\to1} f(y)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 1 έχουμε: $f(1) = \lim_{y\to1} f(y) = 0$.

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την f στο $[\frac{\pi}{\pi\text{-}6}, \frac{\pi}{\pi\text{-}2}]$.

-Για x=$\frac{\pi}{6}$ η (I) δίνει: $f(\frac{\pi}{\pi\text{-}6}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}-1} = \frac{3}{\pi-6} < 0$

- Για x=$\frac{\pi}{2}$ η (I) δίνει: $f(\frac{\pi}{\pi\text{-}2}) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-1} = \frac{2}{\pi-2} > 0$.

<u>Σημείωση:</u> Παρατηρείστε ότι από την σχέση (I) μπορεί να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης για κάθε $x \ne 1$, οπότε τα ερωτήματα β) και γ) επιλύονται διαφορετικά.

ΘΕΜΑ 7

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με f(x)>0 για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Αν το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x=u είναι $E(u) = e^u - f(u)$ για κάθε $u \ge 0$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = e^x$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

ii) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x} = 0$.

iii) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iv) να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x$.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και f(x)>0 για κάθε $x \in [0,+\infty)$, το εμβαδόν ου χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x=u, είναι $E(u) = \int_0^u f(x)dx$ οπότε για κάθε $u \ge 0$ είναι $\int_0^u f(x)dx = e^u - f(u)$ (1).

Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $[0,+\infty)$, το $0 \in [0,+\infty)$ άρα

$(\int_0^u f(x)dx)' = f(u)$

Για κάθε $u \geq 0$ είναι $(\int_0^u f(x)dx)' = (e^u - f(u))' \Leftrightarrow f(u) = e^u - f'(u) \Leftrightarrow f'(u) + f(u) = e^u$.

Άρα για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι $f'(x) + f(x) = e^x$ (2).

Από τη σχέση (1) για u=0 έχουμε f(0)=1 και από τη σχέση (2) για x=0 έχουμε $f'(0) = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$ (η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ από υπόθεση).

ii) Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι

$$f'(x) + f(x) = e^x \overset{\cdot e^x}{\Longleftrightarrow} f'(x)e^x + f(x)e^x = e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (\frac{1}{2}e^{2x})' \text{ οπότε}$$

$$f(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} + c,\ x \geq 0 \quad (3).$$

Για x=0 από την (3) έχουμε $1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ επομένως για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$f(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \geq 0.$$

iii) Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, οπότε η εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x$ ισοδύναμα γράφεται $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\eta\mu x \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \eta\mu x$ (4).

Παρατηρούμε ότι $e^0 - e^{-0} = \eta\mu 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ αληθές, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x + e^{-x} - \eta\mu x$, $x \geq 0$. Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ είναι

$$g'(x) = e^x + e^{-x} - \sigma\upsilon\nu x = \underbrace{(e^x + \frac{1}{e^x} - 2)}_{\geq 0} + \underbrace{(2 - \sigma\upsilon\nu x)}_{>0} > 0 \text{ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα}$$

στο $[0,+\infty)$, οπότε η ρίζα 0 της εξίσωσης είναι μοναδική. Επομένως

$$f'(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \eta\mu x \Leftrightarrow x = 0.$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>: Είναι γνωστό ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ για κάθε α>0 και αφού $e^x > 0$ είναι

$e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geq 0$. Επίσης 2-συνx>0 αφού $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$ για κάθε x.

ΘΕΜΑ 8

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > 2007$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση y=2006x+1 σε ένα ακριβώς σημείο.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση f(x) =2006x+1 έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g(x)=f(x)-(2006x+1), $x \in \mathbb{R}$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγισίμων με $g'(x)=f'(x)-2006>2007-2006=1>0$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση g(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,x]$ με x>0 άρα θα υπάρχει $\xi_1 \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

  $g'(\xi_1)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \Leftrightarrow g(x)=g'(\xi_1)\cdot x+g(0)>x+g(0)$ (αφού $g'(\xi_1)>1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g'(\xi_1)x>x$).

  Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+g(0)\right)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\beta,+\infty)$ με β>0 τέτοιο ώστε g(x)>0 για κάθε $x \in (\beta,+\infty)$. Επομένως g(λ)>0 για $\lambda \in (\beta,+\infty)$.

  Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής $[x,0]$ με x<0 άρα θα υπάρχει $\xi_2 \in (x,0)$ τέτοιο ώστε

  $g'(\xi_2)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \Leftrightarrow g(x)=g'(\xi_2)\cdot x+g(0)<x+g(0)$ (αφού $g'(\xi_2)>1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} g'(\xi_2)x<x$).

  Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+g(0)\right)=-\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ με α<0 τέτοιο ώστε g(x)<0 για κάθε $x \in (-\infty,\alpha)$. Επομένως g(κ)<0 για $\kappa \in (-\infty,\alpha)$.

  Η g ικανοποιεί λοιπόν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο [κ.λ]. Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa,\lambda)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

  Δείξαμε λοιπόν ότι η g(x)=0 έχει:
  - μια τουλάχιστον ρίζα και
  - μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$

  Άρα η g(x)=0 έχει <u>μια ακριβώς</u> ρίζα στο $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση y=2006x+1 σ'ένα ακριβώς σημείο.

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(-e,+\infty)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=1+\int_0^x e^{-f(t)}dt$ για κάθε $x \in (-e,+\infty)$.

α) **Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(x+e)$**

β) **Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.**

γ) **Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τους ημιάξονες Οx΄ και Oy.**

δ) Να βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z με $\mathrm{Re}z \geq 0$ **στο μιγαδικό επίπεδο, αν ισχύει** $e^{f(x)} + 2e^x - x|z| \geq e + 2$ **για κάθε** $x \in (-e,+\infty)$**.**

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Η συνάρτηση $e^{-f(t)}$ είναι συνεχής στο $(-e,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών, το $0 \in (-e,+\infty)$ άρα η συνάρτηση $\int_0^x e^{-f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-e,+\infty)$, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-e,+\infty)$ με $f'(x) = (1 + \int_0^x e^{-f(t)}dt)' \Leftrightarrow f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)}}$ (1) $\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}f'(x) = 1 \Leftrightarrow [e^{f(x)}]' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + c$, $c \in \mathbb{R}$ (2).

Για x=0 από την αρχική σχέση έχουμε f(0)=1, ενώ από τη σχέση (2) είναι $e^{f(0)} = c \Leftrightarrow c = e$.

Έχουμε λοιπόν $e^{f(x)} = x + e \Leftrightarrow f(x) = \ln(x+e)$, x>-e.

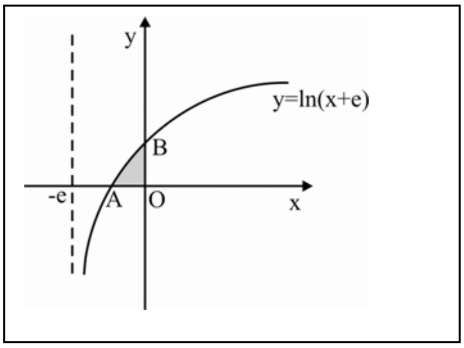
β) Από τη σχέση (1) έχουμε $f'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)}} > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-e,+\infty)$, οπότε είναι και "1-1". Επομένως η f αντιστρέφεται. Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε y=f(x) και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν $y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(x+e) \Leftrightarrow x + e = e^y \Leftrightarrow x = e^y - e \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y - e$, $y \in \mathbb{R}$. Άρα η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x - e$.

γ) <u>Συντεταγμένες Α</u>

Για y=0 είναι

$\ln(x+e) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+e) = \ln 1 \Leftrightarrow x + e = 1 \Leftrightarrow x = 1 - e$

οπότε Α(1-e,0).



Είναι

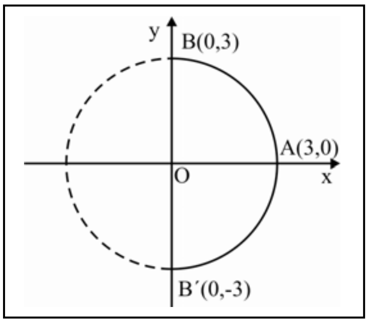
$$E(\Omega) = \int_{1-e}^{0} \ln(x+e)dx = \int_{1-e}^{0} x'\ln(x+e)dx = [x\ln(x+e)]_{1-e}^{0} - \int_{1-e}^{0} x(\ln(x+e))'dx = -\int_{1-e}^{0} \frac{x}{x+e}dx =$$

$$= -\int_{1-e}^{0} \left(\frac{x+e}{x+e} - \frac{e}{x+e}\right)dx = -\int_{1-e}^{0} \left(1 - \frac{e}{x+e}\right)dx = e\int_{1-e}^{0} \frac{1}{x+e}dx - \int_{1-e}^{0} dx = e\int_{1-e}^{0} \frac{1}{x+e}(x+e)'dx - \int_{1-e}^{0} dx =$$

$$= e[\ln|x+e|]_{1-e}^{0} - [0 - (1-e)] = e + 1 - e = 1 \text{ τ.μ.}$$

δ) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + 2e^x - x|z| - e - 2$, $x \in (-e,+\infty)$. Για κάθε $x \in (-e,+\infty)$ είναι $e^{f(x)} + 2e^x - x|z| \geq e + 2 \Leftrightarrow e^{f(x)} + 2e^x - x|z| - e - 2 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$. Δείξαμε ότι $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in (-e,+\infty)$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$(-e,+\infty)$ με $g'(x)=e^{f(x)}f'(x)+2e^x-|z|$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$ με $g'(0)=e^{f(0)}f'(0)+2e^0-|z| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g'(0)=e^{f(0)}\dfrac{1}{e^{f(0)}}+2-|z| \Leftrightarrow g'(0)=3-|z|$. Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0)=0 \Leftrightarrow 3-|z|=0 \Leftrightarrow |z|=3$. Άρα οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ=3 που έχει εξίσωση $x^2+y^2=9$.



Όμως το $\mathrm{Re}z \ge 0$ επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z πάνω στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφουν το ημικύκλιο $\overset{\frown}{B'AB}$ του κύκλου $x^2+y^2=9$ όπου Β΄(0,-3). Α(3,0), και Β(0,3).

ΘΕΜΑ 10

Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)=2xf(x)-x^2f(2-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με f(2)=0.

α) Να αποδείξετε ότι $[f(x)-x]^2=x^2[1-f(2-x)]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η C_f έχει με τον άξονα x΄x δύο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για x=1 η f παίρνει μέγιστη τιμή f(1)=1.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^2(x)=2xf(x)-x^2f(2-x) \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=-x^2f(2-x)$
$\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2-x^2f(2-x) \Leftrightarrow [f(x)-x]^2=x^2[1-f(2-x)]$.

β) Για $x\ne 0$ είναι $1-f(2-x)=\dfrac{[f(x)-x]^2}{x^2}\ge 0$ οπότε $f(2-x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.
Επίσης είναι $f(2-0)=f(2)=0\le 1$. Άρα $f(2-x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν όπου x θέσουμε το 2-x έχουμε $f(2-(2-x))\le 1 \Leftrightarrow f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για x=1 από την αρχική σχέση έχουμε $f^2(1)=2f(1)-f(1) \Leftrightarrow f^2(1)=f(1) \Leftrightarrow f(1)[f(1)-1]=0 \Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f(1)=1$.
Για x=0 επίσης έχουμε $f^2(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.
Επειδή $f(0)=0$ και f(2)=0 δεν είναι δυνατόν να είναι και f(1)=0 αφού η C_f έχει με τον άξονα x΄x δύο μόνο κοινά σημεία. Υποχρεωτικά λοιπόν είναι f(1)=1. Άρα $f(x)\le f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η f παίρνει μέγιστη τιμή το 1 για x=1.

ΘΕΜΑ 11

Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $f\circ g$ είναι ¨1-1¨, $(f\circ g)(0)=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $\int_0^{g(x)} f(t)dt+\int_0^{x}(f\circ g)(t)dt=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) **g΄(x)=-1 για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και**

β) $\int_0^{g(x)+x} f(t)dt=1$**,** $x\in\mathbb{R}$**.**

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0\in\mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως η $\int_0^{g(x)} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η $f\circ g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών, το $0\in\mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση $\int_0^{x}(f\circ g)(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $\left(\int_0^{g(x)} f(t)dt+\int_0^{x}(f\circ g)(t)dt\right)'=0\Leftrightarrow$

$f(g(x))g'(x)+(f\circ g)(x)=0\Leftrightarrow(f\circ g)(x)[g'(x)+1]=0$ (1).

Επειδή η συνάρτηση $f\circ g$ είναι ¨1-1¨ και $(f\circ g)(0)=0$ ισχύει $(f\circ g)(x)=0\Leftrightarrow(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)\Leftrightarrow x=0$. Δηλαδή η εξίσωση $(f\circ g)(x)=0$ έχει μοναδική λύση την x=0. Επομένως η (1) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} x=0 \text{ ή} \\ g'(x)+1=0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*. \end{cases}$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_0^{g(x)+x} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. (2)

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0\in\mathbb{R}$, η g(x)+x είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η h παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f(g(x)+x)\cdot(g(x)+x)'\Leftrightarrow h'(x)=f(g(x)+x)\cdot(g'(x)+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Για x=0 έχουμε $h'(0)=f(g(0))\cdot(g'(0)+1)=0\cdot(g'(0)+1)=0$.

Για $x\neq0$ έχουμε $h'(x)=f(g(x)+x)\cdot0=0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $h(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$. Για x=0 από την αρχική σχέση έχουμε $\int_0^{g(0)} f(t)dt=1$ και από την (2) έχουμε $h(0)=\int_0^{g(0)} f(t)dt\Leftrightarrow c=1$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)=1\Leftrightarrow\int_0^{g(x)+x} f(t)dt=1$.