ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+25z^2=6xz+8yz \\ 3x^2+2y^2+z^2=240 \end{array}\right\}$$

Λύση
Η πρώτη εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$x^2-6xz+9z^2+y^2-8yz+16z^2=0 \Leftrightarrow (x-3z)^2+(y-4z)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x-3z=0 \text{ και } y-4z=0 \Leftrightarrow x=3z \text{ και } y=4z.$$

Επομένως, όλες οι τριάδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση είναι της μορφής:

$$(x,y,z)=(3t,\,4t,\,t),\ t\in\mathbb{R}.$$

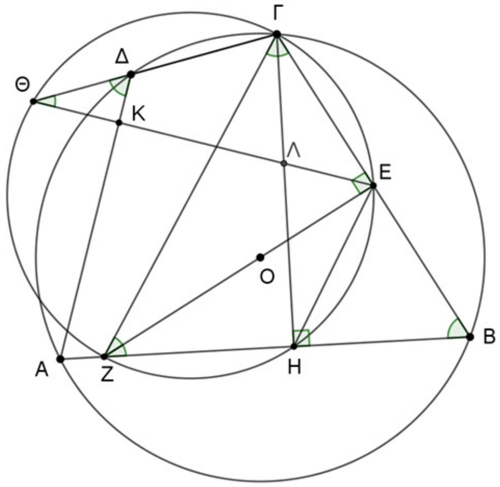
Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$3\cdot 9t^2+2\cdot 16t^2+t^2=240 \Leftrightarrow 60t^2=240 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm 2.$$

Για $t=2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(6,8,2)$, ενώ για $t=-2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(-6,-8,-2)$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή $\Gamma\hat{H}Z = \Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$, έπεται ότι $A\hat{H}\Lambda = 90^\circ$ Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$. Επειδή $\Delta\hat{K}\Theta = A\hat{K}\Lambda$ (ως κατά κορυφή γωνίες), αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο ΔΘΚ οι δύο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή: $\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = 90^\circ$.

Όμως έχουμε ότι:

$\Delta\hat{\Theta}K = \Gamma\hat{\Theta}E = \Gamma\hat{Z}E$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο)

$\Gamma\hat{Z}E = E\hat{Z}B$ (γιατί είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ)

Άρα έχουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K = E\hat{Z}B \qquad (1).$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\Theta\hat{\Delta}K = Z\hat{B}E \qquad (2)$$

(εσωτερική και απέναντι εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ)

Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = E\hat{Z}B + Z\hat{B}E = 90^\circ,$$

γιατί το τρίγωνο ΖΒΕ είναι ορθογώνιο στο Ε.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι είναι ίσοι με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

Λύση

Έστω κ το πλήθος των ψηφίων του ακέραιου Α ο οποίος ισούται με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων του. Ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος με κ ψηφία είναι ο $10^{\kappa-1}$, ενώ το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα ψηφίων του είναι 9κ. Επομένως, για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος θα πρέπει:

$$10^{\kappa-1} \leq 13 \cdot 9\kappa = 117\kappa \ . \qquad (1)$$

Για $\kappa \geq 4$ θα αποδείξουμε ότι: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση (1).

Πράγματι, για $\kappa = 4$ έχουμε: $10^{4-1} = 10^3 > 117 \cdot 4 = 468$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, για το τυχόν $\kappa > 4$, τότε προκύπτει ότι:

$$10^{(\kappa+1)-1} = 10^{\kappa} = 10 \cdot 10^{\kappa-1} > 10 \cdot 117\kappa = 117 \cdot 10\kappa > 117 \cdot (\kappa+1).$$

Επομένως το πλήθος κ των ψηφίων του Α πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του 3.

- Η περίπτωση με $\kappa = 1$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = \alpha < 13\alpha$, με $0 < \alpha \leq 9$.
- Η περίπτωση με $\kappa = 2$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = 10\alpha + \beta < 13(\alpha + \beta)$.
- Έστω $\kappa = 3$ και $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, με $0 < \alpha \leq 9,\ 0 \leq \beta, \gamma \leq 9$. Τότε πρέπει:

$$100\alpha + 10\beta + \gamma = 13 \cdot (\alpha + \beta + \gamma), \text{ με } 0 < \alpha \leq 9,\ 0 \leq \beta, \gamma \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 87\alpha = 3\beta + 12\gamma, \text{ με } 0 < \alpha \leq 9,\ 0 \leq \beta, \gamma \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 29\alpha = \beta + 4\gamma,\ 0 < \alpha \leq 9,\ 0 \leq \beta, \gamma \leq 9$$

Επειδή ισχύει: $0 \leq \beta + 4\gamma \leq 45 \Rightarrow 29\alpha \leq 45 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha = 1$ (αφού $\alpha \neq 0$), οπότε έχουμε:

$$\beta + 4\gamma = 29 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \beta = 29 - 4\gamma \leq 9$$

$$\Rightarrow -29 \leq -4\gamma \leq -20 \Rightarrow 5 \leq \gamma \leq \frac{29}{4} \Rightarrow \gamma \in \{5, 6, 7\}$$

- Για $\gamma = 5 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 9$ και $\mathrm{A} = 195$.
- Για $\gamma = 6 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 5$ και $\mathrm{A} = 156$.
- Για $\gamma = 7 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 1$ και $\mathrm{A} = 117$.

Πρόβλημα 4

Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι θετικοί ακέραιοι: 1, 2, 3,…,2018. Ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τη δυνατότητα να κάνουν μαζί την παρακάτω κίνηση:

Επιλέγουν δύο αριθμούς α, β από αυτούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα και τους αντικαθιστούν με τους αριθμούς $5\alpha - 2\beta$ και $3\alpha - 4\beta$.

Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων κινήσεων μπορούν να τριπλασιαστούν όλοι οι αριθμοί του πίνακα, δηλαδή να προκύψουν οι αριθμοί: 3, 6, 9,…, 6054. Η Μαρία σκέπτεται για λίγο και του απαντά ότι αυτό δεν είναι δυνατό να γίνει. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο και γιατί;

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε κάθε κίνηση το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στον πίνακα μεταβάλλεται όσο η διαφορά:

$$(5\alpha - 2\beta) + (3\alpha - 4\beta) - (\alpha + \beta) = 7\alpha - 7\beta = 7(\alpha - \beta) = \pi o\lambda.7$$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από κάθε εφαρμογή της παραπάνω κίνησης η διαφορά του αθροίσματος $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα μείον το άθροισμα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ των αριθμών που ήταν αρχικά γραμμένοι στον πίνακα είναι αριθμός πολλαπλάσιος του 7, δηλαδή

$$\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o} - \Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}} = \pi o\lambda.7 \ .$$

Επομένως τα αθροίσματα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ και $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ διαιρούμενα με το 7 πρέπει να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Όμως $\Sigma_{αρχικό} = 1+2+3+...+2018 = \frac{2018\cdot 2019}{2} = 1009\cdot 2019 \equiv 1\cdot 3\left(\bmod 7\right) \equiv 3\left(\bmod 7\right)$.

Επιπλέον, αν μετά από πεπερασμένο πλήθος κινήσεων φθάσουμε στους αριθμούς 3,6,9,…,6054, τότε το άθροισμα τους θα είναι

$$\Sigma_{τελικό} = 3+6+9 = ...+6054 = 3\cdot\Sigma_{αρχικό} \equiv 3\cdot 3\left(\bmod 7\right) \equiv 2\left(\bmod 7\right)$$

Επειδή τα υπόλοιπα των αθροισμάτων $\Sigma_{αρχικό}$ και $\Sigma_{τελικό}$ όταν διαιρούνται με το 7 είναι διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να προκύψουν στον πίνακα οι αριθμοί 3,6,9,…,6054 και επομένως έχει δίκιο η Μαρία.